萬有文庫

第一集一千種

王雲五 主編

自然哲學之數學原理

(六)

牛頓 著

鄭太朴 譯

商務印書館發行

自然哲學之數學原理

(六)

牛 頓 著

鄭太朴譯

[redacted]

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者

王雲五

商務印書館發行

目　次

第三册

第四册

第五册

第六册

第七册

第八册

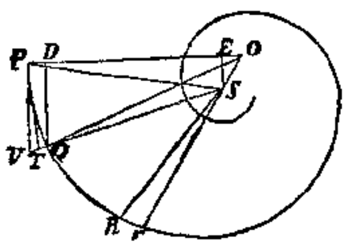
第九册

第十册

第四章　論物體在中介物內之循環運動

§ 20. 補題． 今設 $PQRr$ 爲一螺旋線，其與一切半徑 $SP, SQ, SR,$ 等等之交角均相等．試作 PT 直線，與曲線相切於 P 點，與 SQ 之引長相交於 T. 又作垂線 PO, QO 相交於 O, 並引 SO 線．如是，則 P 與 Q 相接近而至於相合時，PSO 角即成爲直角，而且最後，有

$$TQ\cdot 2PS=PQ^2.$$



第一六一圖

因

$$OPQ=OQR=90^\circ,$$

而

$$SPQ=SQR$$

故

$$\angle OPS=\angle OQS.$$

所以經過 O,S,P 三點的圓亦經過 Q 點.今如 P 與 Q 相合,則此圓即於相遇點與曲線相切,並與 OP 線垂直的相交.因此,OP 即為此圓之直徑,

而
$$OSP=90°.$$

今再作 QD, SE 垂於 OP 上,則諸線之最後比成為

$$TQ:PD=TS:PE=PS:PE=2PO:2PS,$$

又因
$$PD:PQ=PQ:2PO,$$

故經組合後

$$TQ:PQ=PQ:2PS,$$

或
$$PQ^2=TQ\cdot 2PS.$$

此即所欲證者.

§21. 定理. 設中介物各處之密度與該處距一不動的中心之距離成反比,向心力與密度之平方相比,則物體能在一螺旋線上運動,該線與一切由該中心出發的半徑,在一不變的角下相交.

今仍保存以上補題內的一切假定,將 SQ 引長至 V, 使

$$Sv = SP.$$

在相等的時間內，物體作成甚小的弧 PQ 與 QR. 由中介物之抵抗力所發生的弧之減小，或此項弧與同時間內在無抵抗的中介物中所作者之差，其相比如時間之平方相比（即產生此的時間）. 所 PQ 弧之減小，等於 PR 弧之減小之 $\frac{1}{4}$. 今設

$$PSQ = QSr,$$

則 PQ 之減小

$$= \tfrac{1}{2}Rr,$$

故抵抗力與向心力相比，如

$$\tfrac{1}{2}Rr : TQ \quad (1).$$

因 P 點之向心力與 SP^2 成反比，TQ 則爲其所產生，與該力及時間之平方相比(即，與產生 PQ 弧的時間之平方相比)，故 $TQ \cdot SP^2$ 與該項時間之平方相比，按 § 20，亦卽是 $\frac{1}{2}PQ^2 \cdot SP$ 與時間之平方相比. 所以時間與

$$PQ\sqrt{SP} \quad (2)$$

相比，而物體在時間內用以作成 PQ 弧的速度與

$$\frac{PQ}{PQ\sqrt{SP}}=\frac{1}{\sqrt{SP}} \quad (3)$$

相比,亦即是,與距離 SP 之平方根成反比.仿此,亦可知物體作成 QR 弧的速度,與 SQ 之平方根成反比.但 PQ 與 QR 相比,如產生此的速度相比,故有

$$PQ:QR=\frac{1}{\sqrt{SP}}:\frac{1}{\sqrt{SQ}}$$

$$=QS:\sqrt{SP\cdot SQ} \quad (4).$$

又因 $\angle SPQ=\angle SQr,$

而 面積 $PSQ=QSr,$

故亦 $PQ:QR=QS:SP \quad (5).$

將(4)與(5)組合後,即得

$$PQ:Qr-QR=QS:PS-\sqrt{PS\cdot QS},$$

或 $PQ:Rr=QS:\frac{1}{2}VQ \quad (6),$

蓋當 P 與 Q 相合時,

$$SP-\sqrt{SP\cdot SQ}:\tfrac{1}{2}QV$$

成爲一相等的比.因中介物之抵抗力所產生的 PQ 之減小,即,$\frac{1}{2}Rr$ 與抵抗力及時間之平方相

比,故抵抗力與

$$\frac{Rr}{PQ^2\cdot SP}$$

相比.按(6),可知

$$\frac{Rr}{PQ^2\cdot SP} \text{ 與 } \frac{\frac{1}{2}VQ}{SQ\cdot PQ\cdot SP}=\frac{\frac{1}{2}OS}{OP\cdot SP^2} \text{ 相比} \quad (7).$$

倘 P 與 Q 相合,則

$$SP=SQ,$$

$$\angle PVQ=90^\circ$$

又因　$\triangle PVQ\sim\triangle PSO,$

故　$PQ:\frac{1}{2}VQ=OP:\frac{1}{2}OS$　(8).

從可知 $\frac{OS}{OP\cdot PS^2}$ 與抵抗力相比,而抵抗力則亦與 P 處中介物之密度及速度之平方相比.今如由(7)內之式上取去 $\frac{1}{SP}$, 則即可知 P 點之中介物密度與

$$\frac{OS}{OP\cdot SP} \quad (9)$$

相比.倘螺旋線爲已知,則即可求

$$OS:OP,$$

而 P 點之密度與

$$\frac{1}{SP} \quad (10)$$

相比.所以中介物之密度如與 SP 成反比,則物體即可在螺旋曲線上運動.此即所欲證者.

系 1. 任何處 P 之速度,恆為物體於無抵抗的中介物內在圓上運動時所能有的速度;此圓之半徑為 SP,其向心力亦同前.

系 2. 倘距離 SP 為已知,則中介物之密度與

$$\frac{OS}{OP}$$

相比.設距離為未知,則密度與

$$\frac{OS}{OP\text{-}PS}$$

相比.

由此可知螺旋線於任何密度均可適應.

系 3. 任何處 P 之抵抗力與該處之向心力相比,如 $\frac{1}{2}OS : OP$.

蓋該項力與

$$\tfrac{1}{2}Rr = \frac{\tfrac{1}{2}VQ \cdot PQ}{QS} \text{ 及 } TQ = \frac{\tfrac{1}{2}PQ^2}{PS}$$

相比，所以其相比，如(設 $QS=PS$)

$$\tfrac{1}{2}VQ : PQ \text{ 或如 } \tfrac{1}{2}OS : OP.$$

故如螺旋線爲已知，則抵抗力與向心力之力亦卽可知；反之，由已知的抵抗力與向心力之比，亦可求得螺旋線。

系 4. 所以，祇當抵抗力小於向心力之半時，物體乃能在螺旋線上運動。倘抵抗力等於向心力之半，則螺旋線與直線相合，卽與 PS 相合，物體於其上向中心運動，其速度與一其他(物體在無抵抗的中介物內於拋物線上運動時所有的)速度相比，如

$$1:\sqrt{2}.$$

所以下降的時間與速度成反比，因而爲不變的。

系 5. 因離心相等的距離內，螺旋線及直線 SP 上之速度相等，又因螺旋之長與直線之長相比，其數恆爲

$$OP : OS,$$

故螺旋線上下降與直線上下降之時間相比，其數亦爲常數，所以前者爲常數。

系 6. 倘以 S 爲中心，以二已知的半徑作圓，螺

旋線與 PS 半徑所作的角可任意改變，則物體在二圓間所可經過的環繞數，其比如

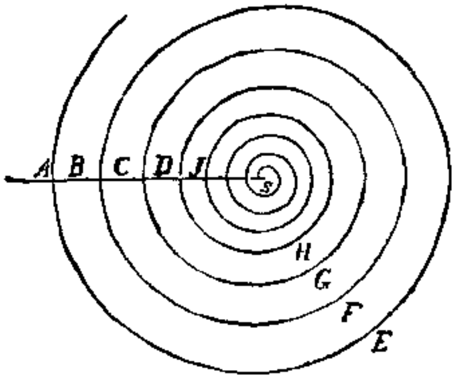
$$PS : OS,$$

或與角之正切相比，此角亦即爲螺旋線與 PS 半徑所作者．但環繞的時間，則其比如

$$OP : OS,$$

即是，與該角之正割相比，或與中介物之密度成爲反比．

系 7. 一物體在一中介物內於一任意的曲線 AEB 上繞一中心運動，其與 AS 半徑在 B 處之交



第一六二圖

角等於 A 處之交角，中介物之密度則與離心之距離成反比．B 點之速度與 A 點者相比，如

$$\sqrt{AS} : \sqrt{BS}.$$

如是則物體不斷的經過無數環繞 BFC, CGD 等等，其在 AS 半徑上所割之段，

$$AS,\ BS,\ CS,\ DS,\ \text{等等},$$

成爲一連比．其環繞時間與軌道之周

$$AEB,\ BFC,\ CGD\ \text{等等},$$

成爲正比，與各開始點

$$A,\ B,\ C,\ \text{等等}$$

之速度成反比，即，與

$$AS^{\frac{3}{2}},\ BS^{\frac{3}{2}},\ CS^{\frac{3}{2}},\ \text{等等}$$

成反比．又，物體達到中心所須的時間與第一環繞之時間相比，如

$$AS^{\frac{3}{2}}+BS^{\frac{3}{2}}+CS^{\frac{3}{2}}+\cdots\cdots : AS^{\frac{3}{2}},$$

即是，如

$$AS^{\frac{3}{2}} : AS^{\frac{3}{2}}-BS^{\frac{3}{2}},$$

或，很相近的如