

实现刚体导引的球面 四杆机构的综合

李 璨 張 启 先

【摘 要】

本文根据球面几何和球面三角学,建立了球面坐标系,以及刚体在球面上的位移公式。利用这些公式,研究了实现有限分离位置的球面四杆刚体导引机构的综合,并建立了球面上的布尔梅斯特曲线的三次代数方程和布尔梅斯特点的六次代数方程。

引 言

球面机构是各转动副轴线汇交于一点的空间机构,主要用于传递相交轴的非匀速转动。例如用于万向联轴节、摆盘式切割机构、飞机的副翼操纵机构、摆盘式发动机、搅拌机构以及其它纺织、印刷、搬运、装配工作中。

球面机构长期以来受到机构学者的注意,早在40年代,文[2]就用几何方法研究了球面机构的分析和综合问题。几何法由于其精度较差及作图困难,已逐渐被矩阵法所代替。利用空间矩阵,加上球面的约束条件,研究球面机构运动学的文献较多。文[3]、[4]、[5]、[6]用空间矩阵导出了布尔梅斯特锥面和布尔梅斯特轴线的代数方程,文[7]利用矩阵得出了布尔梅斯特点的六次代数方程,但此法并不很方便。

由于作球面运动的刚体和作平面运动的刚体一样,只有三个自由度,从此特点出发,本文建立了一种研究球面机构综合的简便方法。先引进球面坐标系,导出球面上的长度公式和刚体的位移公式,利用这些公式,按三、四个有限分离位置的刚体导引,进行球面曲柄滑块机构的综合,并按四、五个有限分离位置的刚体导引,讨论球面铰链四杆机构的综合,直接建立球面上的布尔梅斯特曲线的三次代数方程和布尔梅斯特点的六次代数方程。

基本的概念、规定和公式

1. 一些概念和规定

在用球面坐标系研究球面机构时,为了叙述和运算的方便,需要引入一些特殊的概念和规定。

如图1所示,空间中任意一点 P 的位置可用坐标参数 (r, θ, φ) 表示,其中 θ 和 φ 的变化范围分别是 $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 和 $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ 。

因为各种半径的球面都可通过将单位长半径的球面按比例缩放得到,所以现只研究单位长半径的球面,其上任意点 P 的位置可用两个球面坐标 (θ_P, φ_P) 表示。

在图2所示的球面上, $\varphi=0$ 的点的轨迹是一个大圆,称为 θ 坐标圆,取 θ 值增大的方向为 θ 坐标圆的正向。 $\theta=0$ 的点的轨迹是半个大圆,称为 φ 坐标线,取 φ 值增大的方向为 φ 坐标线的正向。在 φ 坐标线上 φ 为 $\pm 90^\circ$ 的两个点称为极点,分别用 S 和 S' 表示。所有过极点 S 和 S' 的大圆都叫作 φ 直线,取指向 S 的方向为 φ 直线的正向。

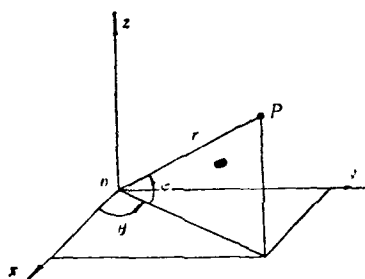


图 1

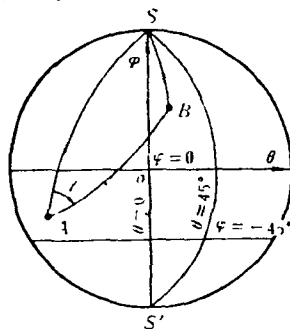


图 2

过球心的平面与球面的交线称为球面直线。两球面直线之间的夹角称为球面角,这就是两球面直线所在的两个过球心平面之间的夹角。例如图2中 AS 、 AB 、 BS 均为球面直线, AS 到 AB 的球面角 γ 是 AS 所在球心平面到 AB 所在球心平面之间的夹角。

特别须要指明方向的球面直线为球面有向直线,有向直线 AB 的正向是从 A 到 B 。

当 A 点不位于 S 或 S' 点时,规定过 A 点的 φ 直线的正向至有向直线 AB 的正向的夹角为直线 AB 在 A 点处的倾角(图3),规定逆时针方向为正向。当 A 点位于极点上时,规定 φ 坐标线的正向至有向直线 AB 的正向的夹角为直线 AB 在 A 点处的倾角(图4)。(倾角用 α 及两个下标表示,如有向直线 AB 在 A 点处的倾角用 α_{AB} 表示)。

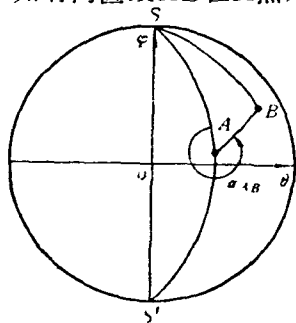


图 3

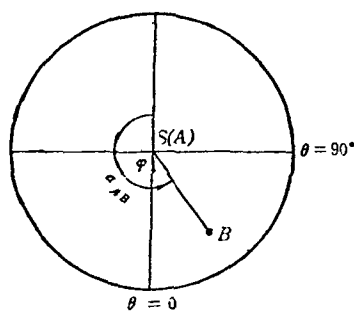


图 4

2. 球面上两点之间的距离

球面上的两点 A 和 B 把过这两点的球面直线分为两段, 较短的一段是劣弧, 定义它是这两点之间的距离。用 $\overline{AB}$ 表示。

设已知 A 、 B 两点的坐标分别是 (θ_A, φ_A) 和 (θ_B, φ_B) , 在 $\triangle ABS$ 中 (图 2), 根据球面三角的余弦定理, 有

$$\cos \overline{AB} = \cos \overline{AS} \cos \overline{BS} + \sin \overline{AS} \sin \overline{BS} \cos \angle ASB$$

由于 $\overline{AS} = \frac{\pi}{2} - \varphi_A$, $\overline{BS} = \frac{\pi}{2} - \varphi_B$, 和 $\cos \angle ASB = \cos(\theta_A - \theta_B)$, 因此得

$$\cos \overline{AB} = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos(\theta_A - \theta_B) \quad (1)$$

因为 $\overline{AB}$ 的范围是 $(0, \pi)$, 所以 $\cos \overline{AB}$ 的值唯一地确定了 $\overline{AB}$ 的值。为了减少运算, 以获得较高的运算精度, 在以下的推导过程中尽可能不取反三角函数运算, 只有在结果中需要获得长度值时, 才用反三角函数。这个原则也适用于处理球面上点的坐标值。

3. 按已知 A 点坐标 (θ_A, φ_A) 、 $\overline{AB}$ 长及倾角 α_{AB} , 确定 B 点的坐标 (图 3)。

在 $\triangle ABS$ 中用余弦定理 $\cos \overline{BS} = \cos \overline{AS} \cos \overline{AB} + \sin \overline{AS} \sin \overline{AB} \cos(2\pi - \alpha_{AB})$, 可得

$$\sin \varphi_B = \sin \varphi_A \cos \overline{AB} + \cos \varphi_A \sin \overline{AB} \cos \alpha_{AB} \quad (2)$$

在 $\triangle ABS$ 中用正弦定理: $\frac{\sin \overline{BS}}{\sin(2\pi - \alpha_{AB})} = \frac{\sin \overline{AB}}{\sin \angle ASB}$

$$\text{可得 } \theta \sin \theta_B \cos \theta_A - \cos \theta_B \sin \theta_A = \frac{-\sin \alpha_{AB} \sin \overline{AB}}{\cos \varphi_B} \quad (3)$$

将 (1) 与 (3) 联立可得

$$\sin \theta_B = \frac{-\sin \alpha_{AB} \sin \overline{AB} \cos \theta_A + \cos \overline{AB} \sin \theta_A \cos \varphi_A - \sin \varphi_A \sin \theta_A \sin \overline{AB} \cos \alpha_{AB}}{\cos \varphi_B} \quad (4)$$

$$\cos \theta_B = \frac{\sin \alpha_{AB} \sin \overline{AB} \sin \theta_A + \cos \overline{AB} \cos \theta_A \cos \varphi_A - \sin \varphi_A \cos \theta_A \sin \overline{AB} \cos \alpha_{AB}}{\cos \varphi_B} \quad (5)$$

或利用三角公式得出

$$\tan \frac{\theta_B}{2} = \frac{\sin \theta_B}{1 + \cos \theta_B} = \frac{1 - \cos \theta_B}{\sin \theta_B}$$

因为 B 点的坐标 φ_B 和 θ_B 的范围分别是 $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_B \leq \frac{\pi}{2}$ 和 $-\pi < \theta_B \leq \pi$, 所以 φ_B 的值可由 (2) 式确定, 而 θ_B 的值则由 (4)、(5) 式共同确定, 也可由上式唯一地确定。

按三个给定位置设计曲柄滑块机构

对于一般的球面曲柄摇杆机构, 当其摇杆 CD 的长度是 $\frac{\pi}{2}$ 时, C 点的轨迹是球面上的

一条大圆弧段, 这种特殊的球面四杆机构就是球面曲柄滑块机构。

刚体在球面上的运动, 可用它上面的一点 P 及参考直线 PP' 来表述。现已知待导引刚体的位置参数 $\theta_{P_i}, \varphi_{P_i}, \alpha_{P_i P'_i}$ ($i = 1, 2, 3$), 要求活动铰链点 B 、 C 和固定铰链点 A 以及滑动副中心线 tt' 的方程 (图 5)。

1. 求铰链点 A 、 B

可以预先选定铰链点 A 的位置参数 θ_A, φ_A , 在运动刚体上, 待求活动铰链点 B 相对于参考直线 PP' 的位置参数, 为球面角 γ_B 和直线长 $\overline{PB}$ 。 B_i 点的坐标 $(\theta_{B_i}, \varphi_{B_i})$ 可仿 (2)、(4)、(5), 用已知位置参数 $\theta_{P_i}, \varphi_{P_i}, \alpha_{P_i P'_i}$ 和待求位置参数 γ_B 及 $\overline{PB}$ 未表示, 再进一步按两铰链点 A 、 B_i 之间的距离为定长的条件, 可由式 (1) 最后得出:

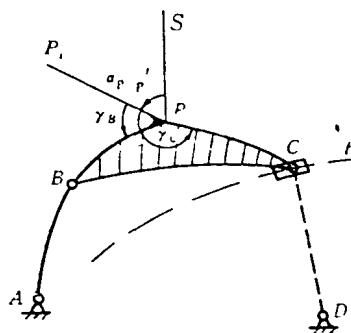


图 5

$$\cos \overline{AB} = a_i \cos \overline{PB} + b_i \sin \overline{PB} \cos(\alpha_{P_i P'_i} + \gamma_B) + c_i \sin \overline{PB} \sin(\alpha_{P_i P'_i} + \gamma_B) \quad (6)$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

其中

$$a_i = \sin \varphi_A \sin \varphi_{P_i} + \cos \varphi_A \cos \varphi_{P_i} \cos(\theta_{P_i} - \theta_A)$$

$$b_i = \sin \varphi_A \cos \varphi_{P_i} - \cos \varphi_A \sin \varphi_{P_i} \cos(\theta_{P_i} - \theta_A)$$

$$c_i = \cos \varphi_A \sin(\theta_{P_i} - \theta_A)$$

a_i, b_i, c_i 都是已知量。

再令

$$x = \frac{\cos \overline{PB}}{\cos \overline{AB}}, \quad y = \frac{\sin \overline{PB} \cos \gamma_B}{\cos \overline{AB}}, \quad z = \frac{\sin \overline{PB} \sin \gamma_B}{\cos \overline{AB}}$$

$$\bar{b}_i = b_i \cos \alpha_{P_i P'_i} + c_i \sin \alpha_{P_i P'_i}$$

$$\bar{c}_i = b_i \sin \alpha_{P_i P'_i} + c_i \cos \alpha_{P_i P'_i}$$

则方程 (6) 可改写为 $a_i x + \bar{b}_i y + \bar{c}_i z = 1 \quad (i = 1, 2, 3)$

由此可解出 x, y 及 z 。再由 $z/y = \tan \gamma_B$ 可解得 γ_B 的两个值 $\gamma_B^1 = \gamma_B^2 + 180^\circ$ 。由 $y/x = \tan \overline{PB} \cos \gamma_B$, 对应于 γ_B 的每一个值可求得 $\overline{PB}$ 的一个相应的解, 且 $\overline{PB}^1 = 180^\circ - \overline{PB}^2$, 即所求得的这一对活动铰链点是直径相对的。最后由 $\cos \overline{AB} = \cos \overline{PB} x$ 即可求得相应的连架杆 AB 的长。

值得指出, 这里也可以预先选定活动铰链点 B 的位置, 然后用类似的方法求得固定铰链点 A 的坐标 (θ_A, φ_A) 。

2. 先求活动铰链点 C , 后求固定铰链点 D

将式 (1) 的符号作适当变换, 以用于长度 $\overline{CD} = \frac{\pi}{2}$ 的情况, 可写出

$$\sin \varphi_{C_i} \sin \varphi_{D_i} + \cos \varphi_{C_i} \cos \varphi_{D_i} \cos \theta_{C_i} \cos \theta_{D_i} + \cos \varphi_{C_i} \cos \varphi_{D_i} \sin \theta_{C_i} \sin \theta_{D_i} = 0$$

$$(i = 1, 2, 3) \quad (7)$$

按照 φ_D, θ_D 为常量有解的条件可得

$$\begin{vmatrix} \sin \varphi_{C1} & \cos \varphi_{C1} \cos \theta_{C1} & \cos \varphi_{C1} \sin \theta_{C1} \\ \sin \varphi_{C2} & \cos \varphi_{C2} \cos \theta_{C2} & \cos \varphi_{C2} \sin \theta_{C2} \\ \sin \varphi_{C3} & \cos \varphi_{C3} \cos \theta_{C3} & \cos \varphi_{C3} \sin \theta_{C3} \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

将(2)、(4)、(5)的符号,作适当变换后代入其中各项,并令 $\tan \overline{PC} \cos \gamma_C = u$, $\tan \overline{PC} \sin \gamma_C = v$, 则得

$$\begin{aligned}\sin \varphi_{C_1} &= \cos \overline{PC} (a_1 + b_1 u + c_1 v) \\ \cos \varphi_{C_1} \cos \theta_{C_1} &= \cos \overline{PC} (d_1 + e_1 u + f_1 v) \\ \cos \varphi_{C_1} \sin \theta_{C_1} &= \cos \overline{PC} (g_1 + h_1 u + k_1 v)\end{aligned}$$

式中 $a_i, b_i, \dots, h_i, k_i$ 都是与刚体给定位置参数有关的已知量, 具体式子从略。

因为式(8)中各项都是 u 和 v 的一次项和零次项, 故该式是 u 和 v 的三次方程, 可写为

$$lu^3 + mv^2 + nv + p = 0 \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned}m &= m_1 v + m_2 \\ n &= n_1 v^2 + n_2 v + n_3 \\ p &= p_1 v^3 + p_2 v^2 + p_3 v + p_4\end{aligned}$$

l, m_i, n_j, p_k ($i=1, 2; j=1, 2, 3; k=1, \dots, 4$) 都是常数。

对应每一组 u 和 v 的解, 可由 $\tan \gamma_C = \frac{v}{u}$ 求得 γ_C 的两个值 $\gamma_C^1 = \gamma_C^2 + 180^\circ$, 再代入 $u = \tan \overline{PC} \cos \gamma_C$ 可求得 $\overline{PC}$ 的两个值 $\overline{PC}^1 = 180^\circ - \overline{PC}^2$, 故每组 u, v 的解对应着球面上直径相对的两点。现只研究其中的一点, 故三次曲线 $u-v$ 上的点与曲线 $\gamma_C - \overline{PC}$ 上的点是一一对应的。

由式(8)可以看出, 它是 $\cot \overline{PC}$ 的三次方程, 是 $\tan(\gamma_C/2)$ 的六次方程, 但是注意到球面上的圆点的直径相对性, 该曲线实际上是由直径相对的两部分组成, 只须研究其中一部分, 或者只研究半个球面, 这也说明 $\gamma_C - \overline{PC}$ 曲线是三次曲线。

$\gamma_C - \overline{PC}$ 曲线可以相对被导引刚体在各个不同位置作出, 但一般都是相对于被导引刚体的第一位置作出, 并用 K_{123}^1 表示。该曲线上的任一点就给出了 C_1 点的位置。将式(2)、(4)、(5)的符号作适当变换后再将所选得的 $\gamma_C - \overline{PC}$ 的值代入, 即可容易地求得 C_2 和 C_3 点的位置, 它们和 C_1 点位于同一直线上。

因为当 C_1 和 C_2 点重合时(8)式成立, 即转动极 P_{12} 在 K_{123}^1 上。同理转动极 P_{13} 和 P_{23} 也在 K_{123}^1 上。 P_{23}^1 是转动极 P_{23} 相对于被导引刚体在第一位置时的相对位置。

将所求得的 C_1, C_2, C_3 点的坐标值代入式(7), 并解其中任两式, 即可求得相应的 D 点的坐标 θ_D, φ_D , 共有两组解, 分别表示直径相对的两点。

3. 先求固定铰链点 D , 后求活动铰链点 C

为了先求固定铰链点 D 的坐标, 令 $\cot \varphi_D \cos \theta_D = \bar{u}$, $\cot \varphi_D \sin \theta_D = \bar{v}$, 则式(7)可以改写为

$$(a_i + d_i \bar{u} + g_i \bar{v}) + (b_i + e_i \bar{u} + h_i \bar{v}) \tan \overline{PC} \cos \gamma_C + (c_i + f_i \bar{u} + k_i \bar{v}) \tan \overline{PC} \sin \gamma_C = 0$$

$$(i=1, 2, 3) \quad (10)$$

按照 PC, γ_C 为常量有解的条件, 可得

$$\begin{vmatrix} a_1 + d_1 \bar{u} + g_1 \bar{v} & b_1 + e_1 \bar{u} + h_1 \bar{v} & c_1 + f_1 \bar{u} + k_1 \bar{v} \\ a_2 + d_2 \bar{u} + g_2 \bar{v} & b_2 + e_2 \bar{u} + h_2 \bar{v} & c_2 + f_2 \bar{u} + k_2 \bar{v} \\ a_3 + d_3 \bar{u} + g_3 \bar{v} & b_3 + e_3 \bar{u} + h_3 \bar{v} & c_3 + f_3 \bar{u} + k_3 \bar{v} \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

这是 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 的三次方程, 由每组 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 的解可求得一组相应的 θ_D, φ_D 的值 (不考虑直径相对的点), 即三次曲线 $\bar{u}-\bar{v}$ 上的点与曲线 $\theta_D-\varphi_D$ 上的点是一一对应的。

可以证明, 转动极 P_{12}, P_{13}, P_{23} 都在 $\theta_D-\varphi_D$ 曲线上。

与D点坐标有关的 u 和 v 求出后, 不难进一步利用式(10)求出活动铰链点(滑块)C在刚体上的位置参数 $\overline{PC}$ 和 γ_C 的值。

按四个给定位置设计铰链四杆机构

现已知待导引刚体的位置参数 $\theta_{Pi}, \varphi_{Pi}, \alpha_{PiP'_i} (i=1, 2, 3, 4)$, 要求活动铰链点即圆点 B_1, C_1 和固定铰链点即圆心点 A, D 的位置(图6)。

1. 圆点曲线

由式(1), 利用连架杆 AB 为定长的条件 $\cos AB_j$

$$- \cos \overline{AB}_1 = 0 \quad (j=2, 3, 4)$$

$$\begin{aligned} & \text{可写出} \quad (\sin \varphi_{Bj} - \sin \varphi_{B1}) \sin \varphi_A + (\cos \varphi_{Bj} \cos \theta_{Bj} \\ & - \cos \varphi_{B1} \cos \theta_{B1}) \cos \varphi_A \cos \theta_A + (\cos \varphi_{Bj} \sin \theta_{Bj} \\ & - \cos \varphi_{B1} \sin \theta_{B1}) \cos \varphi_A \sin \theta_A = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

按照 φ_A, θ_A 为常量有解的条件得

$$\begin{vmatrix} \sin \varphi_{B2} - \sin \varphi_{B1} & \cos \varphi_{B2} \cos \theta_{B2} - \cos \varphi_{B1} \cos \theta_{B1} & \cos \varphi_{B2} \sin \theta_{B2} - \cos \varphi_{B1} \sin \theta_{B1} \\ \sin \varphi_{B3} - \sin \varphi_{B1} & \cos \varphi_{B3} \cos \theta_{B3} - \cos \varphi_{B1} \cos \theta_{B1} & \cos \varphi_{B3} \sin \theta_{B3} - \cos \varphi_{B1} \sin \theta_{B1} \\ \sin \varphi_{B4} - \sin \varphi_{B1} & \cos \varphi_{B4} \cos \theta_{B4} - \cos \varphi_{B1} \cos \theta_{B1} & \cos \varphi_{B4} \sin \theta_{B4} - \cos \varphi_{B1} \sin \theta_{B1} \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

为了求圆点 B 在刚体上的位置参数, 将式(2)、(4)、(5)的符号作适当变换后代入上式中各项, 并令 $u = \tan \overline{PB} \cos \gamma_B$ $v = \tan \overline{PB} \sin \gamma_B$, 得

$$\begin{aligned} \sin \varphi_{Bj} - \sin \varphi_{B1} &= \cos \overline{PB} (a_j + b_j u + c_j v) \\ \cos \varphi_{Bj} \cos \theta_{Bj} - \cos \varphi_{B1} \cos \theta_{B1} &= \cos \overline{PB} (d_j + e_j u + f_j v) \\ \cos \varphi_{Bj} \sin \theta_{Bj} - \cos \varphi_{B1} \sin \theta_{B1} &= \cos \overline{PB} (g_j + h_j u + k_j v) \end{aligned}$$

式中 $a_j, b_j, \dots, h_j, k_j$ 都是与刚体给定位置参数有关的已知量, 具体式子从略。

因为式(13)中各项都含 u 和 v 的一次项和零次项, 故该式是 u 和 v 的三次方程, 可写为

$$Lu^3 + Mu^2 + Nu + P = 0 \quad (14)$$

其中

$$M = M_1 v + M_2$$

$$N = N_1 v^2 + N_2 v + N_3$$

$$P = P_1 v^3 + P_2 v^2 + P_3 v + P_4$$

$L, M_i, N_j, P_k (i=1, 2; j=1, 2, 3; k=1, \dots, 4)$ 都是常数。

对于每一组 u, v 的解, 可由 $\tan \gamma_B = \frac{v}{u}$ 和 $\tan \overline{PB} \cos \gamma_B = u$ 求得球面上直径相对的两

点, 只研究其中的一点, 故三次曲线 $u-v$ 上的点与曲线 $\gamma_B - \overline{PB}$ 上的点是一一对应的。

由(13)式可以看出, 它是 $\tan \overline{PB}$ 的三次方程, 是 $\tan(\gamma_B/2)$ 的六次方程。但由于球面上圆点的直径相对性, 该曲线是由直径相对的两部分组成的, 只须研究其中任一部分, 或者只研究半个球面, 则 $\gamma_B - \overline{PB}$ 曲线也是三次曲线。

当 $\gamma_B - \overline{PB}$ 曲线是相对于被导引刚体的第一位置作出时, 用 W_{1234}^1 表示之。该曲线上的任一点就给出了 B_1 点的位置。将(2)(3)(4)的符号作适当变换后, 再将所选的 γ_B 和

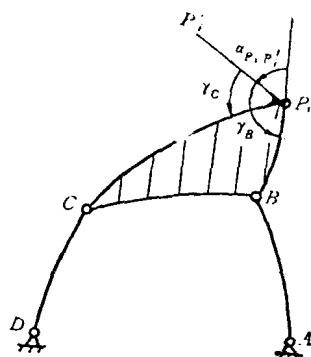


图 6

$\overline{PB}$ 值代入, 可以很方便地得到 B_1 的相关点 B_2 、 B_3 、 B_4 的位置, B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 点共圆。

可以证明转动极 P_{13} 、 P_{14} 、 P_{23} 、 P_{24} 、 P_{34} 也都在 W_{1234}^I 上。

为了求得相应的固定铰链点即圆心点 A 的坐标, 从式(12)的任两式中消去 $\sin \varphi_A$ 和 $\cos \varphi_A$, 得

$$\begin{vmatrix} \sin \varphi_{B2} - \sin \varphi_{B1} & (\cos \varphi_{B2} \cos \theta_{B2} - \cos \varphi_{B1} \cos \theta_{B1}) \cos \theta_A \\ \sin \varphi_{B3} - \sin \varphi_{B1} & (\cos \varphi_{B3} \cos \theta_{B3} - \cos \varphi_{B1} \cos \theta_{B1}) \cos \theta_A \\ + (\cos \varphi_{B2} \sin \theta_{B2} - \cos \varphi_{B1} \sin \theta_{B1}) \sin \theta_A \\ + (\cos \varphi_{B3} \sin \theta_{B3} - \cos \varphi_{B1} \sin \theta_{B1}) \sin \theta_A \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

将所得的 B_1 、 B_2 、 B_3 的值代入, 所得的是 $\tan \theta_A$ 的一次方程, 可得 θ_A 的两个解, 再将结果代入(12)式的任一式中, 可求得对应于圆点 B 的圆心点 A 的两组坐标值, 它们表示直径相对的两点。

将所得的结果代入长度公式(1), 即可求得相应的连架杆 $\overline{AB}$ 的长。

用同样的方法还可以求得该机构的另一个固定铰链点 D 和活动铰链点 C 的位置以及相应的连架杆 $\overline{CD}$ 的长。

2. 圆心曲线

为了先求出圆心点 A 的位置, 令 $\cot \varphi_A \cos \theta_A = \bar{u}$ 和 $\cot \varphi_A \sin \theta_A = \bar{v}$, 则(12)式可以改写为

$$(a_j + d_j \bar{u} + g_j \bar{v}) + (b_j + e_j \bar{u} + h_j \bar{v}) \tan \overline{PB} \cos \gamma_B + (c_j + f_j \bar{u} + k_j \bar{v}) \tan \overline{PB} \sin \gamma_B = 0 \quad (j = 2, 3, 4) \quad (16)$$

按照 $\overline{PB}$ 、 γ_B 为常量有解的条件, 可得类似于式(11)的式子, 该式是 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 的三次方程。与圆点曲线的情况一样, 三次曲线 $\bar{u} - \bar{v}$ 与圆心曲线 $\theta_A - \varphi_A$ 对应, 该曲线上任一点都可以作为固定铰链点 A 。同样可以证明, 在只考虑直径对称曲线的单边时, 圆心曲线也是三次曲线, 转动极 P_{12} 、 P_{13} 、 P_{14} 、 P_{23} 、 P_{24} 、 P_{34} 都在圆心曲线上。

在圆心曲线上选定一点作为固定铰链点 A 后, 不难进一步解出相应的活动铰链点 B 的位置参数 γ_B 和 $\overline{PB}$, 以及连架杆 $\overline{AB}$ 的长。

以上讨论的圆点曲线和圆心曲线, 可称为球面上的布尔梅斯特曲线。

按四个给定位设计曲柄滑块机构

这里用图6所示的曲柄滑块机构, 但仅讨论求活动铰链点 C 和滑动副中心线的位置的方法。

根据前面所述, 被导引刚体上, 其三个相关点在一条大圆弧上的点的轨迹是三次曲线, 所以由被导引刚体的第一、二、三位置可作曲线 K_{123}^I 。被导引刚体上, 其四个相关点位于同一圆周上的点的轨迹是三次曲线 W , 所以由被导引刚体的四个位置可作曲线 W_{1234}^I 。

取 K_{123}^I 和 W_{1234}^I 的交点为活动铰链点 C_1 , 则可知 C_1 、 C_2 、 C_3 在一个大圆周 R_1 上, C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 在一个圆周 R_2 上。若 C_1 、 C_2 、 C_3 不重合, 则 R_1 和 R_2 必重合, 因此 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 都在一个大圆周(即球面直线)上。

由于转动极 P_{12} 、 P_{13} 、 P_{23}^1 都在曲线 K_{123}^1 和 W_{1234}^1 上, 故它们都是这两条曲线的交点。若取 P_{12} 为 C_1 点, 则 C_1 与 C_2 重合, R_1 与 R_2 就只有两个公共点, 不能保证 R_1 与 R_2 重合, 因此 P_{12} 不能取作活动铰链点, 同理 P_{13} 、 P_{23}^1 也不能被取作活动铰链点。

K_{123}^1 和 W_{1234}^1 最多可有九个交点, 除去三个公共的转动极, 最多可有六个交点可用作活动铰链点 C_1 。

以上的几何讨论也可用代数方法进行。 K_{123}^1 的方程是 (9), W_{1234}^1 的方程是 (14) (作适当的符号变换), 用结式消元法消去 u , 就可得 v 的六次方程:

$$\begin{vmatrix} l & m & n & p & 0 & 0 \\ 0 & l & m & n & p & 0 \\ 0 & 0 & l & m & n & p \\ L & M & N & P & 0 & 0 \\ 0 & L & M & N & P & 0 \\ 0 & 0 & L & M & N & P \end{vmatrix} = 0$$

因为每一对 u 、 v 的值, 对应着一个圆点 (不计直径相对的另一端), 因此可知最多可有六个点能作为连杆与滑块的铰接点 C_1 。

在求得 γ_C 和 $\overline{FC}$ 后, 不难进一步求出固定铰链点 D 的坐标, 并可确定滑动副的中心线。

以上的讨论是先求活动铰链点的, 同样的方法也可以用来先求解固定铰链点 D 的位置, 并得出类似的结论: 最多可有六个选择。

按五个给定位置设计铰链四杆机构

根据前面所述, 对于被导引刚体的第一、二、三、四位置, 可作圆点曲线 W_{1234}^1 , 若取其上任一点作为 B_1 , 则 B_1 和相关点 B_2 、 B_3 、 B_4 将位于同一圆周 R_1 上。再作关于被导引刚体的第一、二、三、五位置的圆点曲线 W_{1235}^1 , 若取其上任一点作为 B_1 , 则 B_1 又与相关点 B_2 、 B_3 、 B_5 位于一个圆周 R_2 上。故若取 W_{1234}^1 和 W_{1235}^1 的交点为 B_1 点, 则它既与相关点 B_2 、 B_3 、 B_4 在圆 R_1 上, 又与相关点 B_2 、 B_3 、 B_5 在圆 R_2 上。若 B_1 、 B_2 、 B_3 是分离的三点, 则 R_1 与 R_2 必重合, 因此 B_1 点与相关点 B_2 、 B_3 、 B_4 、 B_5 共一圆周。

由于圆点曲线 W_{1234}^1 通过转动极 P_{12} 、 P_{13} 、 P_{14} 、 P_{23}^1 、 P_{24}^1 、 P_{34}^1 , 而 W_{1235}^1 通过转动极 P_{12} 、 P_{13} 、 P_{15} 、 P_{23}^1 、 P_{25}^1 、 P_{35}^1 , 所以 P_{12} 、 P_{13} 、 P_{23}^1 是这两条曲线的交点, 若把 P_{12} 作为活动铰链点, 则 B_1 与 B_2 重合, 则不能保证 R_1 与 R_2 重合, 因此 P_{12} 不能作为活动铰链点 B_1 。同理 P_{13} 和 P_{23}^1 也不能作为活动铰链点 B_1 。

W_{1234}^1 和 W_{1235}^1 都是三次曲线, 最多可有九个交点, 除去三个公共的转动极, 最多可有六个圆点可用作活动铰链点 B_1 。

以上的几何解释也可用代数法进行。

由 (14), W_{1234}^1 的方程可写作: $L_1 u^3 + M_1 u^2 + N_1 u + P_1 = 0$

将式 (14) 的下标作适当变换, 可将 W_{1235}^1 的方程写为 $L_2 u^3 + M_2 u^2 + N_2 u + P_2 = 0$ 。

用结式消元法消去 u , 可得 v 的六次方程。

因为每一组 u , v 的解对应着一个圆点 (不计直径相对的另一端点), 因此可知, 最多可有六个圆点能用作活动铰链点 B_1 或 C_1 。

在求得 γ_B , $\overline{PB}$ 和 γ_C , $\overline{PC}$ 后, 进一步可求出相应的固定铰链点 A 和 D 的坐标值以及相应的连架杆 AB 和 CD 的长度。

以上的讨论是先求圆点 B 和 C 的, 用类似的方法也可以先求出圆心点 A 和 D , 并得出类似的结论: 最多可有六个圆心点可用作固定铰链点 A 和 D 。

本节讨论的活动铰链点和固定铰链点可称为是球面上的布尔梅斯特点。

結 論

球面机构可以看为类似于平面机构的二维机构。从这一特点出发, 本文按照类似平面机构综合的方法, 研究了实现有限分离位置的刚体导引的球面四杆机构的综合。建立了球面上的布尔梅斯特曲线和布尔梅斯特点的代数方程。

本文所建立的研究球面机构的方法, 比现有的方法简单直观, 它还可以用于研究实现预定函数关系和预定轨迹的球面四杆和六杆机构的综合。

参 考 文 献

- [1] 张启先: 《空间机构的分析与综合》, 上册, 机械工业出版社, 1984。
- [2] В. В. Добровольский: «Теория Сферических Механизмов», Москва, 1947。
- [3] B. Roth, "The kinematics of motion through finitely separated positions", Journal of Applied Mechanics, 1967, p.591~598。
- [4] B. Roth, "Finite-position theory applied to mechanism synthesis", Journal of Applied Mechanics, 1967, p.599~605。
- [5] H.J. Dawler, J. Duffy and D. Tesar, "A generalized study of three multiply separated positions in spherical kinematics", Mechanism and Machine Theory, 1967, Vol.11, p.395~410。
- [6] H.J. Dawler, J. Duffy and D. Tesar, "A generalized study of four and five multiply separated positions in spherical kinematics", Mechanism and Machine Theory, 1977, Vol.13, p.409~415。
- [7] 渡边克己: "球面4棒機構の総合" (日文) 日本機械学会論文集, 第45卷, 第89号。1979。p.87~89。

SYNTHESIS OF SPHERICAL FOUR-LINK MECHANISMS FOR RIGID BODY GUIDANCE

Li Can Zhang Qixian

ABSTRACT

Based on spherical geometry and spherical trigonometry, this paper set up a spherical coordinate system and a series of formulas for displacements of rigid bodies on this system. With use of these formulas, the problems of synthesizing spherical four-link mechanisms for rigid body guidance are studied, the three degree algebraical equation of the Burmester curves and the six degree algebraical equation of the Burmester points are obtained.