

吸引子维数的数值计算

王光瑞

陈式刚

(应用物理与计算数学研究所)

(中国科学院物理研究所)

郝柏林

(中国科学院理论物理研究所)

1984年6月5日收到

摘 要

对自治的强迫布魯塞尔振子采用Poincare截面方法,把吸引子维数计算中涉及的相空间降低一维。这样就可能在内存较小的计算机上计算柯尔莫哥洛夫容量 d_c ,并且也方便了李雅普诺夫维数 d_L 的计算。在计算 d_c 时,使用不断含并小格子的办法,在只解一次微分方程的情况下,可同时得到一组不同 ϵ 的含有点集元素的小格子数 $N(\epsilon)$ 。这样做,既节省机器时间,也节省了内存。本文着重讨论数值计算中遇到的方法和技巧问题。

一、引 言

耗散动力系统相空间轨迹的集合形成一个吸引子。吸引子维数⁽¹⁾的最基本、最直观的定义是柯尔莫哥洛夫容量 d_c , (在一般情况下, d_c 等于Hansdorff维数 d_H)。因为耗散系统的相体积在演化过程中不断收缩,所以 d_c 低于相空间维数 n 。 d_c 是吸引子的整体维数,在一般情况下它等于其局部的维数。

对于混沌运动,其轨道在相空间中几乎要“填满”有限的区域,同时运动轨道又是不稳定的,这样它必须无穷次地折迭,构成具有无穷自相似层次的几何结构——奇怪吸引子。它的 d_c 通常是分数。这样,如果系统的自由度数(即相空间维数)未知,测定吸引子的维数对判断混沌运动的机制是很重要的。

无量纲的柯尔莫哥洛夫容量 d_c 的定义为:

$$d_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\epsilon}{\ln \frac{1}{\epsilon}} \quad (1)$$

直接利用这个定义来求维数计算量很大,它特别不适于维数较高的吸引子,然而,可以用它定义与测量吸引子的整体维数或任何局部维数。这是 d_c 的优点。

与维数有关的刻画混沌运动的另一组特征量是李雅普诺夫指数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ 。 $\lambda_i < 0$ 的方向,相空间的长度收缩,运动稳定,且对初始条件不敏感, $\lambda_i > 0$ 的方向轨道指数分离,长时间行为对初始条件敏感,运动呈混沌状态, $\lambda_i = 0$ 对应稳定边界,初始错差不放大也不

缩小。因此, Kaplan—Yorke 定义了下面的维数⁽²⁾,

$$d_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{-\lambda_{j+1}} \quad (2)$$

这里, 设 $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$, j 是使 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j > 0$ 的最大整数。

Mori 建议了另一个公式⁽³⁾

$$d_M = n^0 + n^+ (1 + 1/\langle \lambda_1^+ \rangle / \langle \lambda_1^- \rangle + 1) \quad (3)$$

其中, n^0 是等于零的 λ_i 的个数; n^+ 是大于零的 λ_i 的个数; n^- 是小于零的 λ_i 的个数; $\langle \lambda_1^+ \rangle$ 和 $\langle \lambda_1^- \rangle$ 的定义为

$$\langle \lambda_1^+ \rangle = \frac{1}{n^+} \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i, \quad \langle \lambda_1^- \rangle = \frac{1}{n^-} \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i$$

当 $n > 2$ 时, (2) 与 (3) 一般是不同的。在下面所讨论的情况下, 只存在 λ_1 与 λ_2 , 并且 $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_1 > 0$, 所以 $d_{KY} = d_M = d_L$ 。

李雅普诺夫指数随着轨道的延伸很快地收敛, 它是一组容易计算的量, 因此 (2) 和 (3) 较之 (1) 更容易得到⁽¹⁾。对不同的系统分别用 (1) 式和 (2) 式作计算的结果表明, 当最大李雅普诺夫指数 $\lambda_1 > 0$ 时, $d_c = d_L$ (在误差范围内), 当 $\lambda_1 = 0$ 时, d_c 不一定等于 d_L 。

我们以强迫布鲁塞尔振子为例, 计算它的容量和李雅普诺夫指数。并比较 d_c , d_{KY} 和 d_M 。对于 d_c , 我们计算了局部维数与整体维数。也计算了强迫布鲁塞尔振子的几个不同临界点处吸引子的维数⁽⁴⁾。这个模型的方便之处是可以与线性振子微分方程相应的差分方程的周期或共倍数来进行采样^(5, 6)。下面将要证明, 用这个办法可以把计算容量时所需的集合的维数降低 1, 因而把 $2 < d_c < 3$ 的问题变为 $1 < d_c < 2$ 的问题, 避免了 (7) 中提到的用 (1) 式计算时当 $d_c > 2$ 时收敛很慢的问题, 因而使从 (1) 式计算 d_c 成为现实可行的事。

二、方程和解法

强迫布鲁塞尔振子的方程是

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A - (B + 1)X + X^2Y + a \cos \omega t \\ \dot{Y} &= BX - X^2Y \end{aligned} \quad (4)$$

我们固定初条件: $t = 0$ 时, 初值 $x_0 = 1.0$, $y_0 = 1.0$ 。A, B, a, ω (频率) 为外控参数。(4) 是一个二维的非自治的非线性常微分方程组。

在二维相空间 (X, Y) 中的轨道可以是相交的。为了明确地定义维数, 要通过另一维空间把轨道拉开, 就是说要把它镶嵌到高维空间中去。在方程的形式上就是要把它写成自治的。可以用不同的方式, 把 (4) 式写成自治形式, 它们对应不同的镶嵌方法。有利于我们讨论的最简单的三维自治形式是

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A - (B + 1)X + X^2Y + a \cos \phi \\ \dot{Y} &= BX - X^2Y \\ \dot{\phi} &= \omega \end{aligned} \quad (5)$$

初条件是: $t = 0$, $x_0 = 1.0$, $y_0 = 1.0$, $\phi_0 = 0$ 。

ϕ 的定义域为 $(0, 2\pi)$, 并把 0 和 2π 视为同一点。在不同维数空间中的各种镶嵌相当于不

同的拓扑变换, 它们不会改变奇怪吸引子的维数。因此, 这样算得的 d_c 和 d_L 是强迫振子所固有的, 与镶嵌方式无关的拓扑不变量。

ϕ 自由度引进一个新的空间维, 它对容量的贡献为 1。下面将看到 ϕ 方向的李雅普诺夫指数 $\lambda_\phi = 0$, 按公式(2)和(3), $\lambda_\phi = 0$ 也贡献维数 1。所以无论从(1)式、(2)式或(3)式看来, 都可以认为 ϕ 自由度是已知的, 可从计算中分离出去, 不予考虑。余下的问题是要计算 $\phi = \text{常数}$ 平面(即Poincare截面)上的点集的容量和 X, Y 方向的李雅普诺夫指数 λ_1, λ_2 。

数值计算中实际采用文献(8—12)中给出的 (X, Y, u, U) 四变量的自治形式

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A - (B + 1)X + X^2Y + \alpha u \\ \dot{Y} &= BX - X^2Y \\ \dot{u} &= -\omega U \\ \dot{U} &= \omega u\end{aligned}\quad (6)$$

它以差分计算代替了余弦函数, 可以节省计算量, 并且还有其它方便之处。差分计算采用四阶Runge—Kutta方法。初条件是 $t = 0$ 时, $x_0 = 1.0, y_0 = 1.0, u_0 = 0, U_0 = 1$ 。

时间步长由差分方程的周期 $T = 2\pi/\omega \cdot \Delta t$ 给出, 其中

$$\Delta t = \frac{1}{\omega} \left[\sin \frac{2\pi}{2^m} + \frac{1}{6} \left(\sin \frac{2\pi}{2^m} \right)^3 + \frac{1}{12} \left(\sin \frac{2\pi}{2^m} \right)^5 \right] \quad (7)$$

m 取整数。在我们的具体计算中取 $2^m = 128, 256, 512$ 。并以周期 T 去取样(当 $2^m \geq 512$ 时, 可以按 $\frac{2\pi}{\omega \cdot 2^m}$ 步长做采样图(4, 6), 就会给出正确的 d_c 结果。

三、柯尔莫哥洛夫容量 d_c 的计算方法

我们把由 0 到 $200T_c$ ($T_c = \frac{2\pi}{\omega}$) 作为过渡过程舍去之后, 才开始采样。在程序中, 令求维数的采样间隔 $N_s = \frac{T}{\Delta t}$, 这就保证了方程(6)的解进入定态后, 恰好每隔周期 T 取采样点。

换言之, 所采点集为 $x(QT), y(QT), Q = 1, 2, \dots, N_T - 200$ 。一直算 N_T 个周期。我们一般取 $N_T = 10^3 \sim 10^6$ 。 N_T 与步长 Δt 一起决定了计算所需的总时间。

在容量的计算中, 我们利用 X, Y 平面上的吸引子采样图。对欲求其容量的点集区域划出一矩形框, 如图 1 中的框 1 或框 2。假如从图 1 中取出框 2, 以 Δ 表示, Δ_x 为 Δ 在 X 方的长向度, Δ_y 为 Δ 在 Y 方向的长度。如图 2 所示, 把 Δ 再划分为小格子 e 。程序中取 N 记 X 方向小格子数目, 以 e_x 表示 e 在 X 方向的长度, 所以 $\Delta_x = Ne_x$ 。同样, 用 N' 记 Y 方向小格子的数目, 以 e_y 表示 e 在 Y 方向的长度, $\Delta_y = N'e_y$ 。 Δ 中 e 的总数为 NN' 。 Δ 可以为长方形或正方形, N, N' 可取同样值, 也可取不一样的值。 N, N' 的最大值, 取决于机器的内存。我们在内存 3 兆字节时, 实际取 $N = N' = 640$ 。实践表明, 由于内外存交换过于频繁, 当 $N = N' \geq 1152$ 时, 运算速度大为下降, 致使计算成为不现实的。

为了便于讨论, 如图 2 所示, 把横坐标 i 纵坐标 j 的小格子 e 统一编号为 $K = i + (j - 1)N$ 。我们发挥所用计算机按字节组织存贮的特点, 以单字节的短逻辑字的数组, 对应 NN' 个小格子。

在求解与(6)式相应的差分方程过程中, 当时间超过 $200T_c$ 之后, 对每个采样点都作判

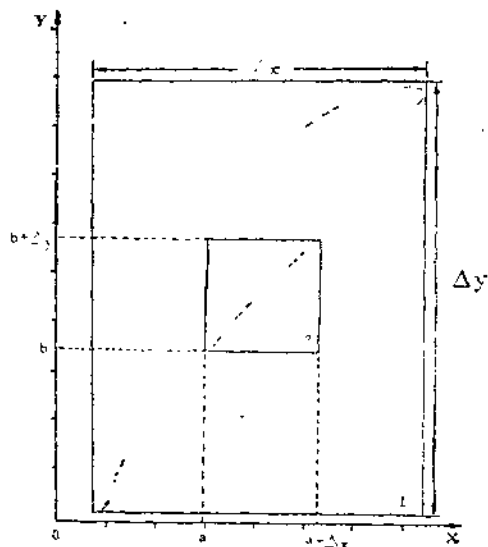


图1 倍周期序列的吸引子上的吸引子子集图1。框1覆盖整个吸引子，由它出发可计算整体空间维数；框2，覆盖部分吸引子，由它出发可计算此局部部分的局部维数。

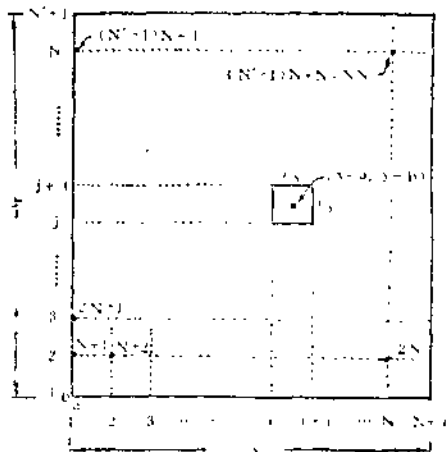


图2 $j+1$ 点纵坐标为 $b+\epsilon_j$, $i+1$ 点横坐标为 $a+\epsilon_i$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq N$

断。

若满足 $a \leq x < a + \Delta x$, $b \leq y < b + \Delta y$,

则 (x, y) 在 Δ 中, 否则不在。

如在 Δ 中, 再根据 $(i-1)\epsilon_x \leq x-a < i\epsilon_x$ 和

$(j-1)\epsilon_y \leq y-b < j\epsilon_y$, 即: $i-1 \leq \left[\frac{x-a}{\epsilon_x} \right]$ 取整 $< i$, $j-1 \leq \left[\frac{y-b}{\epsilon_y} \right]$ 取整 $< j$ 。

判断所在小格子的序号, 并对相应数组元素“逻辑式”作标记。轨道一次或多次通过一个小格子, 都一律标记成逻辑“真”值。在达到 N_1 时间后, 统计含有点集元素的格子数 $N\epsilon$ 。再把相邻的 2×2 个格子合并, 得到 $\epsilon_x = \frac{\Delta x}{320}$, $\epsilon_y = \frac{\Delta y}{320}$; 此大格子中, 只要原 4 个小格子中有一个算记过, 就认为轨道从中通过, 统计出相应的 $N\epsilon$ 。逐次把相邻的 2×2 个格小合并, 统计相应的 $N\epsilon$, 最后得到与

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\Delta x}{640}, \frac{\Delta x}{320}, \frac{\Delta x}{160}, \frac{\Delta x}{80}, \frac{\Delta x}{40}, \frac{\Delta x}{20}, \frac{\Delta x}{10}, \\ \epsilon_y &= \frac{\Delta y}{640}, \frac{\Delta y}{320}, \frac{\Delta y}{160}, \frac{\Delta y}{80}, \frac{\Delta y}{40}, \frac{\Delta y}{20}, \frac{\Delta y}{10}. \end{aligned}$$

相应的 7 个 $N\epsilon$ 值。根据 (1) 式, 由 $\ln N\epsilon$ 和 $\ln \frac{1}{\epsilon}$ 拟合直线的斜率即得所需的 d_ϵ 。考虑到 ϕ 方向的贡献, 还要在这样算得的 d_ϵ 上加 1。

值得强调指出的是, 方程 (6) 只解一次, 而通过不断地把小格子合并, 统计每次相应的 $N\epsilon$ 的方法, 可以大大节省机器时间和内存。

四、李雅普诺夫维数的计算

在方程(5)中, 令 $x = x + \delta x$, $y = y + \delta y$, $\phi = \phi + \delta \phi$, 其中 δx , δy , $\delta \phi$ 为一级小量。忽略二级小量后, 可把方程(5)线性化

$$\begin{aligned}(\delta \dot{x}) &= -(B+1)\delta X + 2XY\delta X + X^2\delta Y - a\sin\phi\delta\phi \\(\delta \dot{y}) &= B\delta X - 2XY\delta X - X^2\delta Y\end{aligned}\quad (8)$$

$$(\delta \dot{\phi}) = 0$$

李雅普诺夫指数, 即是(8)式描述的 $(\delta X, \delta Y, \delta \phi)$ 的变化率沿运动轨道的长时间平均值。与(8)相应的本征值方程为

$$\begin{vmatrix} -(B+1) + 2XY - \lambda & X^2 & -a\sin\phi \\ B - 2XY & -X^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

易见与 ϕ 方向相应的本征值 $\lambda_\phi = 0$ 。这是(8)式中 $\delta \phi$ 的变化 $(\delta \phi)^*$ 与 $\delta X, \delta Y$ 无关的自然后果。而 δx 和 δy 的变化率是相关的, 通常把它分解为最大增殖方向的变化率和与它垂直方向的变化率 λ_1, λ_2 。显然 λ_1, λ_2 由方程(4)和(8)共同决定, 而与镶嵌的空间无关。在一般镶嵌情况下, 另一方向的李雅普诺夫指数(即上例中的 λ_ϕ), 由于吸引子的遍历性, 也总是等于 0。计算 δx 和 δy 的方程所对应的两个李雅普诺夫指数时, 须注意下列几点:

(1) 在 $t = 200T_0$ 后, 开始与解方程(6)并行地求解方程(8)的前两个方程, 两者采用相同的时间步长。

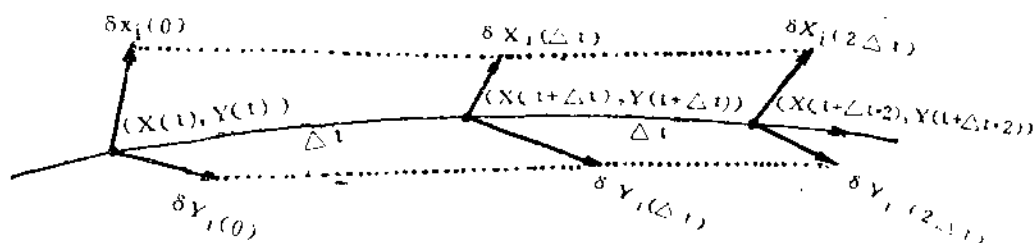
(2) 方程(8)中的 X, Y , 逐点由方程(6)提供。

(3) $\delta X, \delta Y$ 初值的选择及其一些要求, 见下面的分析。

李雅普诺夫指数的计算采用文献(1)描述的办法。基本思想如下:

为了刻画相体积收缩过程中几何特征的变化, 在相空间中跟踪一条轨道。定义一套纯实数的量。以轨道上某点 $X(t), Y(t)$ 为原点, 随机地取单位矢量 $\vec{\delta x}_1(0) = (\delta x_1(0), \delta y_1(0))$, 让它满足归一化条件 $(\delta x_1(0))^2 + (\delta y_1(0))^2 = 1$, 在我们的程序中取 $\delta x_1(0) = \delta y_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

再取一个与 $(\delta x_1(0), \delta y_1(0))$ 垂直的单位矢量 $\vec{\delta x}_2(0) = (-\delta y_1(0), \delta x_1(0))$ 。这样就省去了正交化手续。将 $(X(t), Y(t))$ 按微分方程(6)积分一步, 达到 $(X(t+\Delta t), Y(t+\Delta t))$ 点。同时将 $\vec{\delta x}_1(0)$ 和 $\vec{\delta x}_2(0)$ 的端点按相应的线性化方程积分一步, 再在 $(X(t+\Delta t), Y(t+\Delta t))$ 上连成新矢量 $(\delta x_1(\Delta t), \delta y_1(\Delta t))$ 和 $(\delta x_2(\Delta t), \delta y_2(\Delta t))$, 见图 3。这两个新矢量一般不再是正交归一的。再取 $(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t))$ 为原点, 将 $\vec{\delta x}_1(\Delta t), \vec{\delta x}_2(\Delta t)$ 重复以上过程。由于相体积收缩, 这两个新矢量的正交性将越来越差。因此每隔一定积分次数(我们程序中取 $K=10$ 次), 必须把它们重新正交归一化。两组矢量决定了 2 个几何尺寸的比值: 矢量长度之比以及它们支起的平行四边形的面积之比。最后把所求得的比值沿整个轨道平均, 得到

图 3 $i=1, 2$

$$\begin{aligned}\lambda(e^1) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\Delta t} \sum_{j=0}^{N-1} \ln \frac{\|\vec{\delta X}_1((j+1)\Delta t)\|}{\|\vec{\delta X}_1(j\Delta t)\|} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N\Delta t} \sum_{j=1}^{N/k} \ln \{ (\delta X_1(jk\Delta t))^2 + (\delta Y_1(jk\Delta t))^2 \} \quad (9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda(e^2) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\Delta t} \sum_{r=0}^{N-1} \ln \frac{\|\vec{\delta X}_1((j+1)\Delta t) \wedge \vec{\delta X}_2((j+1)\Delta t)\|}{\|\vec{\delta X}_1(j\Delta t) \wedge \vec{\delta X}_2(j\Delta t)\|} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\Delta t} \sum_{j=0}^N \ln \frac{|\delta X_1((j+1)\Delta t) \delta Y_2((j+1)\Delta t) - \delta Y_1((j+1)\Delta t) \delta X_2((j+1)\Delta t)|}{|\delta X_1(j\Delta t) \delta Y_2(j\Delta t) - \delta Y_1(j\Delta t) \delta X_2(j\Delta t)|} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\Delta t} \sum_{j=1}^{N/k} \ln |\delta X_1(jk\Delta t) \delta Y_2(jk\Delta t) - \delta Y_1(jk\Delta t) \delta X_2(jk\Delta t)| \quad (10)\end{aligned}$$

其中 N 为总积分步数; $N\Delta t$ 为总计算时间 (易见 $N\Delta t = N_T \cdot T_c = N_T N_s \Delta t$, 所以 $N = N_T N_s$, N_T, N_s 给定后, N 自然确定)。注意 N/k 取整数部分, 而 $\wedge$ 是外乘积符号 (平面情形下即是矢量 $\times$ 乘)。(9), (10) 式中已利用了矢量的正交归一性质。

由前面分析可见, $\lambda(e^1), \lambda(e^2)$ 作为沿轨道长期平均的结果, 是吸引子的一种整体特征, 其值总是实数。我们的计算表明 (9), (10) 中各个极限存在, 而且与初值 $(X(t), Y(t))$, 以及步长 Δt 的选择无关。

将最大的 λ 值编号为 λ_1 。因为 $\vec{\delta X}, \vec{\delta Y}$ 基矢是随机选取的, 所以

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda(e^1) \\ \lambda_2 &= \lambda(e^2) - \lambda(e^1)\end{aligned} \quad (11)$$

在我们计算过的情况中, 都有 $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ 的关系。这时 (2), (3) 两式是确定的, 并且给出相同的结果

$$d_L \equiv d_{KY} = d_M = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (12)$$

仿照 (1), 我们把它称为李雅普诺夫维数。由对 (8) 式分析知 $\lambda_\phi = 0$, ϕ 方向的维数为 1, 所以

$$d_L(XY\Phi) = 2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (13)$$

顺便说明, 我们用双精度 10 进制 16 位, 进行全部计算。

五、计算结果

我们仿照(13), 按上述方法, 计算了三种不同类型临界点: 同期 1 到周期 2 的分岔点, 倍周期序列的极限点和三周期切分叉点处的吸引子及混沌运动的奇怪吸引子的容量和李雅普诺夫维数。详细的物理结果及其讨论见文献〔4〕。

为了说明问题, 我们仅举一例: 周期 1 到周期 2 的分岔点 $A=0.4$, $B=1.2$, $\alpha=0.05$, $\omega=0.398205$ 的采样图及计算维数时所用的方框 Δ 如图 4 所示。为了补救 ε 个数 ($\varepsilon_{\max}=640 \times 640$) 的不足, 分别采用了不同的方框 1, 2, 3 来复盖图形的不同部分, 其中 1, 2 都包含极限点, (图 4 中此点的标记为 X)。方框 1 包含了全部采样点。一个周期内的计算步数采用 $2^m=512$ 。图 5 给出与图 4 方框相对应的 $\ln N_\varepsilon \sim \ln \frac{1}{\varepsilon}$ 曲线。包含极限点在内的方框 1, 2, 都测得 $d_c \sim 1$ 。这个计算做到 $N_i=20000$, 算得 $d_c=0.96$, $\lambda_1=-0.65 \times 10^{-4}$, $\lambda_2=-0.399$ 。从变化趋势可得 $d_c=1$, 这与用 $\lambda_1=0$, $\lambda_2<0$ 算得的 d_L 一致。在这个例子中 $\lambda_1=0$, 并且是具

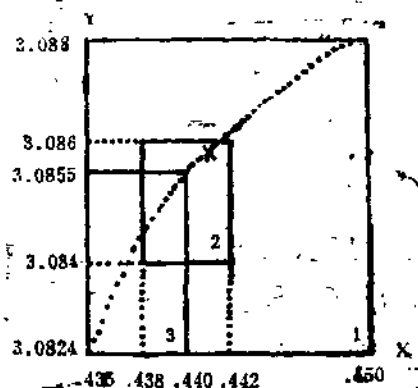


图 4 周期 1 到周期 2 的分岔点处的采样图及计算维数的方框 1, 2, 3。

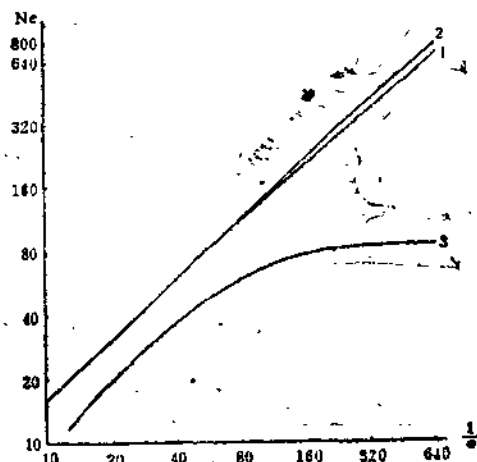


图 5 与图 4 方框相应的 $\ln N_\varepsilon \sim \ln \frac{1}{\varepsilon}$ 曲线(图中为双对数轴。其中曲线 1, 2, 3 是分别相应按图 4 中方框 1, 2, 3 计算的结果)。

模 型	2^m	NT	d_c	λ_1	λ_2	d_i	结 论
周期 1 到周期 2 的分岔点	512	2×10^4	2	-0.65×10^{-4}	-0.399	2	$d_c = d_L = 2$
倍周期序列的极限点	512	1.2×10^4	1.536	$(-0.6131 \times 10^{-4} \sim 0.499) \sim 0$	< 0	2	$d_c \approx d_L$
三周期切分叉点	512	$1.86 \times 10^4 \sim 6.24 \times 10^4$	2	~ 0	< 0	2	$d_c = d_L = 2$
一带区内混沌运动点	256 或 128	$1.04 \times 10^4 \sim 2.724 \times 10^4$	2.185 ± 0.06 (整体维数)	0.043	-0.286	2.15	$d_c^{\text{整}} = d_L^{\text{整}}$
		10^4 (其中以 6.24×10^4 的 $\ln N_\varepsilon \sim \ln \frac{1}{\varepsilon}$ 曲线最直)	2.214 ± 0.038 (局部维数)	0.043	-0.286	2.15	$d_c^{\text{局}} = d_L^{\text{局}}$

有有限聚点的吸引子。

图 5 曲线 3 (算到 $N_T = 5000$) 表明, 所取的格子 Δ 已足够小, 以致已能识别它所复盖的点集的维数 $d_c \rightarrow 0$ 。

在另外的一些计算中曾取 $2^m = 256$ (即大步长) 或 512, $N_{T, \max} = 272400$ 。现把结果列于下(4);

参 考 文 献

- [1] J. D. Farmer, E. Ott, J. A. Yorke, Physica 7 D(1983), 153
- [2] J. Kaplan and J. Yorke, Functional Differential Equations and The Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Math, (N^o730), M. O. Peitgen and H. O. Walther, Eds, Springer, Berlin, New York P228.
- [3] H. Mori, Prog. Theor. phys, 63(1980), 3.
- [4] 王光瑞, 陈式烈, 郝柏林, 物理学报(待发表)。
- [5] B-L. Hao, S-Y. Zhang, J. Stat. phys, 28(1983), 769.
- [6] 王光瑞, 陈式烈, , 郝柏林, 物理学报, 33(1984), 437.
- [7] H. S. Greenside, A. Wolf, J. Swift, T. Prgnataro, Phys. Rev, A25(1982), 3453.
- [8] Hao B-L, Zhang S-Y, Commun. Theor. phys, 1(1982), 111.
- [9] 王光瑞, 物理学报, 32(1983), 960
- [10] B-L. Hao, S-Y. Zhang, Phys Lett, 87A, (1982), 267; 物理学报, 32(1983), 198.
- [11] 王光瑞, 陈式烈, 郝柏林, 自然杂志, 6(1983), 475; 物理学报32(1983), 1139.
- [12] Chen Shi-gang, Hao Bai-lin, Wang Guang-rui, Zhang shu-yu, Paper presented to the 15th Int. conf. on Thermodyn and statistical physics, AS-ITP-83-024, 25-29th, Institute of Theor. physics(1983).
- [13] 王友琴, 陈式烈, 物理学报, 33(1985), 341.

NUMERICAL CALCULATION OF ATTRACTOR DIMENSIONS

Wang Guang-rui
(The Institute of Applied
Physics and Numerical
Mathematics)

Chen Shi-gang
(The Institute of
Physics)

Hao Bai-lin
(The Institute of Theore-
tical Physics)

Abstract

We calculated the attractor dimensions of the forced Brusselator in autonomous form using the Poincare section method in order to reduce the dimension of the phase space concerned by one. This enables the computation of Kolmogoroff capacity d_c with limited storage and facilitates the calculation of the LYapunov dimension d_L . In calculating d_c we used a cell-merging scheme to get a set of $N(\epsilon)$ corresponding to different ϵ , s , while the differential equations were being solved only once for a given set of parameter values. Both computer time and storage were saved in this way. In this paper we make emphasis on the technical subtleties encountered in numerical calculation.