數學趣味問題競試集

作者前言

本書所收集的三部分題目，是基於蘇俄莫斯科州立大學學校數學社（School mathematics Society of the Moscow State University）的二十年收集所作的一系列書之一開始。本書含有問題以及定理，大多數的題目均出現於莫斯科州立大學學校數學社（School Mathematical Society of the M.S.U.）裏以及在莫斯科舉行的數學奧林匹克競賽（Mathematical Olympiads）中。

這些題目可供學生，老師，以及基本數學教育機構的材料。其第一冊（第一部分）包括算術，代數以及數論，第二冊是討論平面幾何部分，第三冊是有關立體幾何的問題。

此書與一般的高中問題書有顯著的不同，其不僅可增加學生的一般知識，而且可增加學生思考問題的方法與新觀念，並且可發揮學生的偏好與才能。其中有些題目之解法只須稍具數學知識即可，同時亦有些題目是針對一般較聰明或熟練的學生而設的，也就是說這些題目需要用到解方程式或高次方程組的技巧。在另一方面，這些題目強調於創造力而非一般的形式化。

還有此書所選取的題目最大的特點就是恰能適應現代新數學的發展與新方向。其中有些題目於提示與解答說明很詳盡，特別是對單獨而較深入的問題而言（例如基本的數論以及不等式問題）。有些題目是從古典數學文獻及近代數學刊物中取出。

爲了要使題目更爲一般化且限制條件更少，其證法當然較高中的特殊情況下之題目爲難，但是無論如何，他們認爲這些題目並非爲一般努力的學生所無法勝任的。

在此謹向讀者推薦讀此書時，一定要先看本書的用法，以期能收到實效。

此工作的第一部分與第二部分是由葉克隆（I. M. Yaglom）編輯，第三部分原則上是由陳佐夫（N. N. Chentzov）完成的。其中有四十題是出於D.O. Shklarsky 的手抄本，應予特別感謝！

作者將非常感謝讀者能提供新的且更好的解法，或者是提供新的適當題目以便編入此書中。

英文版編者前言

爲中學裏的優秀學生，舉行一連串的數學競賽考試，是蘇俄科學教育上要措施之一。這種數學競賽考試，美國教育制度上已漸漸效法。蘇俄在全各學，每學期經常舉行初選賽及淘太賽，至每年末期，在莫斯科大學舉行學競試大會（mathematical olympiad），則達到最高潮。

此書之題目，共收集了二十年之久始完成，皆爲一些曾出現於蘇俄數學競賽中實用而又有趣的問題，以及一些由蘇俄學校數學研究社（School Mathematics Study Societies）發展而成的題目及資料。對於這些蘇俄數學所設計的題目，亦經被廣泛採用於美國各種考試中。

蘇俄的學生以及老師，都有這種考試題目與解答的專書，但在美國一般學校，尙不易覓得。不過有些問題已經被翻成英文，例如載在由美國數學協會（Mathematical Association of American）出版的美國數學月刊(American mathemical Monthly)，還有些類似的題目亦出現於各種數學雜誌裏。除了由這些來源收集的若干資料外，以問題的方式，處理眞正及進展的數學的著作還少見。

所以競試問題集（Olympiad Problem Book）第三增訂版的翻譯與訂正，當可供美國中學及大學的迫切需要。此書共收集了320 題－其中少數目具娛樂及啓發性的，但大多數的題目，均與純正且重要的數學理論密切配合，儘管學習此書無需高深的基礎。這些題目包括代數，算術，三角以及數論問題，而所有的題目皆強調創造性與啓發生。這些問題的設計皆以不依次序的方法安排，主要目的就是作者欲強調啓發性與創造性重於解題能力與技巧

此時，編者想起了不知何人於何書曾說過“教育最大的目的是要使學生如何能發掘問題而使學生能如何解答問題”。

所有問題都給了詳解；於許多情況下以不同之觀點與不同之解法討論同一問題。雖然大部份問題是爲中學學生而設的，但亦並不容易，且有些題目向任何作研究的數學家挑戰。在另一方面來說，一個普通較聰明的高中生只

要用他的頭腦即可很快地解出問題。

在解題過程中若須引用較高深的觀念時，此觀念將首先予以討論，故書頗有教科書的色彩。且較深的問題，其解法都甚爲詳盡。

因此本書對高中與大學的學生可有各種不同的用法。特別可供高中老師作教材用，當然這必須要學生天賦才能較高才行，同時亦可作爲學修之用。

除了原版中一些難免的錯誤，乃少許經翻譯而造成的生硬感外，英譯對此書總算相當負責，要說此書有何不當，那要算是擅改的較多；（但原的前言與序仍保留）（譯者註：此書譯成中文時已將俄文版的前言與序略）。某些符號，雖與一般美國所用的不同，也仍將保留（例如，用 C_n^k 代 C_k^n）。

此書是從蘇俄的基本數學問題與定理集粹（Selected Problems an Theorom of Elementany Mathematics）的第三版英譯而成。

艾爾文　蘇斯曼

本書用法

本書共分爲三部分，第一部分爲題目敍述，第二部分爲詳解，第三部分答案與提示。爲了更有效地利用此書起見，我們將答案與提示排於最後。

凡於問題題號上記有星號“ * ”者，爲作者認爲比其他題目較難之問題。有少許題號上記有雙星號“ ** ”的問題則爲更難的題目（當然，題目之難易隨各人觀點而不同）。

對本書大多數的問題讀者在翻閱提示之前可試圖解答，倘若無法尋出解答，則可先翻閱提示，以幫助讀者引入解題的方向。倘若此時仍毫無頭緒，再才翻閱詳解部分。但若讀者自己即可找出解答，則可與答案及提示欄之作比較，若讀者之答案與本書不同，那麼讀者可再檢查一遍自己的答案是否正確。若讀者之答案與本書相同，那麼讀者可再比較自己的解法與本書之解法有何不同。若本書列舉數種解法，則讀者可比較各種解法的利弊。

當然以上所列舉的用法也許不適合記有星號的題目，對於記有一個星號的題目而言讀者最好先參閱一下提示，以對解題有所助益，對於記有兩個星號的題目而言，讀者一定要先參考提示，以免枉費時間。這些問題可當作理論發展所得之重要定理，而詳解部分僅爲參考資料。同時每一記有雙星號的題目都可拿來當作數學討論會上的特別報告或論文。在讀者欲解這些困難問題之前必須先要解出此題附近類似的簡單問題，否則會徒勞無功。而其中有些題目之解題技巧並非可於一般高中課程找到的。

一般來說，這些題目彼此都互相獨立的，僅有少部分的題目其解法須用到前題的結果，但在最後四節裏許多類似的題目都放在一起，且其前後具有連貫性。

目　　錄

1. 問題敘述

1.　每個人在生活中，都曾和別人握過若干次的手，證明一群人相互握手，各人握手的次數為奇數，但其握手次數之總和必為偶數。

2.　在西洋棋中騎士從最左下角走到最右上角（按照規定走法）且每一方格必須經過且僅能經過一次，試問可能嗎？

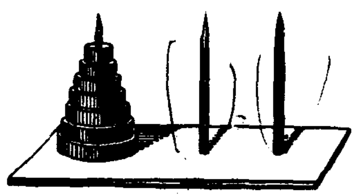

圖 1

3. (a)　N 個圓圈皆為不同的直徑，套入一尖端朝上的木釘，最大的圓在最底層，因而形成一金字塔形（如圖形），我們希望將這些圓圈全部移到第二根木釘，而一次僅能移動一個圓圈，有第三根木釘可作為輔助用，但在每一個移動過程中，不能將大的圓圈置於小圓圈之上，試問最少的移動次數 k 為多少？

(b)* 一種「中國圓圈智力測驗遊戲」結構如下：n 個同樣大小的圓圈由一些金屬鉤串連於一平板上，這些金屬鉤皆為等長（如圖 2）。

一U形細木桿一一穿過圓圈，使得金屬鉤恰位於V形木桿開口中，此V形木桿固定於一大木板上（金屬鉤在平板之洞中可自由移動如圖示），現要將圓圈全部自U形木桿中移出，試問最少須要移動圓圈幾次？

4. (a)　80個同樣種類的錢幣，已知其中有一為偽幣且較其他錢幣為輕，試經天平量取 4 次而能指出偽幣。

(b)　n 個相同的錢幣中有一為偽幣，試問最少須要用天平測量幾次才

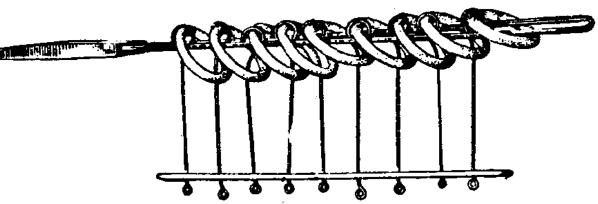

圖 2

能找出僞幣？

5. 20個大小及外貌皆相同的金屬塊，其中某些爲純鋁塊，其餘爲鋁合金塊，鋁合金塊較重，最多可用天平稱取11次，如何決定純鋁塊有若干個？

6. (a)* 12個相同之錢幣，其中有一僞幣，而不知此僞幣比眞正錢幣輕或重（但眞幣皆爲等重），用天平量取三次，如何顯示此僞幣比眞幣輕或重？

(b)** 1000個相同之錢幣中，有一爲僞幣，而不知此僞幣比眞幣輕或重，試問最少須要天平稱取若干次才可找出僞幣且可決定此僞幣比眞幣輕或是重？

註：在問題(a)的情況中可以稱取 3 次而能從 13個錢幣中 指出僞幣，但我們不能決定此幣與眞幣孰輕孰重，當 14 個 錢 幣時就必須稱取 4 次。若我們已知僞幣較錢幣爲重時，決定最少需要稱取幾次以從 1000 個錢幣中指出僞幣是較爲容易的。

7. (a) 一旅行者身邊沒有錢，但有一金質鏈子，由七個環連成，旅館允許在停留期間每天必須付一金環，以爲住宿費，而旅館可用他已付的金環再找給他，問若旅行者欲住七天，最少只須剪開幾個環（註：金環可從金鏈上任意位置剪下）？

(b) 一鏈由2000個環連成，最少只須取下幾個環（可從鏈上任意位置取下）使得從 1 到2000中任一數目的環，皆可表示出？

8. 200 個學生排成 10 列，每一列 20 個學生，形成 20 行，每行 10 個學生。從 20 行中每一行選出一最矮的，再從這 20 個最矮中選出一最高的當

A生。選出的20個矮生再回到原位形成原來隊形，再從10列中每列選出一名最高的，從這10名最高的再選出一名最矮的當作B生，試問A生與B生孰較高（設A與B不爲同一人）？

9. 若有13個齒輪，每一齒輪的克數皆爲整數，已知此13個中任12個皆能置于天平中，每邊放6個而達到平衡，證明此13個齒輪必爲等重。

10. 下列三角形數列：

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\ 1\ 1\\
1\ 2\ 3\ 2\ 1\\
1\ 3\ 6\ 7\ 6\ 3\ 1\\

\end{array}
$$

其中每一數爲此數的上方及左上，右上方三數之和。若此數的上方或左上，右上方無數目時則以零代替之，證明第三列以後每一列皆至少包含一偶數。

11. 12個方格圍成一圓周，四個不同顏色的籌碼紅、黃、綠、藍，置於4個連續的方格上，一籌碼可沿順時針或反時針的方向隔四格跳入第五格，但要第五格沒有籌碼才可，如此經過若干次的移動，直到四個籌碼又重新出現於原來四個方格時，試問籌碼經過如此處置後，可能出現多少種排列情形？

12 一個小島上住著五個人和一隻可愛的猴子，一天下午他們五個人弄到一堆椰子，準備第二天早上平均分配。到晚上時其中一人醒來，將椰子分作五等分結果剩下一個，而將這個多的給了猴子，並且把自己的一份藏起來，其餘的合作一堆，過一會兒另一個人也醒來同樣作法，將整堆分作五等份，結果亦是多餘一個，而將多餘的給了猴子，自己的一份藏起來，經過一夜，每一個人都如此做過一次，而結果都是剩餘一個給了猴子，但他們彼此並不知道，第二天早上五個人一同去分已經減少了的椰子，結果又是剩下一個，試問原來的椰子數最少應爲若干？

13. 二兄弟買一群羊，若爲n頭，而每頭所賣的價錢又恰爲n元，全部賣完後，二兄弟分錢的方法如下，先由兄拿十元，再由弟拿十元，如此輪流，拿到最後，剩下不到十元，輪到弟拿去，爲了平均分配，兄再給弟一把小刀，即可達分配平均，試問小刀的價值若干？

14.* (a) 試問陽曆新年較常碰到禮拜六還是禮拜天？

(b) 每月的13號較常碰到星期幾？

2. 整數位數的變換

15. 那些整數具有下列性質？若將一整數之末位數字刪掉，形成一新整數而原來的數可被此新數整除。如 36 被 3 整除，24 可被 2 整除。

16. (a) 找出所有以 6 字開頭的整數而具有下列性質，若將原數之首位去掉，形成一新數，此新數必定為原數的 $\frac{1}{25}$ 。

(b) 若將某數的首位刪掉，所得的新數為原數的 $\frac{1}{35}$ 證明此數不存在。

17.* 一整數若刪掉其中某一位數後其結果為原數的$\frac{1}{9}$且可被 9 整除：

(a) 試證被 9 整除後所得的商，恰為原數刪掉某位數。

(b) 找出所有滿足題目條件的數。

18. (a) 找出所有具有下列性質的整數：某數去掉其第三位數字後所得的新數可除盡原數。

(b)* 找出所有具有下列性質的整數：某數去掉其第二位數字後所得的新數可除盡原數。

19. (a) 找出最小的整數，使得其第一位數字為 1 ，若將此數字移到末位，則變為原數之 3 倍。試寫出所有具有此性質之數。

(b) 將一整數的首位調到末位，形成的新數為原數的 3 倍，試問此數之首位數字必須為何始為可能？找出所有這種整數。

20. 證明自然數中不存在一個數，其首位調到末位後是原數的 5 倍，6 倍，或 8 倍。

21. 證明不存在一個數，其首位數字調於末位後而為原數之兩倍。

22. (a) 證明不存在一個數，其首位調於末位後，變為原數之七倍或九倍。

(b) 證明不存在一個數，其首位調於末位後，而變為原數之四倍。

23. 找出一最小整數，使得其首位為 7 ，當將首位調於末位時，其值變為原數的 $\frac{1}{3}$ 。

24. (a) 一整數所含的數字，與另一整數所含的數字完全相同，但其排列次序恰完全顛倒，則稱此數爲另一數的倒置，如123與321，證明一數的倒置不可能爲此數的2倍，3倍，5倍，7倍或8倍。

(b) 找出所有的數使得此數的“倒置”爲原數的4倍或9倍。

25. (a) 找出一六位數使得其末三位數（不改變相關次序）移到前三位數後，變爲原數的6倍。

(b) 證明不存在一八位數使得其末四位數（不改變相關次序）移到前四位數後，變爲原數的6倍。

26. 找出一六位數使得此數分别乘以2，3，4，5，6時，其結果所含的各位數字，與原數所含的各位數字相同，僅其排列次序不同。

3. 整數的分割性

27. 證明對任意整數 n 而言

(a)　$n^3 - n$ 可被3 整除。

(b)　$n^5 - n$ 可被5 整除。

(c)　$n^7 - n$ 可被7 整除。

(d)　$n^{11} - n$ 可被11 整除。

(e)　$n^{13} - n$ 可被13 整除。

註：但 $n^9 - n$ 不爲9整除，例如 $2^9 - 2 = 510$ 不爲9的倍數。問題(a)—(b) 爲一般定理的特例，參考問題240 。

28. 證明下列敘述：

(a)　對每一正整數 n 而言，$3^{6n} - 2^{6n}$ 爲35的倍數。

(b)　對每一整數 n 而言，$n^5 - 5n^3 + 4n$ 可被120 整除。

(c)*　對於所有整數 m ，n 而言，$mn\ (m^{60} - n^{60})$ 可被56, 786, 73
整除。

29. 對於任意正整數 n ，試證明 $n^2 + 3n + 5$ 不被121 整除。

30. 無論 m，n 代以任何整數，證明下式

$$m^5 + 3m^4n - 5m^3n^2 - 15m^2n^3 + 4mn^4 + 12n^5$$

不可能爲 33 。

31. 一整數的100次方被125除，其餘數可能爲何？

32. 試證若整數 n 與10互質，則 n 的101次方的末3位數字必定與原數的末3位數字相同，如1233^{101} 的末3位數爲233，37^{101} 的末3位數爲037 。

33. 找出一三位整數，使得此數的任意整數次方，其結果末3位數字皆與原數相同。

34. 令 N 爲不可被10整除的偶數，試問 N^{20} 的十位數字爲何？N^{200} 的百位數字爲何？

35. 證明下式可被 $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ 整除：

$$1^k+2^k+3^k+\cdots\cdots+n^k$$

其中 n 爲任意整數，k 爲奇數。

36. 定出可被11 整除之整數的條件。

37. 以15 進位的數 123456789 (10) (11) (12) (13) (14)此數若改爲以十進位表示法如下：

$$14+13\cdot15+12\cdot15^2+(11)15^3+(10)15^4+\cdots+2\cdot15^{12}+15^{13}$$

試問此數被7 除時餘數爲何？

38. 試證僅有1，3，9 三數具有如下之特性；若 K 表此三數之任一，且 K 可除盡 N，則 K 必定亦可除盡由 N 之各位數字任意重排所成的數（若 $K=1$ 時顯然成立，$K=3$ 或9 時若且唯若 N 的各位數之和可被3 或9 整除，則 N 必定可被3 或9 整除）。

39. 試證 $27195^8-10887^8+10152^8$ 可被 26460 整除。

40. 試證 $11^{10}-1$ 可被100 整除。

41. 試證 $2222^{5555}+5555^{2222}$ 可被7 整除。

42. 證明若一數爲 $3n$ 個相同的數字所構成，則此數可被 3^n 整除之。（例如 222 可被3 整除， 777777777 可爲9 整除）。

43. 試找出下數被7 除後，所得之餘數。

$$10^{10}+10^{10^2}+\cdots\cdots+10^{10^{10}}$$

44. (a) 找出數 $9^{(9^9)}$ 和 $2^{(3^4)}$ 中最後的數字。

(b) 找出 2^{999} 或 3^{999} 中最後兩個數字。

(c)* 找出 $14^{(14^{14})}$ 數最後兩個數字。

45. (a) 下數最後一位是多少？

$(\cdots(((7^7)^7)^7)^{\cdots7})$ 指數7 共有100 個，最後兩位數字是什麼？

(b) 下數最後一位數字是多少？

$$7^{\left(7^{\cdot^{\cdot^{\left(7^{(7^7)}\right)}}\cdots}\right)}$$

共有1001 個七，最後兩位數字是什麼？

46.* 決定下數最後一位數字是多少？

$$N=9^{\left(9^{\cdot^{\cdot^{\left(9^{(9^9)}\right)}}\cdots}\right)}$$

共有 1001 個九。

47.* 寫出下式的末一千位數字。

$$N=1+50+50^2+50^3+\cdots\cdots+50^{999}$$

48. 試求 100！的末尾含有多少個 0 。

註：$n!=1.2.3.4\cdots\cdots(n-1).n$，從1連續乘到$n$稱作$n$階乘，記作$n!$。

49. (a) 試證任意n個連續整數的乘積必定可被$n!$整除。

(b) 證明若$a+b+\cdots\cdots+k\leq n$則$\dfrac{n!}{a!b!\cdots\cdots k!}$爲整數。

(c) 證明$(n!)!$可被$n!^{(n-1)!}$整除。

(d) 證明一算術級數的n項之乘積，可被$n!$整除，但此算術級數的公差與$n!$互質。

（提示：問題49(d)是從49(a)得來的。）

50. 數C_{1000}^{500}是爲從1000個元素中任取出500個的組合數，試問此數可否被7整除？+（C_{1000}^{500}或記作$C(1000,500)$）

51. (a) 找出從1到100中之所有的數n，而$(n-1)!$不可被n整除。

(b) 找出從1到100中之所有的數n，而$(n-1)!$不可被n^2整除。

52.* 寫出所有的整數n，而n能被所有不大於$\sqrt{n}$的數整除。

53. (a) 證明任意連續5個整數的和不可能爲另一整數的平方。

(b) 證明任何連續三整數的偶數次方之和，不可能爲一整數的偶數次方。

(c) 證明連續九個整數的相同偶數次方和，不可爲任一整數之任意整數次方。

54. (a) 令A和B爲兩個七位數，每一個都包含從1到7的所有數字，證明A不可能被B整除。

(b) 用從1到9之九個數字組成3個三位數而此三數之比值爲1:2:3。

55. 若整數爲一完全平方數，且末四位數皆相同，問此整數是多少？

56. 證明若一矩形之相鄰兩邊及對角線皆可以整數表示出，則此矩形面積必可被12整除。

57. 試證若二次方程式的係數：$ax^2+bx+c=0$皆爲奇數，則方程式之根不可能爲有理數。

58. 試證下列分數之和：

$\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}$、（$n$爲正整數）化爲小數形式時其形式爲″展延週期+″的無限小數。

+：所謂″展延週期″是周期部分之前仍有若干個非循環之數字端視分母與10有否公因數而定。

59. 證明下列各數不可能爲整數（m，n 爲自然數）

(a)　$M=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$；

(b)　$N=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+m}$；

(c)　$K=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}$　。

60.**(a)　證明若 p 爲大於 3 之質數，則下式之和的分子部分：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{p-1}$　可被 p^2 整除，如 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$ 之分子部分爲 25 可被 25 整除。

(b)　證明若 p 爲大於 3 之質數，則下式之和的分子部分 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(p-1)^2}$，可被 p 整除，如 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}=\frac{205}{144}$，分子部分爲 205 可被 5 整除。

61. 證明下式：

$\frac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$　（a 可爲任意正整數）確爲最簡分數。

62. 令 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 爲 n 個不同之整數，證明所有形如 $\frac{a_k-a_l}{k-l}$ 分數的乘積爲整數，但 $n\geq k>l$。

63. 證明所有組成如下之數：

$$10001,\ 100010001,\ 1000100010001, \cdots$$

（3 個零介於 2 個 1 之間）皆爲合成數。

64. (a)　$a^{128}-b^{128}$ 被 $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})(a^{64}+b^{64})$ 除結果爲何？

(b)　$a^{2^{k+1}}-b^{2^{k+1}}$ 被 $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)\cdots\cdots(a^{2^{k-1}}+b^{2^{k-1}})(a^{2^k}+b^{2^k})$ 除結果爲何？

65. 證明以下數列中之任何兩項皆爲互質。

$$2+1,\ 2^2+1,\ 2^4+1,\ 2^8+1,\ 2^{16}+1, \cdots\cdots, 2^{2^n}+1, \cdots\cdots$$

註：由此結果可得證質數有無限多個（參考問題159 和 253）

66. 證明二數 2^n-1 和 2^n+1，（$n>2$）若其中一數爲質數，則另一數必爲合成數。

67. (a) 證明若 p 和 $8p-1$ 皆爲質數，則 $8p-1$ 必爲合成數。

(b) 證明若 p 和 $8p^2+1$ 皆爲質數，則 $8p^2-1$ 必爲質數。

68. 證明所有大於 3 的質數的平方除以12時，餘數必爲 1 。

69. 證明若三個皆大於3的質數，形成一算術級數，則此級數的公差，必可被6 整除。

70.*(a) 10個皆小於 3000 的質數，形成一算術級數，試找出此10 個質數。

(b) 證明不可能有11個皆小於2000的質數而能形成一算術級數。

71. (a) 證明任予五個連續正整數皆能找到一數，而此數與其餘四數皆互質。

(b) 證明任予16個連續正整數皆能找到一數，而此數與其餘15 數皆互質。

4. 算術問題

72. 整數A爲333……共666 個3，整數B爲666……共666 個6，試問A與B之積爲何？

73. 由1001個7 構成的整數，除以1001 其商與餘數爲何？

74. 找出一最小平方數而其首位數皆爲2者。

75. 證明若所予一數α爲0.999……，最少有100個9，則$\sqrt{\alpha}$的小數點後亦有100個9。

76. 在523……後填3個數字，而成爲一六位數，使得此數能同時被7 8，9整除。

77. 找出一四位數除以131 餘112，除以132餘98。

78. (a) 證明所有n位數之和（$n>2$）等於

$$4949\underbrace{9\cdots9}_{(n-3)\text{個}9}55\underbrace{00\cdots0}_{(n-2)\text{個}0}$$

（如所有3位數之和等於494,550，所有6位數之和等於494,999,550,000）

(b) 所有4位偶數之和爲何？（但這些四位偶數必須由1，2，3，4，5，0構成，可重覆。）

79. 將數字從1排到100,000,000間需要0到9之十個數字各幾個？

80. 從數字1順序排列形成一數（如，1234567891011121314……試問如此繼續排列第206,788位爲何？

81. 所有的整數按照次序排列0.1234567891011121314……排成無窮小數，試問此小數可能爲有理數嗎？（即此小數可否爲循環小數？）

82. 27個砝碼其重量分別爲$1^2, 2^2, 3^2, \cdots\cdots 27^2$如何將其分作3組使每組皆等重。

83. 由紙板剪成的正多邊形，中心點插根針以爲轉軸，若此多邊形旋轉$25\frac{1}{2}$度時恰又與原形重疊，試問此多邊形至少應爲幾邊？