21世纪高职高专规划教材——应用数学系列

应用高等数学

YINGYONG GAODENG SHUXUE

主 编　那顺布和　林娇燕
主 审　黄伟祥

湖南师范大学出版社

高等院校教育

教材研究与编审委员会

前　　言

为适应新的职业教育人才培养要求，各高职高专院校都加强了专业课程的教学，强化了对学生技能的培养，原来的文化基础课程教学体系面临调整。根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，我们在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来一些高职高专院校在文化基础课程教学改革方面的成功经验，组织编写了这本《应用高等数学》教材。

该教材力求体现高等职业教育要“以就业为导向”、“以培养技能型人才为目标”，以及“理论教学要以应用为目的，以‘必需、够用’为原则”的要求，加强基本概念的教学，淡化数学技巧的训练，删去不必要的逻辑推导，突出应用能力的培养，难易程度更加适合现在的生源状况；在充分考虑数学课程的工具功能的前提下，注重发挥其文化功能的作用，既为高职学生学习专业课程服务，又为学生的可持续发展打下良好的基础。本教材具有以下几个方面的特点：

1. 针对性强。教材从高职学生的实际出发，注意高等数学与初等数学的衔接，遵循理论与实际相结合的原则，按照“特殊——一般—特殊”的认识规律，尽可能借助客观实例及几何直观图形来阐述数学基本概念和定理，力求使抽象的数学概念形象化，复杂的论证过程简明化，便于高职学生理解和掌握。

2. 注重数学应用能力培养。为了提高学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力，在编写过程中，我们加强了数学知识在工程技术及经济管理等方面的应用，增加了有实际应用背景的例题和习题，力图体现高职教育实践性、应用性强的特点。

3. 体现以人为本的教育理念。编写教材时，我们根据教学的基本要求，按照“服务专业，够用为度”的原则确定教材基本内容，在每章篇首都列出了该章学习目标，章末给出内容小结，有的章节适当增加了阅读材料，既为教师提供教学参考，又可方便学生自学。

4. 例题、习题数量充足。在编写过程中，我们列举了大量的典型例题，例题解答思路清晰，过程简明扼要，有利于学生开拓思路；习题题型丰富，难易比例适当，以满足不同层次学生学习的需要。

全书由广东水利水电职业技术学院老师完成编写工作，本书第 1、2、3、4 章由那顺

布和编写，第 5、6、7、8 章由林娇燕编写，第 9 章由王玲编写，第 10 章由邓小红编写，第 11 章由关占荣编写。全书由黄伟祥主审。

限于编者水平，错漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善。

编　者

2011 年 6 月

目　　录

第1章　极限与连续

学习目标

了解函数、函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性的概念；左、右极限的概念；无穷小、无穷大的概念；闭区间上连续函数的性质.

理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念；需求函数与供给函数的概念；函数极限的定义；无穷小的性质；函数在一点连续的概念；初等函数的连续性.

掌握复合函数的复合与分解；极限四则运算法则.

会用函数关系描述经济问题；对无穷小进行比较；用两个重要极限求极限；判断间断点的类型；求连续函数和分段函数的极限.

函数是描述事物变化过程中变量相依关系的数学模型，是数学的基本概念之一. 高等数学就是以函数为主要研究对象的一门数学课程. 极限是研究高等数学的一个重要工具. 连续则是函数的一个重要性质，连续函数是高等数学研究的主要对象.

本章在总结中学已有函数知识的基础上，进一步阐述函数的概念，介绍高等数学最基本的概念——极限，进而研究无穷大量与无穷小量的概念和性质、极限的运算法则、函数连续性的基本知识，为后继知识的学习奠定坚实的基础.

1.1　函数

1.1.1　函数的概念与重要性质

1. 函数的概念

在研究自然的、社会的以及工程技术的某个过程中，经常会遇到各种不同的量. 例如时间、速度、质量、温度、成本和利润等. 这些量一般可以分为两类. 其中一类在所研究的过程中保持不变，这样的量称为常量，而另一类在所研究的过程中是变化的，这样的量称为变量.

在同一过程中，往往会有几个变量同时变化，但是它们的变化不是孤立的，而是按照一定的规律相互联系着，也就是说它们之间存在着相互依赖关系. 例如

例 1.1.1　自由落体的规律为

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

式中 h 表示下降的距离，t 表示下落的时间，g 表示重力加速度(视为常量).

这个公式给出了在物体自由降落的过程中，距离 h 与时间 t 之间的依赖关系. 而这种变量之间的相互依赖关系，用数学的语言描述出来就得到了函数的定义.

定义 1.1 设 D 为非空实数集.如果按照某种对应法则(或关系)f,对于任意 $x \in D$,都有惟一的一个实数 y 与之对应,则称 y 是定义在 D 上的 x 的函数,记作 $y = f(x)$.

称 x 为自变量,其变化范围 D 为函数的定义域,通常记作 $D(f)$.称 y 为因变量或函数,当自变量 x 取遍 D 上每一个值,而相应地 $y = f(x)$ 的变化范围称为函数的值域,通常记作 $R(f)$.

如果 x_0 是一个确定的数,则 $f(x_0)$ 表示自变量 $x = x_0$ 时的函数值,也可记作 $y(x_0)$ 或者 $y|_{x=x_0}$.

例 1.1.2 研究 $y = x$ 与 $y = \dfrac{x^2}{x}$ 是否为同一函数.

解 $y = x$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$,而 $y = \dfrac{x^2}{x}$ 的定义域是$(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.因此,虽然这两个函数在$(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ 的值是相同的,但由于它们的定义域不同,因而它们不是同一函数.

例 1.1.3 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{\ln(x-1)}$　　(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}} + \arcsin(\dfrac{x}{2} - 1)$

解 (1) 要使函数 y 有意义,当且仅当 $\ln(x-1) \geqslant 0$,要使 $\ln(x-1) \geqslant 0$,当且仅当 $x-1 \geqslant 1$,所以函数的定义域是$[2,+\infty)$.

也可以用集合的一般形式表示为 $D = \{x \mid x \geqslant 2)\}$.

(2) 要使函数 y 有意义,必须同时满足:分母不为零且偶次根式的被开方式非负,反正弦函数符号内的式子绝对值小于或等于 1. 即

$$\begin{cases} 3 - x^2 > 0 \\ \left|\dfrac{x}{2} - 1\right| \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ 0 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

故不等式组的解为 $0 \leqslant x < \sqrt{3}$.

因此,该函数的定义域为$[0,\sqrt{3})$.

也可以表示为 $D = \{x \mid 0 \leqslant x < \sqrt{3}\}$.

例 1.1.4 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域是$[2,5]$,求函数 $f(2x+1)$ 的定义域.

解 要使函数 $f(2x+1)$ 有意义,当且仅当 $2 \leqslant 2x+1 \leqslant 5$,所以$\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$,即 $f(2x+1)$ 的定义域为$[\dfrac{1}{2},2]$.

例 1.1.5 设函数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$,求 $f(2)$、$f(a)$、$f(x+1)$.

解 $f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 3 = 3$,

$f(a) = a^2 - 2a + 3$,

$f(x+1) = (x+1)^2 - 2(x+1) + 3 = x^2 + 2$.

由函数的定义可知,对应法则和定义域是函数的两个要素,在描述任何一个函数时,必须同时说明这两个要素.只有两个函数的对应法则和定义域都相同时我们才能说这两个函数是相同的函数.

函数的定义域,一般是使得函数有意义的自变量的取值范围,为此求函数的定义域时应遵守以下原则:

以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

(4) 因为 $f(-x)=4(-x)+\cos(-x)=-4x+\cos x$,从而

$$f(-x)\neq f(x) \text{ 且 } f(-x)\neq -f(x)$$

所以函数 $f(x)=4x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(4) 周期性

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 其定义域是$(-\infty,+\infty)$,如果存在一个常数 $T\neq 0$ 使得对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数. 当 $f(x)$ 以 T 为周期时,对于任意的整数 m,mT 都是 $f(x)$ 的一个周期. 而我们所说的周期一般是指最小正周期.

例如,函数 $\sin x$、$\cos x$ 的最小正周期都是 2π,函数 $\tan x$、$\cot x$ 的最小正周期都是 π.

关于函数的以上四个性质,需要说明的是:函数的有界性和单调性是函数在某个区间上的性质,而奇偶性和周期性则是函数在整个定义域上的性质.

3. 复合函数

球的体积 V 是其半径 r 的函数:$V=\frac{4}{3}\pi r^3$. 由于热胀冷缩,球的半径又随着温度 T 变化,假定 r 随 T 变化的规律是 $r=r_0(1+0.01T)$,其中 r_0 为常数. 将 $r=r_0(1+0.01T)$ 代入 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$,就得到 V 对 T 的函数 $V=\frac{4}{3}\pi[r_0(1+0.01T)]^3$.

将一个函数代入另一个函数而得到的新函数称为由这两个函数构成的复合函数.

定义 1.6 设函数 $y=f(u)$,而 $u=\varphi(x)$,且函数 $\varphi(x)$ 的值域与函数 $f(u)$ 的定义域交集非空,那么 y 通过 u 的联系成为 x 的函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$,称其为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数,其中 u 叫做中间变量.

注意以下几点:

① 不是任何两个函数都可以构成复合函数.

② 复合函数不仅可以有一个中间变量,也可以有多个中间变量.

③ 复合函数不仅可以由基本初等函数构成,而更多的是由简单函数(由基本初等函数通过有限次的四则运算得到)构成.

例 1.1.7 函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=2^x-1$ 能否构成复合函数?

解 $y=\arcsin u$ 的定义域为$[-1,1]$,$u=2^x-1$ 的值域为$(-1,+\infty)$,显然$[-1,1]\cap(-1,+\infty)\neq\phi$,所以 $y=\arcsin u$ 和 $u=2^x-1$ 能构成复合函数,且该复合函数为 $y=\arcsin(2^x-1)$.

例 1.1.8 将下列复合函数分解成基本初等函数或简单函数.

(1) $y=\sin^2(x^2+1)$　　(2) $y=\ln(\tan e^{x^2+2\sin x})$

解 (1) $y=\sin^2(x^2+1)$ 是由 $y=u^2$、$u=\sin v$ 和 $v=x^2+1$ 复合而成,所以分解得 $y=u^2$,$u=\sin v$,$v=x^2+1$.

(2) $y=\ln(\tan e^{x^2+2\sin x})$ 是由 $y=\ln u$,$u=\tan v$,$v=e^w$ 和 $w=x^2+2\sin x$ 复合而成,所以分解得 $y=\ln u$,$u=\tan v$,$v=e^w$,$w=x^2+2\sin x$.

通常情况下,构成复合函数是由内到外,函数套函数;分解复合函数,是采取由外到内利用中间变量层层分解.

(1) 代数式中分母不能为零；

(2) 偶次根式内被开方数非负；

(3) 对数中真数表达式大于零；

(4) 反三角函数特殊记. 例如 $\arcsin x$, $\arccos x$，要满足 $|x| \leqslant 1$；

(5) 多个函数代数和的定义域，应是各函数定义域的公共部分；

(6) 对于表示实际问题的解析式，还应该保证符合实际意义.

2. 函数的一些重要性质

(1) 有界性

定义 1.2　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在常数 $M > 0$，使得对于任意的 $x \in D$，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，或者称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数.

例如，函数 $\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界函数，函数 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上是有界函数. 但是函数 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是无界函数. 因此，有界性是针对于某一区间而言的.

(2) 单调性

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 是定义在集合 D 上的函数，如果对于任意的 $x_1, x_2 \in D$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上为单调增加函数；当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上为单调减少函数.

单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数. 如果 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的单调函数，则把区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调区间. 例如，函数 $y = e^x$ 的单调增加区间是 $(-\infty, +\infty)$，其单调减少区间是 $(-\infty, 0)$.

单调函数的图像特征：单调增加函数其图像表现为自左至右是单调上升的曲线；单调减少函数其图像表现为自左至右是单调下降的曲线.

(3) 奇偶性

定义 1.4　设函数 $f(x)$ 是定义在集合 D（D 是关于原点对称的非空集合）上的函数. 如果对于任意的 $x \in D$ 都有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数；如果对于任意的 $x \in D$ 都有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数.

通常见到的偶函数和奇函数它们的定义域是关于原点对称的区间.

例如，$\sin x$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数，$\cos x$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数.

既不是奇函数也不是偶函数的函数，称为非奇非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

例 1.1.6　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x) = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2}$　　　　(2) $f(x) = x \cdot \sin x$

(3) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$　　　　(4) $f(x) = 4x + \cos x$

解　(1) 因为 $f(-x) = \dfrac{2^{-x} + 2^x}{2} = f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x) = -x \cdot (-\sin x) = x \cdot \sin x = f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数.

(3) 因为 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1})$，$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$，

$f(-x) + f(x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1}) = 0$，即 $f(-x) = -f(x)$，所

4. 分段函数

分段函数的特点是，函数的定义域分成几部分，每一部分，函数有不同的表达式.

例 1.1.9　符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases},$$

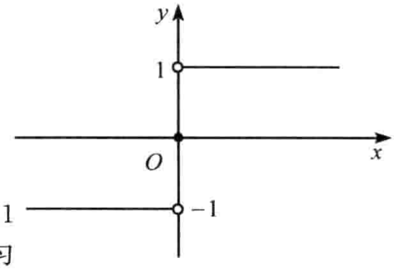

图 1.1

符号函数的图形如图 1.1 所示.

例 1.1.10　汽车在笔直的公路上行驶 10 小时，首先用 1 小时作匀加速运动，使得汽车的速度由零加速到 $50\text{km}/h$，匀速行驶 8 小时后，再用 1 小时作匀减速运动将速度减至零. 试将汽车行驶的路程表示为时间的函数.

解　设路程函数为 $S(t)$，则

$$S(t) = \begin{cases} 25t^2, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 25 + 50(t-1), & 1 < t \leqslant 9 \\ 425 + 50(t-9) - 25(t-9)^2, & 9 < t \leqslant 10 \end{cases}$$

$S(t)$ 为定义在闭区间 $[0,10]$ 上的分段函数.

5. 经济中的几个常用函数

在用数学方法解决经济当中的实际问题时，往往需要找出经济变量之间的函数关系，建立数学模型.

下面介绍几种常用的经济函数

(一) 需求函数与供给函数

(1) 需求函数

一种商品的市场需求量 Q 与该商品的价格 p 密切相关. 通常降低价格使需求量增加；提高商品价格会使需求量减少. 如果不考虑其它因素的影响，需求量 Q 可以看作是价格 p 的一元函数，称为需求函数，记作

$$Q = Q(p)$$

一般来说，需求函数是价格 p 的单调减少函数.

根据市场的统计资料，常见的需求函数有以下几种类型：

① 线性需求函数 $Q = a - bp$　　$(a > 0, b > 0)$；

② 二次需求函数 $Q = a - bp - cp^2$　　$(a > 0, b > 0, c > 0)$；

③ 指数需求函数 $Q = ae^{-bp}$　　$(a > 0, b > 0)$.

需求函数 $Q = Q(p)$ 的反函数，就是价格函数，记作 $P = P(q)$，也反映商品的需求与价格的关系.

(2) 供给函数

某种商品的市场供给量 S 也受商品价格 p 的制约，价格上涨将刺激生产者向市场提供更多的商品，使供给量增加；反之，价格下跌将使供给量减少. 供给量 S 也可以看作是商品价格 p 的一元函数. 称为供给函数；记为

$$S = S(p).$$

供给函数为价格 p 的单调增加函数.

常见的供给函数有线性函数，二次函数，幂函数，指数函数等. 其中，线性供给函数为

$$S=-c+dp \qquad (c>0,d>0).$$

使某种商品的市场需求量与供给量相等的价格 p_0 称为均衡价格. 当市场价格 p 高于平衡价格 p_0 时，供给量将增加而需求量相应地减少，这时产生的"供大于求"的现象必然使价格 p 下降；当市场价格 p 低于均衡价格 p_0 时，供给量将减少而需求量增加，这时会产生"物资短缺"现象，从而又使得价格 p 上升. 市场价格的调节就是这样实现的.

例 1.1.11 当鸡蛋的收购价格为每 kg4.5 元时，某收购站每月能收购 5000kg. 若收购价每 kg 提高 0.1 元，则收购量可增加 400kg，求鸡蛋的线性供给函数.

解 设鸡蛋的线性供给函数为

$$S=-c+dp \qquad (c>0,d>0).$$

由题意有

$$\begin{cases}5000=-c+4.5d\\5400=-c+4.6d\end{cases}.$$

解得 $d=4000, c=13000$，所求供给函数为

$$S=-13000+4000P.$$

例 1.1.12 已知某商品的需求函数和供给函数分别为

$$Q=14.5-1.5p, S=-7.5+4p.$$

求该商品的均衡价格 p_0.

解 由供需均衡条件 $Q=S$，可得

$$14.5-1.5p=-7.5+4p,$$

因此，均衡价格为 $p_0=4$.

（二）总成本函数、收入函数和利润函数

在生产和产品的经营活动中，人们总希望尽可能降低成本，提高收入和利润. 而成本、收入和利润这些经济变量都与产品的产量和销售量 q 密切相关，它们都可以看作 q 的函数，分别称为总成本函数，记为 $C(q)$；收入函数，记为 $R(q)$；利润函数，记为 $L(q)$.

总成本函数由固定成本 C_1 和可变成本 $C_2(q)$ 两部分组成，固定成本与产量 q 无关，如设备维修费、企业管理费等；可变成本随产量 q 的增加而增加，如原材料费、动力费等. 即

$$C(q)=C_1+C_2(q).$$

总成本函数 $C(q)$ 是 q 的单调增加函数. 最典型的成本函数是三次函数

$$C=a_0+a_1q-a_2q^2+a_3q^3 \qquad (a_i>0, i=0,1,2,3)$$

但有时为了使问题简化，也常采用线性成本函数 $C=a+bq(a>0,b>0)$ 及二次成本函数 $C(q)=a+bq+cq^2(a=c_1)$.

只给出总成本不能说明企业生产的好坏，为了评价企业的生产状况，需要计算产品的平均成本，即生产 q 件产品时，单位产品成本平均值，记为$\overline{C}$，则

$$\overline{C}=\frac{C(q)}{q}=\frac{C_1}{q}+\frac{C_2(q)}{q},$$

其中$\dfrac{C_2(q)}{q}$ 称为平均可变成本.

如果产品的单位售价为 p，销量为 q，则总收入函数为 $R(q)=pq$. 总利润等于总收入与总成本的差，于是总利润函数为 $L(q)=R(q)-C(q)$.

例 1.1.13　已知某种产品的总成本函数为 $C = 2000 + \frac{q^2}{8}$，求当生产 200 个该产品时的总成本和平均成本.

解　由题意，产量为 200 个时的总成本为

$$C(200) = 2000 + \frac{200^2}{8} = 7000.$$

产量为 200 个时的平均成本为

$$\overline{C}(200) = \frac{2000 + \frac{200^2}{8}}{200} = 35.$$

1.1.2　初等函数

1. 基本初等函数

在大量的函数关系中，有几种函数是最常见的，最基本的，它们是常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数. 这几类函数称为基本初等函数.

(1) 常数函数 $y = c$

它的定义域是$(-\infty, +\infty)$，由于无论 x 取何值，都有 $y = c$. 所以，它的图像是过点$(0, c)$平行于 x 轴的一条的直线，如图 1.2 所示，它是偶函数.

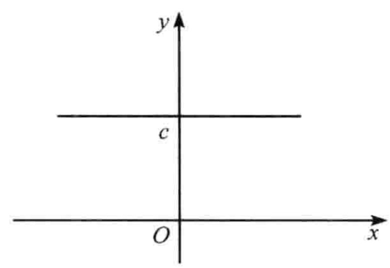

图 1.2

(2) 幂函数 $y = x^a$（a 为实数）

幂函数的情况比较复杂，我们分 $a > 0$ 和 $a < 0$ 来讨论. 当 a 取不同值时，幂函数的定义域不同，为了便于比较，我们只讨论 $x \geqslant 0$ 的情形，而 $x < 0$ 时的图像可以根据函数的奇偶性确定.

当 $a > 0$ 时，函数的图像过原点$(0,0)$ 和点$(1,1)$，在$(0, +\infty)$ 内单调增加且无界，如图 1.3 所示.

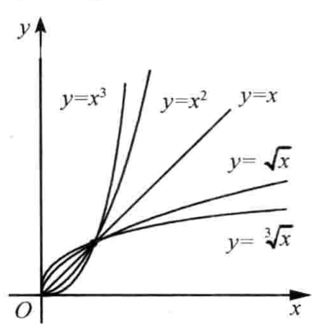

图 1.3

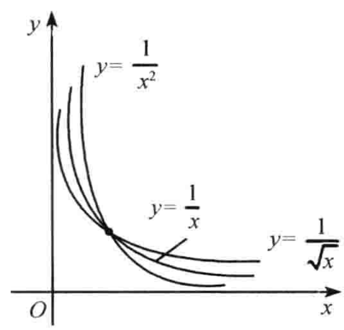

图 1.4

当 $a < 0$ 时，图像不过原点，但仍过点$(1,1)$，在$(0, +\infty)$ 内单调减少、无界，曲线以 x 轴和 y 轴为渐近线，如图 1.4 所示.

(3) 指数函数 $y = a^x$（$a > 0, a \neq 1$）

它的定义域是$(-\infty, +\infty)$. 由于无论 x 取何值，总有 $a^x > 0$，且 $a^0 = 1$，所以它的图像全部在 x 轴上方，且通过点$(0,1)$. 也就是说，它的值域是$(0, +\infty)$.

当 $a>1$ 时,函数单调增加且无界,曲线以 x 轴的负半轴为渐近线;

当 $0<a<1$ 时,函数单调减少且无界,曲线以 x 轴的正半轴为渐近线. 如图 1.5 所示.

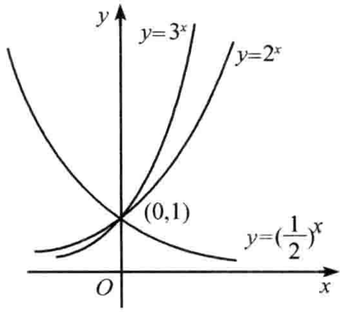

图 1.5

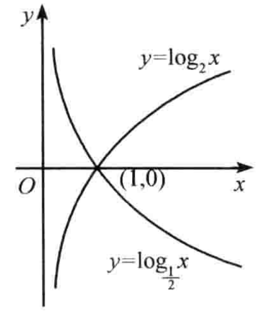

图 1.6

(4) 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$

它的定义域是$(0,+\infty)$,图像全部在 y 轴右方,值域是$(-\infty,+\infty)$. 无论 a 取何值,曲线都通过点$(1,0)$.

当 $a>1$ 时,函数单调增加且无界,曲线以 y 轴负半轴为渐近线;

当 $0<a<1$ 时,函数单调减少且无界,曲线以 y 轴的正半轴为渐近线. 如图 1.6 所示对数函数 $y=\log_a x$ 和指数函数 $y=a^x$ 互为反函数,它们的图像关于 $y=x$ 对称.

以无理数 $e=2.7182818\cdots$ 为底的对数函数 $y=\log_e x$ 叫做自然对数函数,简记作 $y=\ln x$,是微积分中常用的函数.

(5) 三角函数

三角函数包括下面六个函数:正弦函数 $y=\sin x$,余弦函数 $y=\cos x$,正切函数 $y=\tan x$,余切函数 $y=\cot x$,正割函数 $y=\sec x$,余割函数 $y=\csc x$.

注 ① 在微积分中,三角函数的自变量 x 采用弧度制,而不用角度制. 例如我们用 $\sin\frac{\pi}{6}$ 而不用 $\sin 30^\circ$. $\sin 1$ 表示 1 弧度角的正弦值.

② 角度与弧度之间可以用公式 π 弧度 $=180^\circ$ 来换算.

函数 $y=\sin x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,奇函数,以 2π 为周期,有界,如图 1.7 所示.

函数 $y=\cos x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,偶函数,以 2π 为周期,有界,如图 1.8 所示.

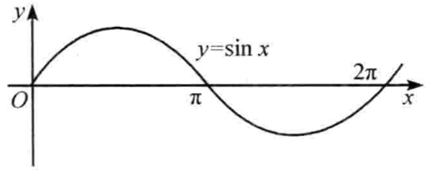

图 1.7

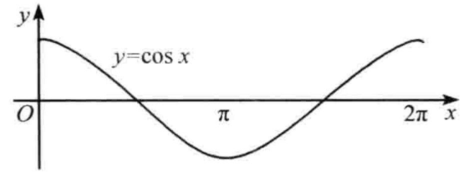

图 1.8

函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$,值域为$(-\infty,+\infty)$,奇函数,以 π 为周期,在每一个周期内单调增加,以直线 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为渐

近线. 如图 1.9 所示.

函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $x \neq k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，奇函数，以 π 为周期，在每一个周期内单调减少，以直线 $x=k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为渐近线. 如图 1.10 所示.

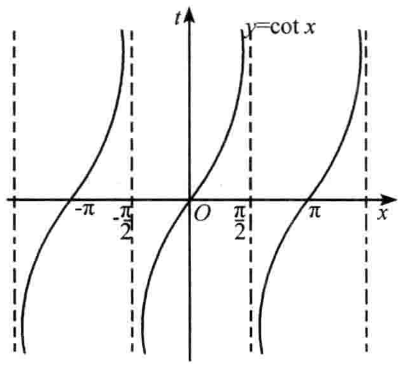

图 1.9

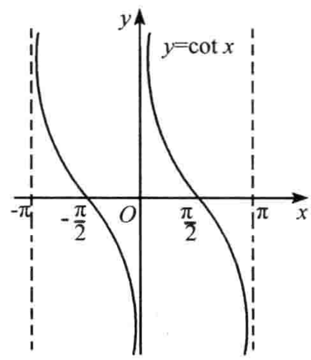

图 1.10

关于函数 $y=\sec x$ 和 $y=\csc x$ 我们不作详细讨论，只需知道它们分别为 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 和 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

(6) 反三角函数

常用的反三角函数有四个：反正弦函数 $y=\arcsin x$，反余弦函数 $y=\arccos x$，反正切函数 $y=\arctan x$，反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$. 它们是相应三角函数的反函数.

$y=\arcsin x$，定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，是单调增加的奇函数，有界，如图 1.11 所示.

$y=\arccos x$，定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,\pi]$，是单调减少的函数，有界，如图 1.12 所示.

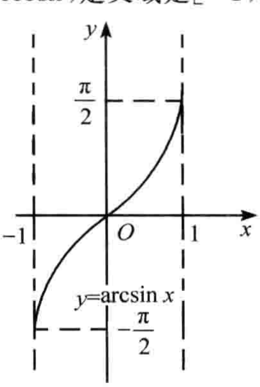

图 1.11

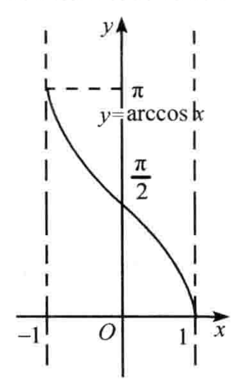

图 1.12

$y=\arctan x$，定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，它是单调增加的奇函数，在定义域上有界，如图 1.13 所示.

$y=\operatorname{arccot} x$，定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(0,\pi)$，它是单调减少的函数，在定义域上有

界,如图 1.14 所示.

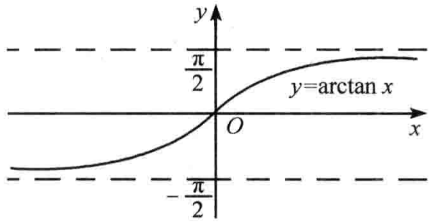

图 1.13

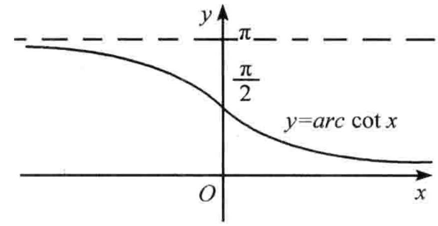

图 1.14

这些函数的图像、性质在中学里已经学过,后续内容中会经常用到,请同学们课后认真复习.

2. 初等函数

基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合所得到的函数称为初等函数. 初等函数在其定义域内有一个表达式.

例如 $y=2^{x^2+1}+5(\ln x)^4$, $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sqrt{\cot\frac{x}{3}}$ 等都是初等函数,在本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

我们前面讲到的分段函数是非初等函数.

习题 1.1

1. 下列各组函数,哪些是同一函数,哪些不是?

(1) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$　　(2) $y=x$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$

(3) $y=x-1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$　　(4) $y=2\ln x$ 与 $y=\ln x^2$

2. 指出下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{3x+4}$　　(2) $f(x)=\ln\dfrac{1}{1-x}$

(3) $f(x)=\sqrt{\ln(x^2-1)}$　　(4) $f(x)=\arcsin(\ln x)$

(5) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[-4,4]$,求 $f(x^2)$ 的定义域.

(6) 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0,3a]$,求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域.

3. 判别下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x+\sin x$　　(2) $f(x)=x\cdot\cos x$

(3) $f(x)=x^2-x$　　(4) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$

(5) $f(x)=\cos(\sin x)$　　(6) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

(7) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$　　(8) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}$

4. 下列函数哪些在其定义域内是单调的.