一九八七年

高等代数研究生题解

第八册

杨守昌　李正龙　胡舒合编

安徽大学数学系函授组

一九八七年五月

一九八七年

高等代数研究生题解

第八册（函授教材）

杨守昌　李正龙　胡舒合编

安徽大学数学系函授组

一九八七年五月

前 言

经过半年多的努力，1987年《数学分析研究生题解》（即函授教材第七册）与《高等代数研究生题解》（即函授教材第八册）终于与读者见面了。在收集试题和题解的过程中，得到了各兄弟院校研究生招生办公室及各校数学系同志的热情支持，有的试题甚至是请考生在考场上抄录下来的。在收集和编写试题解答时，还得到了我系部分同志的支持。在此，对他们一并表示衷心感谢。由于某些原因，一些学校的试题或解答未能收入本书，特请这些学校予以谅解。

我们在编写解答时，对少数简单计算题写法编简，考生在正式考试时，应多写一些中间步骤才能使答案完整。

由于编写时间仓促，书中一定存在不少缺点和错误，恳请广大读者批评指正。

这套函授教材各册书均保证供应。各册定价是：第一册，《一元微积分》,551题解,1.50元；第二册，《级数与多元微积分》,370题解,1.50元；第三册，《微分方程》,390题解,1.10元；第四册，《线性代数》，447题解，1.10元；第五、六册，1985年和1986年非数学专业用110套《高等数学研究生题解》，3.00元；第七册，1987年高等院校《数学分析研究生题解》,3.00元；第八册，1987年高等院校《高等代数研究生题解》，3.00元；还有为复旦大学编教本《概率论》习题编写的《概率论题解》，1.80元。以上定价中均含挂号寄书邮费。购书来款请寄“安徽大学数学系函授组（合肥市）”，并请在汇款单附言栏注明购各册书的册数，不要另来函说明，以免核对之繁。

目　录

以下是各校数学分析试题

1　中国科学院数学研究所

一、(16分)试求出所有适合下式的非零复多项式$f(x)$：

$$f(f(x)) = [f(x)]^n,\ n\text{是正整数}.$$

解、(1)若$\partial(f(x))=0$，则$f(x)=C$，其中 $C\neq 0$ 为常数。则由$f(f(x)) = [f(x)]^n$得 $f(f(x))=C^n=C$，于是$C^n=C$，即$C^{n-1}=1$。其解为$n-1$次单位根：

$$C_k=\cos\frac{2k}{n-1}\pi+i\sin\frac{2k}{n-1}\pi,\ k=0,1,\cdots,n-2.$$

(2)若 $\partial(f(x))\geqslant 1$，设$f(x)$为$m$次多项式。比较题设方程两端首项次数得$mn=n^2$，$m=n$，即$f(x)$为$n$次多项式。设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n.$$

把$f(x)$代入题设方程两端，得

$$(a_0-1)[f(x)]^n+a_1[f(x)]^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

逐一从高到低比较各项系数得$a_0=1$，$a_1=\cdots=a_n=0$，所以$f(x)=x^n$。

二、(16分)设A，B为$n\times n$矩阵，则AB与BA有相同的特征根。

证：设

$$f(\lambda)=|\lambda E-AB|=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_k\lambda^{n-k},\ C_0=1$$

$$g(\lambda)=|\lambda E-BA|=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_k'\lambda^{n-k},C_1'=1.$$

则由特征多项式的系数与矩阵主子式之间的关系可得：

$C_k(k=1,2,\cdots,n)$为AB的k阶主子式之和，

$C_k'(k=1,2,\cdots,n)$为BA的k阶主子式之和．

但由于AB与BA的k阶主子式之和C_k与C_k'相等，即

$C_k=C_k'(k=1,2,\cdots,n)$，即有$f(\lambda)=g(\lambda)$，所以AB与BA有相同的特征多项式。

三、（17分）设$A=(a_{ij})$为$n\times n$矩阵，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{j-1}\binom{j-1}{i-1}, & i<j,\\ (-1)^{j-1}, & i=j,\\ 0, & i>j,\end{cases}\quad \binom{j-1}{i-1}\text{为组合数。}$$

求证：$A^2=I$（单位矩阵）．

证．令$A^2=B=(b_{ij})$．当$i>j$时$b_{ij}=0$显然。

当$i=j$时$b_{ii}=1$亦显然。当$i+1<j+1$时，

$$b_{i+1,j+1}=\sum_{k=i}^{j}(-1)^{i}\binom{k}{i}(-1)^{j}\binom{j}{k}$$

$$=\sum_{k=i}^{j}(-1)^{i-j}\binom{j}{k}\binom{k}{i}. \qquad (1)$$

而 $$\binom{j}{k}\binom{k}{i}=\frac{j!}{k!(j-k)!}\quad\frac{k!}{i!(k-i)!}$$

$$=\frac{j!}{i!(j-i)!}\quad\frac{(j-i)!}{(k-i)!(j-k)!}=\binom{j}{i}\binom{j-i}{k-i}$$

以此值代入（1）式得

$$b_{i+1,\,j+1}=\sum_{k=i}^{j}(-1)^{k+j}\binom{j}{i}\binom{j-i}{k-i}\ (\text{令}k-i=s)$$

$$=(-1)^{j+i}\binom{j}{i}\sum_{s=0}^{j-i}(-1)^{s}\binom{j-i}{s}$$

$$=(-1)^{j+i}(1-1)^{j-i}=0$$

四、（17分）设 A、B为$m\times n$ 阶有理系数矩阵，若存在复可逆矩阵P，使$PAP^{-1}=B$，则存在有理系数可逆矩阵Q，使得$QAQ^{-1}=B$。

证。设$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，$P=(p_{ij})$，$X=(x_{ij})$，且$P^{-1}AP=B$。考虑方程，$AX=XB$，即

$$\sum_k a_{ik}x_{kj}=\sum_k x_{ik}b_{kj}\ (i,j=1,2,\cdots,n)。\qquad (1)$$

令$\lambda_k=x_{ij}$，其中$k=(i-1)n+j$，则（1）式化成下面一般形式：

$$\sum_{k=1}^{n^2}C_{ik}\lambda_k=0\ (i=1,2,\cdots,n^2)，\qquad (2)$$

其中C_{ik}是用λ_k代换（1）式中的x_{ij}以后对应第j个方程 λ_k的系数。因此（1）与（2）是等价的，且由a_{ij}，$b_{ij}\in Q$可得$C_{ij}\in Q$。

因为（1）式中当$x_{ij}=p_{ij}$时方程成立，亦即齐线性方程组（2）有非零解，所以$C=(C_{ij})_{n^2\times n^2}$奇异。不妨设其秩为$n^2-r$，此时方程（2）有且仅有$n^2-r$个独立方程和 r 个独立变量。不妨设前n^2-r个方程独立，而$\lambda_{n^2-r+1}，\cdots，\lambda_{n^2}$为$r$个独立变量。令

$$x_i=\lambda_{n^2-r+i}\ (i=1,2,\cdots,r)，$$

$$d_{ij}=-C_{i,\ n^2-r+j}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n^2-r;\quad j=1,2,\cdots,r).$$

于是方程（2），从而方程（1）等价于

$$\sum_{k=1}^{n^2-r} C_{ik}\lambda_k=\sum_{j=1}^{r} d_{ij}x_j. \tag{3}$$

按Gramer法则，方程（3）对任一组（x_1，…，x_r）有唯一解。。将此解代入X，得$\det X=\psi(x_1,\cdots,x_r)$。由$C_{ij}\in Q$得$\psi$是$x_1,\cdots,x_r$的有理系数多项式。而当$x_{ij}=p_{ij}$时$\det X=\det P\neq 0$，所以$\psi$不是零多项式。因此存在$(x_{10},x_{20},\cdots,x_{r0})\in Q^r$，使

$$\det X_0=\psi(x_{10},x_{20},\cdots,x_{r0})\neq 0.$$

取$Q=X_0$，则 $|Q|\neq 0$且 $Q\in Q^{n\times n}$，使$Q^{-1}AQ=B$。

五、（17分）设S_1，S_2为$n\times n$实半正定对称矩阵。证明：　$(\det S_1)^{1/n}+(\det S_2)^{1/n}\leqslant(\det(S_1+S_2))^{1/n}$。

证。先证明一个不等式：设$x_i\geqslant 0$（$i=1,2,\cdots,n$），则

$$1+\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{1/n}\leqslant\left(\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\right)^{1/n} \tag{4}$$

此等价于$\left[1+\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{1/n}\right]^n\leqslant\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)$。

把左右两端分别变形，即欲证

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{k/n}$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i_1<\cdots<i_k}x_{i_1}\cdots x_{i_k}\right) \tag{5}$$

至此只需比较（5）中每一加项即获证。

下证本题结论。

（1）若$\det S_1=\det S_2=0$，结论显然成立。

（2）若$\det S_1$，$\det S_2$中至少有一个不为零，不妨设$\det S_1\neq 0$，于是S_1是正定矩阵。存在可逆矩阵P，使

$$S_1=P'P,\quad S_2=P'\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P,$$

$$\lambda_i\geqslant 0,\quad i=1,\ \cdots,\ n.$$

于是 $S_1+S_2=P'\operatorname{diag}(1+\lambda_1,1+\lambda_2,\cdots,1+\lambda_n)P$，

所以 $(\det S_1)^{1/n}+(\det S_2)^{1/n}=$

$$(\det P)^{2/n}\left[1+\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{1/n}\right],$$

$$\left[\det(S_1+S_2)\right]^{1/n}=(\det P)^{2/n}\left[\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\right]^{1/n}.$$

由不等式（4）即得

$$(\det S_1)^{1/n}+(\det S_2)^{1/n}\leqslant[\det(S_1+S_2)]^{1/n}.$$

六、（17分）给定n个非零实系数多项式 $a_{11}(x),\cdots,a_{1n}(x)$，设它们的最大公因式为$d(x)$。试证：对一切 $n\geqslant 2$，存在$n(n-1)$个多项式Q_{ij}，$2\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant n$，使得

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x)\cdots a_{1n}(x)\\ Q_{21}(x) & Q_{22}(x)\cdots Q_{2n}(x)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ Q_{n1}(x) & Q_{n2}(x)\cdots Q_{nn}(x)\end{pmatrix}=d(x).\quad(6)$$

证。用数字归纳法证明。

$n=2$时，由于$(a_{11}(x),a_{12}(x))=d(x)$，于是存在

$g_1(x)$, $g_2(x)$, 使

$$g_1(x)a_{11}(x)+g_2(x)a_{12}(x)=d(x).$$

令$Q_{21}(x)=-g_2(x)$。$Q_{22}(x)=g_1(x)$即得证。

设$n=k$时结论成立。即$(a_{11}(x), \cdots, a_{1k}(x))=d_1(x)$，存在$Q_{ij}$，$2\leqslant i\leqslant k$，$1\leqslant j\leqslant k$，使

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x)\cdots a_{1k}(x) \\ Q_{21}(x) & Q_{22}(x)\cdots Q_{2k}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ Q_{k1}(x) & Q_{k2}(x)\cdots Q_{kk}(x) \end{pmatrix}=d_1(x). \quad (7)$$

设对应于a_{1j}的代数余子式为$g_{1j}(x)$，于是（7）式等价于

$$\sum_{j=1}^{k} g_{1j}(x)a_{1j}(x)=d_1(x).$$

或者 $$\sum_{j=1}^{k} g_{1j}(x)\frac{a_{1j}(x)}{d_1(x)}=1,$$

$$\text{即}(g_{11}(x),\cdots,g_{1k}(x))=1. \quad (8)$$

当$n=k+1$时，由于

$$(a_{11}(x),\cdots,a_{1k}(x),a_{1,k+1}(x))=d(x),$$

于是$(d_1(x),a_{1,k+1}(x))=d(x)$。由（8）得

$$(d_1(x),\ g_{11}(x)a_{1,k+1}(x),\ g_{12}(x)a_{1,k+1}(x),\ \cdots,\ g_{1k}(x)a_{1,k+1}(x))=d(x).$$

则存在 $f_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,k+1)$，使

$$\sum_{j=1}^{k} f_j(x)g_{1j}(x)a_{1,k+1}(x)+f_{k+1}(x)d_1(x)=d(x).$$

令$Q_{k+1\,j}(x)=-f_j(x)(j=1,2,\cdots,k)$，

$Q_{k+1,k+1}(x)=f_{k+1}(x)$，则可得证（6）式。

2 北 京 大 学

（含解析几何）

一、（10分）求经过三条直线

$$x=y=\frac{z}{4},\quad x=\frac{y}{4}=z,\quad \frac{x}{4-\sqrt{2}}=\frac{y}{1+2\sqrt{2}}=\frac{z}{1+2\sqrt{2}}$$

的一个圆锥面的方程

解. 令$e_1=\frac{1}{3\sqrt{2}}(1,1,4)$，　　$e_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}(1,4,1)$，

$$e_3=\frac{1}{6}(4-\sqrt{2},1+2\sqrt{2},1+2\sqrt{2})$$

又设$e=(l,m,n)$是与圆锥面的轴平行的单位向量，则

$$e_1\cdot e=e_2\cdot e=e_3\cdot e.$$

由此得　　$m=n,\ 2l+m=0$

解得　　$e=\frac{1}{3}(-1,2,2)$.

设锥面半顶角为θ，则$\cos\theta=e_1\cdot e=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 得$\theta=\frac{\pi}{4}$.

以直线　$\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$为轴、半顶角为$\frac{\pi}{4}$的圆锥面方程为：

$$2(-x+2y+2z)^2=9(x^2+y^2+z^2),$$

此即　　$7x^2+y^2+z^2+8xy-16yz+8xz=0$

二、（20分）设仿射变换 σ在直角坐标系中的表示式为

$$\begin{cases} x' = \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}y + \frac{2}{3}z \\ y' = \frac{2}{15}x + \frac{14}{15}y - \frac{1}{3}z \\ z' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{cases}$$

试证σ是一绕轴的旋转，并求出旋转轴和转角。

解。因为

$$A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 11 & 2 & 10 \\ 2 & 14 & -5 \\ -10 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

是一个正交阵，且σ保持O点不动，又$|A| = 1$，由此推得σ必为绕经过O点的直线的旋转。

求σ的不动点，即求满足$\sigma(x,y,z) = (x,y,z)$的点，解方程组

$$(A-E)(x_n y, z)' = (0,0,0)'$$

得，在直线$y = 2x$，$z = 0$上的点都是不动点，该直线就是旋转轴。

令 $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$，　$e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)$，

$e_3 = (0,0,1)$。

以$oe_1e_2e_3$建立新的坐标系，则oe_1即为旋转轴。在新的坐标系下，σ对应的矩阵为

$$T'AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -\sqrt{5}/3 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & 2/3 \end{pmatrix},$$

其中 $T=(e_1',e_2',e_3')$ 此时$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$,

$$\theta=\arc\cos\frac{2}{3}.$$

三、（15分）计算下列行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$$

解。把原行列式拆成两个行列式相加可得

$$D_n=1-b,\ D_{n-1}=1-b_1(1-b_2D_{n-2})=\cdots$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k b_1b_2\cdots b_k$$

$$=1-b_1+b_1b_2-b_1b_2b_3+\cdots+(-1)^n b_1b_2\cdots b_n$$

其中 $D_{n-k}=(b_{k+1},b_{k+2},\cdots,b_n)$, $k=0,1,\cdots,n-1$

四、（20分）设$f(x)$是一个复系数三次多项式，α和β是两个虚数，$\alpha\neq\beta$, $\overline{\beta}$。已知$f(\overline{\alpha})=\overline{f(\alpha)}$, $f(\overline{\beta})=\overline{f(\beta)}$。试证明$f(x)$是实系数多项式。

证。设$f(x)=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$, $a_i\in C$。

由题设：$f(\alpha)=a_1\alpha^3+a_2\alpha^2+a_3\alpha+a_4=C_1$,

$f(\overline{\alpha})=a_1\overline{\alpha^3}+a_2\overline{\alpha^2}+a_3\overline{\alpha}+a_4=C_2$,

$f(\beta)=a_1\beta^3+a_2\beta^2+a_3\beta+a_4=C_3$,

$f(\overline{\beta})=a_1\overline{\beta^3}+a_2\overline{\beta^2}+a_3\overline{\beta}+a_4=c_4$.

把以上四式看作a_1，a_2，a_3，a_4的线性方程组，其系数行列式为一范德蒙行列式$D\neq 0$，所以方程组有唯一解。但由于$f(\alpha)=\overline{\overline{f(\alpha)}}=\overline{f(\alpha)}$，$f(\beta)=\overline{f(\beta)}$，所以$\overline{a_1}$，$\overline{a_2}$，$\overline{a_3}$，$\overline{a_4}$也是方程组的一个解。由此应有$\overline{a_i}=a_i(i=1,2,\cdots,4)$，即得$f(x)$为实系数多项式。

五、（20分）设$A=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$（$n\geqslant 2$），$B=A'A$。

（1）求B的全部特征值；

（2）求B相似于对角矩阵的条件，并说明理由。

解。（1）$\mathrm{rank}B=\mathrm{rank}A'A=\mathrm{rank}A=\begin{cases}1, & A\neq 0\\ 0, & A=0.\end{cases}$

所以 $|\lambda E-B|=\lambda^n-(\mathrm{tr}A'A)\lambda^{n-1}$

$$=(\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_i^2)\lambda^{n-1},$$ 从而B的全部特征值为：$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2,0,0,\cdots,0$，其中是$n-1$个0。

（2）若 $\sum a_i^2\neq 0$，则B有$n-1$个线性无关的属于特征值0的特征向量，有1个属于$\sum a_i^2$的特征向量，此时B可对角化。若$\sum a_i^2=0$，则B可对角化的充要条件是$B=0$，即$A=0$。因此除$\sum a_i^2=0$但$A\neq 0$的情形外（此时B不能对角化，反证即可），B均可对角化。特别地，当A为实矩阵，B均可对角化。

注：读者可参看浙江大学第四题。

六、（15分）设V_1，V_2是线性空间V的子空间，且

$$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1\cap V_2)+1.$$

试证：$\begin{cases}V_1+V_2=V_1\\ V_1\cap V_2=V_2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}V_1+V_2=V_2\\ V_1\cap V_2=V_1.\end{cases}$

证，显然有$\dim V_1$及$\dim V_2\geqslant\dim(V_1\cap V_2)$，且$\dim V_1$及$\dim V_2\leqslant\dim(V_1+V_2)$。由此得

$$|\dim V_1-\dim V_2|\leqslant\dim(V_1+V_2)-\dim(V_1\cap V_2)=1.$$

若$\dim V_1=\dim V_2$，则

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=2\dim V_1$$

为偶数，但这与题设矛盾。所以

$$|\dim V_1-\dim V_2|=1.$$

若$\dim V_1>\dim V_2$，则有

$$2\dim V_2+1=2\dim(V_1\cap V_2)+1$$

即有$\dim(V_2)=\dim(V_1\cap V_2)$，由此得

$$V_1=V_1+V_2,\quad V_2=V_1\cap V_2.$$

同理，当$\dim V_2>\dim V_1$时有

$$V_1=V_1\cap V_2,\quad V_2=V_1+V_2.$$

3　中国科学技术大学

一、（20分）设动直线L平行于平面$Ax+By+Cz-D=0$，并沿着直线$x=0$，$z=a$与直线$y=0$，$z=-a$滑动，这里常数$a>0$。求动直线L所确定的曲面方程。

解、分别在直线$x=0$，$z=a$与$y=0$，$z=-a$上取点