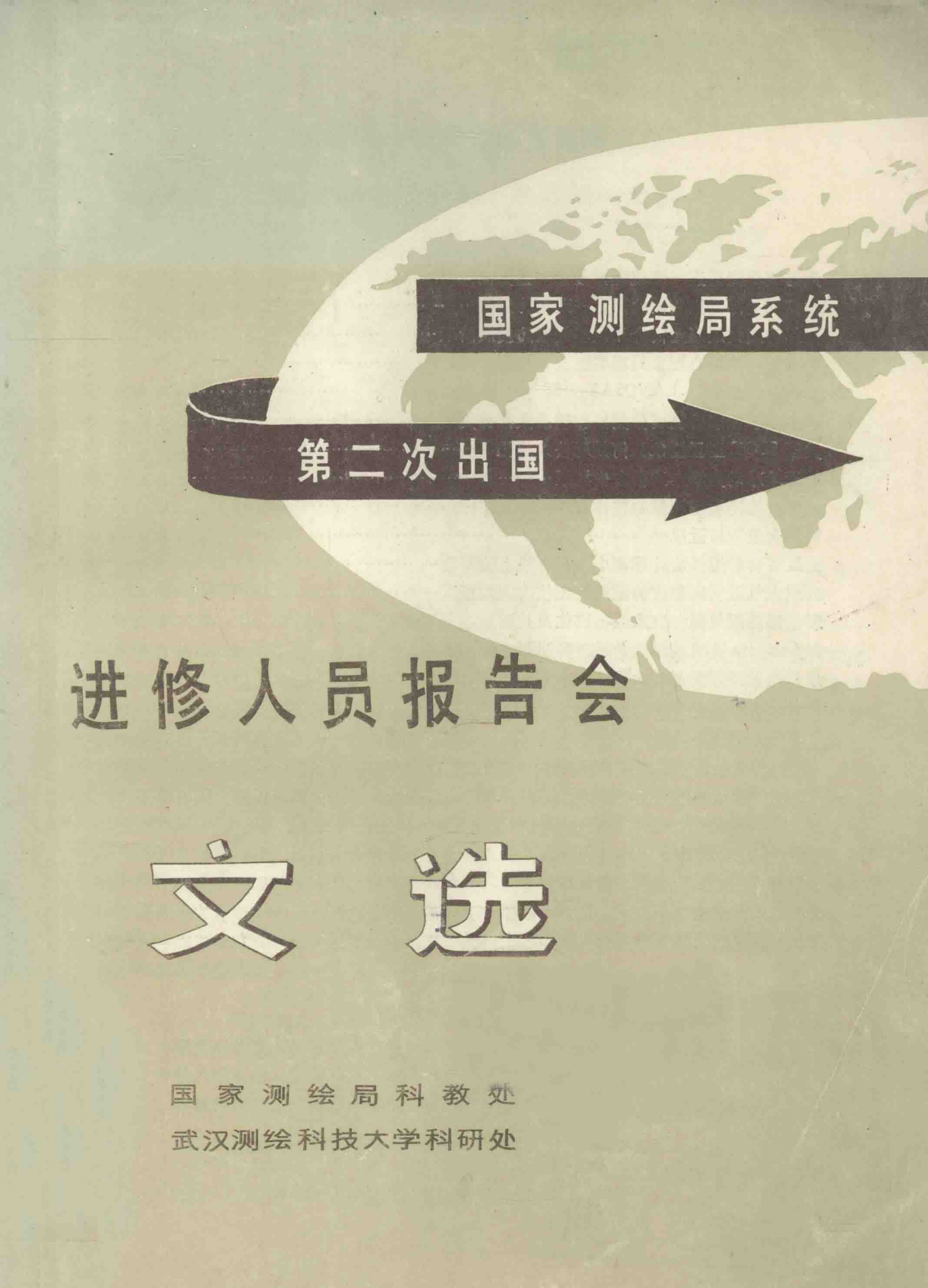




国家测绘局系统

第二次出国

进修人员报告会

文选

国家测绘局科教处
武汉测绘科技大学科研处

目 录

大区域地壳垂直形变监测重复精密重力测量对水准测量的改善·····	张正禄 (1)
控制网及部分控制网的图形一致与仿射性·····	W·M· 威尔施 张 琰 (17)
联邦德国测绘事业简介和误差处理的发展阶段·····	李德仁 (30)
加拿大遥感中心图象处理系统及其特点·····	邱志成 (38)
地面高程数据在 LANDSAT MSS 数据解析中的应用·····	程德群 (49)
遥感数字影象的纹理分类法和辅助数据分类法·····	陈 军 (56)
关于 SPOT 卫星图象几何处理公式的推导·····	舒 宁 (63)
关于地球动力学中的参考坐标系·····	金标仁 (74)
各类大地测量观测量的整体处理方法·····	晁定波 (80)
惯性大地测量近况·····	祝永刚 (94)
卫星多普勒短弧法计算在小型计算机上的实现·····	苗履丰 (96)
应用大气温度模型改善短程测距仪的测距精度·····	彭玉辉 (105)
彩色遥感图象制印技术的标准化及其质量控制系统·····	张清浦 (115)
在 Calcomp 鼓型绘图机上绘制类型图或区划图·····	杜道生 (125)
用机助制图方式制作分级统计图及柱状统计图·····	黄 伟 (132)
蒙版技术在地图绘制及制印生产中的应用·····	胡渝生 (138)
计算机三维透视表达的研究与应用·····	季民河 (142)
计算机网络的使用——兼谈美国北达科他州 HECN网·····	叶文辉 (148)
关系数据库与关系数据库系统XDB·····	许云涛 (157)
微型计算机和接口及其在测绘中的应用·····	刘振西 (167)
计算机图形学及应用·····	樊廷杰 (173)
实时多通道光学相关技术和矩阵相乘的光学全并行处理方法·····	梁荫中 (177)
光电混合图象处理·····	鲍吉士 (182)
摇臂式轴外非球面加工机床·····	王耀东 (188)

大区域地壳垂直形变监测重复 精密重力测量对水准测量的改善

张 正 禄

(武汉测绘科技大学)

【提要】 本文提出了两期复测水准测量和重力测量的联合平差模型,讨论了重力高程因子选取、整体垂直位移计算等问题;进行了联合平差模型和水准平差模型在精度、可靠性、灵敏度等方面的比较,指出联合平差对水准测量结果的加强和改善;最后给出了使用联合平差模型对模拟网进行计算的部分成果,对应用重力——水准联合测量和平差的方法监测地壳的垂直变形,进行地震预报方面提出了看法和意见。

一、引 言

研究地球的变化和动力过程是地学的重要课题,大地测量学的任务则在于利用测量和数据处理的方法和技术获取地壳变形的几何尺寸。通过高精度重复水准测量可以确定地壳的垂直变形,它在地球动力学科研以及地震预报方面都具有重要意义。水准测量的缺点在于:观测周期较长,所耗费的人力、物力和资金较多;由于地形、温度变化所引起的大气折光等系统误差的影响随着测区的加大将使精度显著降低;同时只能得到地壳的相对垂直变形。

近十年来,重力测量在物理大地测量学领域有迅速的发展,固定站绝对重力测量精度可达 ± 1 微伽(Torge[5]),活动站绝对重力测量精度可达 ± 10 微伽,相对重力测量仪(如La-Coste & Romberg)经过许多学者的研究和改进,其精度亦可达 ± 10 微伽。重力测量相对于水准测量具有观测周期短,投资少的优点,在进行绝对重力测量情况下,可以确定地壳的绝对垂直变化量。随着重力测量仪精度的不断提高,对重力测量误差影响的深入研究,平差模型的改进和发展,对大区域地壳垂直运动的监测,重力测量将愈来愈重要甚至有替代重复水准测量的趋势。

二、重力测量平差模型

重力测量的精度不仅与仪器有关,而且与平差模型有关。采用能最真实地反映观测值与平差未知数之间几何、物理关系的数学模型是测量工作者的重要任务。

1、函数模型:采用高斯—马尔柯夫间接平差法,绝对重力测量误差方程为:

$$V_{ai} = \hat{g}_i - l_{ai} \quad (1)$$

其中:

l_{ai} 、 $\hat{g}_i$: 第 i 点绝对重力观测值和平差值;

相对重力测量误差方程:

$$V_{ij} = \hat{g}_i - \hat{g}_j - \sum_{k=1}^m (\tilde{Z}_i^k - \tilde{Z}_j^k) E_k + \sum_{n=1}^p X_n \left(\cos \frac{2\pi Z_i}{T_n} - \cos \frac{2\pi Z_j}{T_n} \right) + \sum_{n=1}^p Y_n \left(\sin \frac{2\pi Z_i}{T_n} - \sin \frac{2\pi Z_j}{T_n} \right) + \sum_{l=1}^s (t_i^l - t_j^l) D_l - \delta l_{ij} \quad (2)$$

其中: Z_i, Z_j : 第 i, j 测站上的重力仪读数值; E_k : 多项式标定函数 k 次幂系数;

$\tilde{Z}_i, \tilde{Z}_j$: 第 i, j 测站按厂家给定函数改化后的重力仪读数值;

t_i, t_j : 第 i, j 测站上的观测时刻, T_n 为周期;

D_l : 多项式漂移改正函数 l 次幂系数;

δl_{ij} : 经厂家标定函数改化、潮汐改正以及气压差、气压变化等改正后的第 i, j 测站的段差;

X_n, Y_n : 辅助未知数

$X_n = A_n \cos \phi_n, Y_n = A_n \sin \phi_n$

其中 A_n, ϕ_n : 振幅和初相, 满足:

$$A_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}, \quad \phi_n = \arctg \left(\frac{Y_n}{X_n} \right)$$

误差方程用矩阵形式可以表示为:
$$V = \left(\begin{matrix} \hat{A} & \hat{A} \\ -\hat{G} & -\hat{Z} \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix} - \frac{1}{\quad} \quad (3)$$

2、随机模型:

用不同重力仪在不同条件下所观测的重力值具有不同的精度, 对观测值进行分组, 各组观测值具有足够的多余观测并且组与组之间又有足够联结时, 用方差分量估计法求各组观测值的权。利用下式计算各重力仪的单位权中误差:

$$M_0(y) = \frac{M_0}{\sqrt{P(y)}} \quad (4)$$

M_0 : 所有重力仪的单位中误差; $P(y)$: 重力仪 y 的权; $M_0(y)$: 重力仪 y 的单位权中误差。

具有公共测站的相对重力观测值具有几何和物理相关性。物理相关性系由于仪器运输中振动影响, 由于温度、气压变化引起的零点漂移影响造成。其相关系数 r 按下式计算:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^m (V_{i,i+1} \cdot V_{i+1,i+2})}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (V_{i,i+1}^2) \cdot \sum_{i=1}^m V_{i+1,i+2}^2}} \quad (5)$$

V_i, V_{i+1}, V_{i+1} 为观测值改正数, 可以通过不考虑附加参数 $\underline{Z}$ 的简化平差模型平差得

到,由各重力仪的权相关系数 r 可以计算观测值的权阵 $\underline{P}$, 权因数阵 $\underline{Q} = \underline{P}^{-1}$ 的元素为,

$$q_{nn} = \frac{1}{p_n} \quad (6)$$

$$q_{n,n+1} q_{n+1,n} = r \cdot \sqrt{q_{nn} \cdot q_{n+1,n+1}} \quad (7)$$

由于相对重力观测值是由不同仪器在不同时间和不同条件下进行的, $\underline{P}$ 阵是由不相关的子矩阵组成的主对角子块矩阵。

三、两期重力测量平差以及整体位移计算

由重力测量的函数模型和随机模型按最小二乘原理组成法方程式:

$$\begin{pmatrix} \underline{A}_G^T \underline{P} \underline{A}_G & \underline{A}_G^T \underline{P} \underline{A} \\ \underline{A}_Z^T \underline{P} \underline{A}_G & \underline{A}_Z^T \underline{P} \underline{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\underline{g}} \\ \hat{\underline{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A}_G^T \underline{P} \underline{1} \\ \underline{A}_Z^T \underline{P} \underline{1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

其解为:

$$\begin{pmatrix} \hat{\underline{g}} \\ \hat{\underline{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{\hat{\underline{g}}\hat{\underline{g}}} & Q_{\hat{\underline{g}}\hat{\underline{z}}} \\ Q_{\hat{\underline{z}}\hat{\underline{g}}} & Q_{\hat{\underline{z}}\hat{\underline{z}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_g \\ n_z \end{pmatrix} \quad (9)$$

由平差得到验后单位权方差:

$$S_G^2 = \frac{\underline{V}^T \underline{P} \underline{V}}{f_G} \quad (10)$$

其中 f_G 为多余观测数。

在实际中,往往不可能在平差模型中恰当地将附加参数考虑进去,则需要对附加参数作整体及局部显著性检验,通过检验确定合适的模型。

对两期重力网(设具有相同的图形)分别进行上述平差,可得到测站绝对重力变化值及其协因数阵:

$$\Delta \underline{g} = \hat{\underline{g}}_2 - \hat{\underline{g}}_1 \quad (11)$$

$$\underline{Q}_{\Delta G} = (\underline{Q}_{GG})_1 + (\underline{Q}_{GG})_2 \quad (12)$$

对两期单位权方差作基本假设检验,若它们的期望相等,则按下式计算两期的单位权中误差:

$$S_{oG} = \sqrt{\frac{\underline{V}_1^T \underline{P}_1 \underline{V}_1 + \underline{V}_2^T \underline{P}_2 \underline{V}_2}{f_{G1} + f_{G2}}} \quad (13)$$

否则,对两期协方差阵作谱和计算,使其具有相同的方差因子 S_{oG}^2 。当重力—高程因子 C 确定了(见第四节),由重力变化计算出的高程变化及其协方差阵为:

$$\Delta \underline{H}_G = C^{-1} \Delta \underline{g} \quad (14)$$

$$\underline{\Sigma}_{\Delta HG} = C^{-2} S_{oG}^2 \underline{Q}_{\Delta G} = S_{oG}^2 \underline{Q}_{\Delta HG} \quad (15)$$

监测地壳垂直形变的水准网是相对网,当整个地区发生整体地壳上升或下沉运动,这种

变形则不可能通过重复水准测量获得，如图 1 中，A、B 两点的重力位之差为：

$$C_{AB} = W_A - W_B = \int_A^B g dh \quad (16)$$

式中 dh 为水准测量高差， g 为沿水准路线所观测的重力值。两观测周期之间重力位差的变化值为：

$$(W_{A_2} - W_{B_2}) - (W_{A_1} - W_{B_1}) = \Delta W_A - \Delta W_B = \Delta W_{AB} \quad .$$

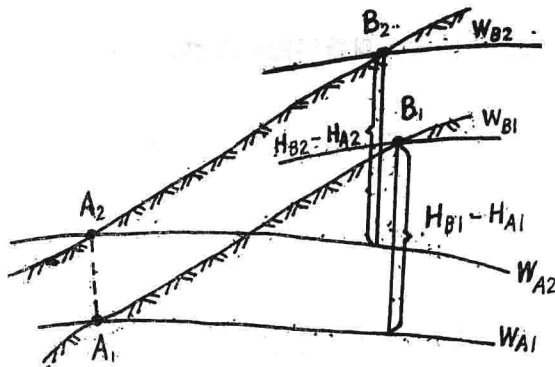


图 1

如果 A、B 点的重力位变化以及高程变化相等，即：

$$(\Delta W_A - \Delta W_B) = 0, (\Delta H_A - \Delta H_B) = 0 \quad .$$

但是 A、B 点的重力位变化和高程变化却不等于 0 而且无法由水准测量得到。在进行了重复绝对重力测量的重力网中，其整体垂直位移可用下式计算：

$$B_W = \frac{1}{n} \mathbf{e}^T \Delta \underline{H}_G \quad , \quad (17)$$

其精度为：

$$\sigma_{BW}^2 = \frac{1}{n^2} \mathbf{e}^T \sum \Delta \underline{H}_G \mathbf{e} \quad . \quad (18)$$

本文采用回归方法确定高程变化向量 $\Delta \underline{H}_G$ 的优化线性回归方程。把 $\Delta \underline{H}_G$ 与测站点的中心化的平面坐标进行回归，其线性回归模型为：

$$\underline{Y} = \underline{X} \underline{b} + \underline{\mu} \quad (19)$$

其中：

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & Y_1 & \dots \\ 1 & X_2 & Y_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & X_n & Y_n & \dots \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\underline{b} = (b_0 \quad b_1 \quad \dots b_m)$$

此处 $\underline{Y} = \Delta \underline{H}_G$ ，其随机模型由式(15)给出。回归系数向量 $\underline{b}$ 采用迭代法进行优化选择，

并对回归因子作显著性检验,最后得到优化回归模型的回归系数 $\underline{b}$,协因数阵 $\underline{Q}_b$ 及单位权方差 S_0^2 。由回归方程能计算出变形区内任意点的地壳垂直位移值。计算时在 X、Y 坐标方向按一定间距把整个变形区分成格网点。由格网点上垂直位移值计算整体垂直位移更为可靠,同时还可以绘制出变形曲面图^[6]。

四、重力和水准测量的联合平差模型

与重力测量相似,对两期水准测量分别进行自由网平差,得到各测站相对高程变化向量 $\Delta \underline{H}_N$ 及其协因数矩阵 $\underline{Q}_{\Delta H N}$,单位权方差估值 S_0^2 。在计算高程时,采用以大地水准面为基准面的正常高系统。假设重力网和水准网两周期之间以及相互之间具有不变设计,且相应周期是在相同的中心时刻进行的。若重力网与高程网只有部分迭合时,在进行联合平差前,必须将结果采用相似变换法变换到以迭合点为基准参考点的相同参考系。如果具有大量观测资料如多期的重力和水准观测时,可采用最小二配置法进行联合平差。最小二乘配置法的关键在于如何确定重力变化和高程变化之中具有相关性质的信号向量的自协方差和互协方差函数,对此法这里不多作叙述,参见[2]和[6]。本文所采用的方法是将重力变化用重力—高程因子化为高程变化,然后进行联合平差。地壳的垂直位移量等于大地水准面变化和正高(或正常高)变化之和。大地水准面的变化一般由大的地质构造活动,板块飘移所引起,必须通过对大区域的重力测量才能确定,且相对于正高或正常高变化来说很小。这里用正常高变化来近似表示地壳的垂直变形。

重力变化和高程变化之间的函数关系只有在一定假设条件下,才能求得它们之间的近似公式,其中最常用的有自由空气模型和布格模型。

自由空气模型:

$$C_f = \frac{\Delta g}{\Delta H} = -\frac{2g}{R} \approx -0.3086 \text{ (毫伽/米)} \quad (21)$$

布格模型:

$$C_b = \frac{\Delta g}{\Delta H} = -\frac{2g}{R} + 2\pi k \rho \approx -0.2. \text{ (毫伽/米)} \quad (22)$$

其中: C_f : 重力—高程因子; R : 地球平均半径,取 6370 公里; k : 重力常数, $k = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ S}^{-2}$; ρ : 布格板块平均密度,取 $\rho = 2.6 \text{ g/cm}^3$ 。

自由空气模型是假设地球内部未发生物质移动,重力变化系由于测站点的随机升降所引起;而布格模型系假设重力变化是由地壳大面积升降所引起。在布格模型中,大地水准面变化约为地面点位移的百分之一 (Strang Van Hees [3]),因此可忽略不计,地壳的绝对位移可认为等于正高(或正常高)变化值。许多学者在地区、火山区域试验基线上对重力—高程因子进行了测试研究,一般落在 $-0.17 \sim -0.31$ (毫伽/米) 之间 (Biro [1])。

在具有大量重复重力和水准测量的情况下,采用回归分析方法来计算重力—高程因子为宜。

$$\text{令} \quad C_i = \frac{\Delta g_i}{\Delta H_i} = B + f(x_i, y_i) \quad (23)$$

其中

$$B = -\frac{2g}{R} \quad \text{或} \quad B = -\frac{2g}{R} + 2\pi k_0$$

$$f(x_i, y_i) = a_{00} + a_{10}x_i + a_{01}y_i + a_{20}x_i^2 + \dots,$$

以重力变化值 Δg 以及高程变化值 ΔH 作为观测值, 由回归计算得到多项式函数 $f(x_i, y_i)$ 的回归系数, 并作显著性检验, 最后求得各点的重力—高程因子:

$$C_i = B + \sum_{k,l=0}^{k,l=m} a_{k,l} x_i^k y_i^l \quad (24)$$

整个地区的平均重力—高程因子:

$$\bar{C} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i \quad (25)$$

需注意的是, Δg 、 ΔH 必须在相同参考系。有了 C_i 或 $\bar{C}$ 之后, 即可按式 (14)、(15) 计算由重力测量得到的高程变化及其协方差矩阵。

由于由绝对重力变化换算得到的是相对于大地水准面的绝对高程变化, 而重复水准测量得到的是相对于水准网重心的相对高程变化。在进行联合平差前, 必须将两种测量的平差结果换算到相同的参考系。本文采用以水准网全部点为基准的内部参考系, 为此对 ΔH_G 和 $Q_{\Delta H G}$ 作相似变换:

$$\underline{Q}_{\Delta H G} = \underline{S} \underline{Q}_{\Delta H G} \underline{S}^T \quad (26)$$

$$\underline{H}'_G = \underline{S} \underline{\Delta H}_G \quad (27)$$

$\underline{S}$ 为相似变换矩阵:

$$\underline{S} = \underline{I} - \underline{G}(\underline{G}^T \underline{G})^{-1} \underline{G}^T \quad (28)$$

其中:

$$\underline{G} = (\underline{1} \dots \underline{1})^T, \quad \underline{I} \text{ 为单位矩阵。}$$

若重力网和水准网只有部分网点叠合时, 则应以迭合点组 i 为基准参考系进行相似变换。

重复重力和水准联合平差的基本思想是: 在相同参考系和时间间隔里由重力及水准测量方法获得的地面点的垂直位移具有相同的期望值。联合平差的函数模型为:

$$\begin{pmatrix} \Delta H_N \\ \Delta H'_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_N \\ V_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ E \end{pmatrix} \Delta H_K \quad (29)$$

或简写为:

$$\underline{l} + \underline{V} = \underline{A} \Delta \underline{H}^K \quad (30)$$

$\underline{l}$ 称超观测向量, 其随机模型为:

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}_{11} &= \begin{pmatrix} \underline{\Sigma}_{\Delta H N} & 0 \\ 0 & \underline{\Sigma}'_{\Delta H G} \end{pmatrix} = \underline{S}_0^2 \begin{pmatrix} \underline{Q}_{\Delta H N} & 0 \\ 0 & \underline{Q}_{\Delta H G} \end{pmatrix} \\ &= \underline{S}_0^2 \underline{Q}_{11} = \underline{S}_0^2 \underline{P}_{11}^+ \end{aligned} \quad (31)$$

$\underline{S}_0^2$: 为使观测值的协因数阵协调的方差因子。联合平差模型属于亏秩相关平差, 按范数

最小和未知参数方差和最小原则得如下公式:

$$\overline{N} \Delta H_k = \overline{n} \quad (32)$$

$$\overline{N} = \overline{A}^T \overline{P} \overline{A} = \overline{Q}_{\Delta HN}^+ + \overline{Q}_{\Delta HG} \quad (33)$$

$$\overline{n} = \overline{A}^T \overline{P} \overline{1} = \overline{Q}_{\Delta HN}^+ \Delta H_N + \overline{Q}_{\Delta HG}^+ \Delta H'_G \quad (34)$$

$$\Delta H_k = \overline{Q}_{\Delta Hk} \overline{n} \quad (35)$$

$$\overline{Q}_{\Delta Hk} = \overline{N}^+ = (\overline{N} + \overline{G} \overline{G}^T)^{-1} - \overline{G} \overline{G}^T \quad (36)$$

$$\overline{G}^T = \frac{1}{n} (1 \ 1 \ \dots \ 1) \quad (37)$$

$$\overline{V} = \overline{A} \Delta H_k - \overline{1} \quad (38)$$

$$S_{Gk}^2 = \frac{\overline{V}^T \overline{P} \overline{V}}{f_k} = \frac{\overline{V}_N^T \overline{Q}_{\Delta HN}^+ \overline{V}_N + \overline{V}_G^T \overline{Q}_{\Delta HG}^+ \overline{V}_G}{f_k} \quad (39)$$

$$f_k = 2n - n + 1 = n + 1 \quad (40)$$

$$\sum_{\Delta Hk} = S_{Gk}^2 \overline{Q}_{\Delta Hk} \quad (41)$$

由上述公式得到联合平差的高程变化向量 ΔH_k 及其协方差阵 $\sum_{\Delta Hk}$, 单位权方差 S_{Gk}^2 , 通过与单独水准量所得到的相应值 ΔH_N , $\sum_{\Delta HN}$ 和 S_{GN}^2 进行比较, 来论证联合平差对水准测量平差的改善。

五、重力—水准联合平差与单独水准测量平差比较准则

对于给定地区地壳垂直形变的监测, 目的在获得最接近真实变形的变形值, 通过假设检验确定在一定显著水平和检验功效下能发现的为研究感兴趣的变形向量的下限值。本文不仅仅在于建立重力—水准联合平差模型, 同时通过与水准测量平差相比较, 进一步阐明联合平差的优点, 对平差成果的改善程度和需要解决的问题。本文采取以下几个方面进行比较:

①地壳整体垂直变形的确定; 只有具有重复绝对重力测量时才有可能, 整体垂直位移的确定及精度在第三节已作详细讨论。②地壳垂直变形的精度比较准则; ③变形监测网的可靠性比较准则; ④变形监测网灵敏度比较准则。

1、精度比较准则。精度比较的方差准则:

$$SP \{ \sum_{\Delta H} \} = \min \quad (42)$$

对协方差阵作谱分解, 则方差准则可写为:

$$SP \{ \sum_{\Delta H} \} = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i = \min \quad (43)$$

其中 μ 为特征根个数。 λ_i 为 $\sum_{\Delta H}$ 的特征值。

与方差准则相平行, 也可用地壳垂直变形向量的超置信椭球的“体积”准则:

$$V \sim \sum_{i=1}^{\mu} \Delta_i \sim \prod_{i=1}^{\mu} \lambda_i = \sqrt{\det(\underline{\Sigma}_{\Delta H})} = \min \quad (44)$$

此外还有以最大特征值作为衡量精度的准则以及衡量精度均匀性的其它准则:

$$\lambda_{\max} = \min \quad (45)$$

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}} = 1 \quad (46)$$

$$\lambda_{\max} - \lambda_{\min} = \min \quad (47)$$

对方差阵 $\underline{\Sigma}_{\Delta H N}$ 和 $\underline{\Sigma}_{\Delta H k}$ 按上述准则进行比较, 可得到联合模型精度改善的程度。

2、可靠性比较准则。可靠性问题包括平差系统发现模型误差, 发现单个或多个观测值中的粗差的能力以及观测值中不能发现的粗差对平差结果的影响等问题, 即网的总体可靠性, 内部可靠性和外部可靠性问题。本文着重讨论网的内部可靠性和外部可靠性准则。

网的内部可靠性可由观测值 l_i 的多余观测数 r_i 来衡量, 假设第 i 个观测值含粗差 Δ_i , 若将 Δ_i 作为附加参数进行平差, 得到 Δ_i 的估值 $\hat{\Delta}_i$ 及其中误差, 它们之比构成的统计量为 t -分布的随机变量 (Pelzer[7]):

$$F_i = \frac{\hat{\Delta}_i}{S_0 \sqrt{q_{\Delta i}}} = - \frac{\underline{e}_i^T \underline{P} \underline{V}}{S_0 \sqrt{\underline{e}_i^T \underline{P} \underline{Q}_{vv} \underline{P} \underline{e}_i}} \sim t_{f-1} \quad (48)$$

其中 S_0 为包括附加参数的平差模型的单位权中误差, f 为自由度, $\underline{e}_i$ 为第 i 个元素为 1 的单位向量。在零假设 $E(\hat{\Delta}_i) = 0$ 被拒绝时非中心参数 δ_i 的临界值为:

$$\delta_i = K_i \sqrt{r_i} \quad (49)$$

K_i 称可控性值, 为粗差与观测误差的比值, r_i 为观测值的多余观测数, 为

$$r_i = \underline{e}_i^T \underline{Q}_{11} \underline{e}_i - \underline{e}_i^T \underline{P} \underline{Q}_{vv} \underline{P} \underline{e}_i \quad (50)$$

在观测值互不相关时权阵 $\underline{P}$ 为对角阵, 这时 r_i 为:

$$r_i = (\underline{Q}_{vv} \underline{P})_{ii} = \frac{\sigma_{vi}^2}{\sigma_{li}^2} = 1 - \frac{\hat{\sigma}_{li}^2}{\sigma_{li}^2} = 1 - \frac{1}{n_i} \quad (51)$$

n_i 称为观测值 l_i 的等价观测数, 内部可靠性准则可表示为:

$$r_{\min} = \max \quad (52)$$

在一定显著性水平 α (如 $\alpha_0 = 0.05$) 和检验功效 β (如 $\beta_0 = 0.8$) 下单个观测值中能被发现的粗差下限值 $V_0 l_i$ 为:

$$V_0 l_i = \delta_0 \sigma_{li} / \sqrt{r_i} \quad (53)$$

δ_0 为非中心参数限值, 可由 α_0, β_0 查表或诺模图。

本文所提出的联合平差模型系先对水准测量和重力测量进行分别平差, 然后将平差结果作为观测值进行联合平差, 高程变化向量 ΔH_k 在联合平差中的可靠性因为加进重力测量而

增加了, 该可靠性可由多余观测数 r 表示:

$$r_i = 1 - \frac{(\hat{\sigma}_{\Delta H k}^2)_i}{(\hat{\sigma}_{\Delta H N}^2)_i} \quad (54)$$

外部可靠性系通过水准高差中不能发现的粗差 Δ_i 对未知参数或其函数的影响来表示, 对两期水准测量所得高程变化向量的影响为:

$$\underline{\nabla}_{HN}^i = (\underline{A}_N^T \underline{P}_N \underline{A}_N) + \underline{A}_N^T \underline{P}_N \underline{e}_i \Delta_i \quad (55)$$

$\underline{A}_N$ 、 $\underline{P}_N$ 表示水准测量平差中的图形矩阵和观测值权矩阵。 Δ_i 对联合模型中高程变化向量 $\underline{\Delta H}_k$ 的影响为:

$$\underline{\nabla}_{Hk}^i = (\underline{\bar{A}}^T \underline{\bar{P}}_{11} \underline{\bar{A}}) + \underline{\bar{A}}^T \underline{\bar{P}}_{11} \underline{\nabla}_{HN}^i \quad (56)$$

$\underline{\bar{A}}$ 、 $\underline{\bar{P}}_{11}$ 的意义参见式 (30) 和 (31)。

$\underline{\nabla}_{HN}^i$ 与 $\underline{\nabla}_{Hk}^i$ 是与参考系有关的可变量, 在相同参考系下, 可以直接比较 $\underline{\nabla}_{HN}^i$ 和 $\underline{\nabla}_{Hk}^i$ 。由它们按下式计算出的平均影响值 (称影响因子) 是与参考系选取无关的标量。

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{HN}^i &= (\underline{\nabla}_{HN}^i)^T \sum_{\Delta HN}^+ \underline{\nabla}_{HN}^i \\ \bar{\nabla}_{Hk}^i &= (\underline{\nabla}_{Hk}^i)^T \sum_{\Delta Hk}^+ \underline{\nabla}_{Hk}^i \end{aligned} \quad (57)$$

计算每个观测值可能存在的粗差对平差参数的影响因子, 可得到外部可靠性准则:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\max}^{HN} &= \max(\bar{\nabla}_{HN}^i, \forall_i) \stackrel{!}{=} \min \\ \bar{\Delta}_{\max}^{Hk} &= \max(\bar{\nabla}_{Hk}^i, \forall_i) \stackrel{!}{=} \min \end{aligned} \quad (58)$$

若下式成立, 则表示联合平差的外部可靠性较单独水准平差提高了。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nabla}_{\max}^{Hk} &< \bar{\nabla}_{\max}^{HN} \\ \bar{\nabla}_{Hk}^i &< \bar{\nabla}_{HN}^i \end{aligned} \right\} \forall_i \quad (59)$$

3、灵敏度比较准则。变形监测网的灵敏度表示在给定概率 (显著水平 α_0 , 检验功效 β_0) 下显著性变形向量的下限值。或反过来也可理解为, 对某一变形向量, 认为它是显著性变形向量的检验功效和显著水平。对于变形向量 $\underline{\Delta H}$ 的零假设 H_0 和备择假设 H_A 为:

$$H_0: E(\underline{\Delta H}) = \underline{0} \quad (60)$$

$$H_A: E(\underline{\Delta H}) = \underline{\Delta H} \neq \underline{0} \quad (61)$$

在 H_0 成立时统计量 F' 满足:

$$P\{F' > F_{\mu, f, 1-\alpha} | H_0\} = \alpha, \quad (62)$$

其中

$$F' = \frac{\underline{\Delta H}^T \underline{Q}_{\Delta H}^+ \underline{\Delta H}}{\mu \cdot S_0^2} \sim F_{\mu, f} \quad (63)$$

μ 为 $Q_{\Delta H}^+$ 的秩, f 为计算单位权方差 S_0^2 的自由度。 H_A 成立时的非中心参数 ω 为:

$$\omega = \frac{\Delta H^T Q_{\Delta H}^+ \Delta H}{\sigma_0^2} \quad (64)$$

σ_0^2 为 S_0^2 的期望。 ω 是自由度 μ , $f = \infty$, 显著水平 α 和检验功效 β 的函数:

$$\omega = \omega(\mu, f = \infty, \alpha, \beta) \quad (65)$$

在给定 $\alpha_0 = 0.05$, $\beta_0 = 0.80$ 下的非中心参数用 ω_0 表示, α_0 , β_0 的选取与对显著性的要求有关。

以上称整体检验, 当零假设拒绝时, 逐点作局部显著性变形检验, 可以确定出显著性变形点, 第六节表 2 给出了显著性变形点个数。

高程变化向量 ΔH 可以表示为某一形式向量 q 和标量 a 的乘积, q 应为最可能发生的变形量或人们最感兴趣的变形向量。一般对形式向量进行单位化。(64) 可表示为:

$$\omega = \frac{a^2 q^T Q_{\Delta H}^+ q}{\sigma_0^2} \leq \omega_0 \quad (66)$$

标量 a 可作为网的灵敏度准则:

$$a = \sigma_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{q^T Q_{\Delta H}^+ q}} = \sigma_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{R}} = \min \quad (67)$$

对 $Q_{\Delta H}$ 作谱分析, 则有 $R = q^T Q_{\Delta H}^+ q = q^T S \Lambda^+ S^T q$

$$= \sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j^{-1} (q^T S_j) (q^T S_j) = \sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j^{-1} \cos^2(q, S_j) \quad (68)$$

当形式向量 q 与 $Q_{\Delta H}$ 的最大特征值 λ_{max} 所对应的特征向量 (本质特征向量) 平行时, R 取最小值, 而 a 取最大值:

$$a_{max} = \sqrt{\omega_0 \lambda_{max}} \quad (69)$$

当 q 与 $Q_{\Delta H}$ 的非零最小特征值 λ_{min} 所对应的特征向量 (最优特征向量) 平行时, R 取最大值, a 取最小值:

$$a_{min} = \sigma_0 \sqrt{\omega_0 \lambda_{min}} \quad (70)$$

对任意的形式向量 q , 变形监测网能发现的显著性变形向量 ∇ 满足是不等式:

$$\sigma_0 \sqrt{\omega_0 \lambda_{max}} q \geq \nabla \geq \sigma_0 \sqrt{\omega_0 \lambda_{min}} q \quad (71)$$

由灵敏度分析得知, 变形监测网的某一未知参数函数 (如表示变形的高程变化或坐标变化的向量) 协因数阵的最大特征值所对应的特征向量应尽量与所预计的变形向量正交。否则应对网形和观测方案进行修改。在某种意义上, 变形监测网灵敏度准则与精度准则是一致的, 即 (45) 式。

六、算 例

图 2 为模拟的水准网和重力网, 共 35 个网点, 为不变设计。假设水准网位于大地水准面上, 第二期发生的盆状沉陷由近似公式表示:

$$\Delta H(x, y) = \left\{ \cos \left(1 + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{R}} \right) \pi - 1 \right\} f \quad |x| < R, |y| < R$$

$$\Delta H(x, y) = 0 \quad |x| > R, |y| > R \quad (72)$$

取 $R = 700$ 公里, $f = 0.05$ 。

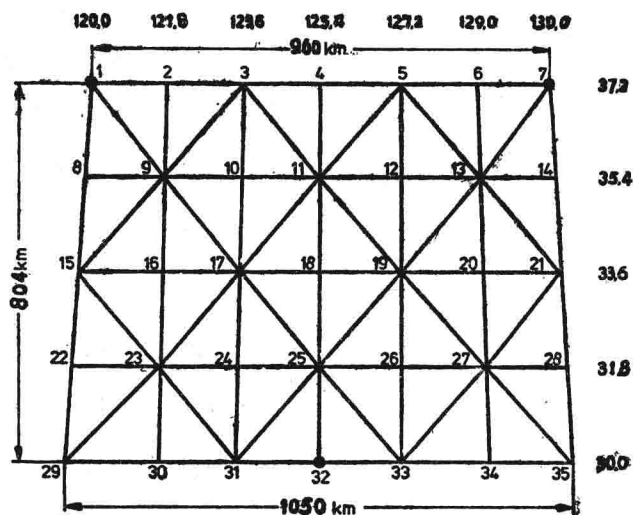


图 2

在考虑水准测量偶然误差的同时又考虑系统误差的影响 (Pelzer[4])。A、B 两水准点之间的高差 dh_{AB} 的中误差由下式进行模拟计算:

$$\sigma_{dh}^{AB} = R' \sqrt{1 + nq^2} \cdot \sqrt{n} \sigma_e = R' k \sqrt{n} \sigma_e = R' k \sigma \quad (73)$$

其中: σ_e 一个测站的偶然误差, 取 $\sigma_e = 0.1$ 毫米,

$$q = \frac{\sigma_A}{\sigma_e}, \sigma_A \text{ 为测站的系统误差, 取 } q = 0.05,$$

$$n = \frac{S}{2d}, S \text{ 为水准线路长度, } d \text{ 为测站平均视距, 取 } d = 30 \text{ 米。}$$

R' 为标准正态随机数。

模拟重力观测值按 1980 年大地参考系统正常重力值公式计算:

$$r_i = g_e (1.0 + P \sin^2 \phi_i) \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi_i} \quad (74)$$

其中 $g_e = 978032.677$ (毫伽): 赤道正常重力

$P = 0.001931851353$: 重力扁率

$e^2 = 0.0066943800229$: 第一偏心率平方

ϕ_i : 大地纬度

在模拟计算中取绝对重力测量精度 $\sigma_{Ra} = \pm 5$ 微伽, 分别取相对重力测量精度 $\sigma_{Rr} = \pm 5$ 微伽, ± 7.5 微伽, ± 10.0 微伽, ± 12.5 微伽。

整体垂直位移及其精度按 (17)、(18) 计算, 或先对 ΔH_G 进行回归计算, 由回归曲

面上的格网点值计算，计算所得的结果与整体垂直位移的理论值（由模拟高程变化值按(17)计算）列于表1。从表中可以看到，当 $\sigma_{Gr} \leq 7.5$ 微伽，无论是回归前，回归后计算出的整体垂直位移都能与其精度相分离，但回归后计算出的更接近真值。

表1. 整体垂直位移及其精度

新编 分类		模 型 整体垂直 位移真值 $\widetilde{B}_w(\text{mm})$	整体垂直位移计算值 $B_w(\text{mm})$				
			水 准 模 型	联合模型 $C = -0.25$ $\delta_{G_A} = \pm 5$ 微伽			
观 测 精 度			$\sigma_s = \pm 0.1\text{mm}$ $q = 0.05$	$\delta_{G_T} = (\text{微伽})$			
				± 5.0	± 7.5	± 10.0	± 12.5
回 归 前	B_w	-38.2	—	-29.1	-22.4	-18.2	-11.5
	B_{w1}		—	± 17.2	± 20.5	± 22.9	± 26.5
回 归 后	B_{w2}	-38.2	—	-41.6	-43.2	-46.1	-50.6
	B_{w1}		—	± 15.1	± 17.9	± 20.3	± 22.8

按精度准则公式 (43)、(44)、(45) 以及灵敏度准则公式 (67) 计算出的结果列于表2，并取不同的重力—高程因子C进行计算。可以看到不论C取何值，联合平差的精度和灵敏度都较单独水准平差提高了，当C接近自由空气模型的值时，提高的程度更大。表中最后一行 n_e 表示由局部检验所发现的显著性变形点个数。

表2 精度和灵敏度比较表

新 编 类 别		模 型 水准模型 $\sigma_s = 0.1\text{mm}$ $q = 0.05$ $d = 30.0\text{m}$	联合模型 $\delta_{Ga} = \delta_{Gr} = 5$ 微伽		
			重力—高程因子C		
			-0.35	-0.25	-0.15
$\Sigma \lambda \text{ mm}^2$		8815.2	3429.3	4816.0	6256.3
$\pi \lambda$		0.47×10^{66}	0.18×10^{53}	0.20×10^{58}	0.77×10^{61}
$\lambda_{max} \text{ mm}^2$		1865.9	709.7	998.4	1304.5
a		0.5664	0.3438	0.4129	0.4940
n_e		12	17	16	12

表3给出了各网点上高程变化在水准平差模型和联合平差模型中的误差 S_N ， S_{k1} 和 S_{k2} ，联合平差模型中分别取相对重力测量精度 $\sigma_{Gr} = \pm 5$ 微伽和 ± 12.5 微伽。由公式 (54) 计算出的联合平差模型的内部可靠性量度 r_{k1} 和 r_{k2} 也列于表中，联合平差模型的精度和内部可靠性较水准模型提高了。

外部可靠性按 (55)、(56) 和 (57) 计算的结果列于表 4, 假设第 40 个水准高差观测值中不可发现的粗差 $\Delta_{40} = 50$ 毫米, 可得到粗差对高程变化向量 ΔH_N 和 ΔH_k 的影响 ∇_{HN}^{40} , ∇_{Hk}^{40} , 以及影响因子 $\bar{\nabla}_{HN}^{40}$ 、 $\bar{\nabla}_{Hk}^{40}$ 。可以看到, 联合平差模型的外部可靠性有显著提高。

表 3 高程变化的精度及内部可靠性量度

点 号	S_N (mm)	S_{k1} (mm)	r_{k1}	S_{k2} (mm)	r_{k2}
1	19.7	12.7	0.58	15.6	0.37
2	18.1	12.4	0.53	16.0	0.22
3	14.5	11.1	0.41	13.6	0.12
4	16.2	11.8	0.47	15.2	0.12
5	14.5	11.1	0.41	13.6	0.12
6	18.1	12.7	0.51	16.1	0.21
7	19.7	12.9	0.57	15.6	0.37
8	18.5	12.8	0.52	16.4	0.21
9	13.2	10.0	0.43	11.9	0.19
10	14.2	10.4	0.46	13.2	0.13
11	11.1	8.9	0.36	10.7	0.07
12	14.2	10.4	0.46	13.2	0.14
13	13.2	10.0	0.43	11.9	0.19
14	18.5	13.0	0.51	16.5	0.20
15	15.5	11.0	0.50	14.5	0.12
16	14.9	10.9	0.46	13.8	0.14
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

此外, 表 5 给出了当形式向量 $\underline{q}$ 为模拟的盆状下沉变形 ΔH_F (72) 和等于高程变化向量协方差阵的本质特征向量 $\underline{\mu}_{WN}$ 、 $\underline{\mu}_{WK}$ 时, 通过显著性变形的总体检验能被发现的变形向量。计算时取显著水平 $\alpha_0 = 0.05$, 检验功效 $\beta_0 = 0.8$, 由表看出, 当 $\underline{q}$ 等于本质特征向量时, 总体检验能发现的变形向量大得多, 而且在单独水准平差模型中要比在联合平差模型中更大。这与表 2 中的灵敏度比较结果是一致的。

表 4 外部可靠性计算

点 号	Δ_{HN}^{40}	Δ_{HK}^{40}	
1	-3.20000	-1.71203	$\Delta_{40} = 50 \text{ (mm)}$
2	-2.20000	-1.12909	$\bar{V}_{HN}^{40} = 2.50586 \text{ (mm)}$
3	-2.20000	.00993	
4	-1.20000	.85042	$\bar{V}_{HK}^{40} = 1.67649 \text{ (mm)}$
5	-1.80000	1.11479	$ma \times (V_{HN16}^{40}) = -14.70 \text{ mm}$
6	-1.90000	1.06572	
7	-2.00000	.97190	$ma \times (V_{HK16}^{40}) = -9.13 \text{ mm}$
8	-4.30000	-2.92519	
9	-1.20000	-1.85316	
10	-1.10000	.68241	
11	2.10000	-1.41893	
12	2.00000	1.23022	
13	2.00000	1.14771	
14	2.00000	1.09311	
15	-6.40000	-4.06243	
16	-14.70000	-9.12905	
⋮	⋮	⋮	

表 5 灵敏度计算

ΔH_F (mm)	V_{DK} (mm)	V_{DN} (mm)	u_{WK} (mm)	v_{WK} (mm)	u_{WN} (mm)	v_{WN} (mm)
- 3.0	- 1.2	- 1.7	- .16	25.3	- .22	- 49.7
-17.0	- 7.0	- 9.6	- .14	23.6	- .18	- 41.0
-32.0	-13.2	-18.1	- .08	13.0	- .10	- 22.2
-38.0	-15.7	-21.5	- .01	- 2.4	- .00	0.0
-32.0	-13.2	-18.1	- .10	-16.1	.10	+ 22.2
-17.0	- 7.0	- 9.6	- .17	-27.4	.18	+ 41.0
- 3.0	- 1.2	- 1.7	- .17	-28.5	.22	+ 49.7
-14.0	- 5.8	- 7.9	- .20	32.1	- .23	- 51.0
-42.0	-17.3	-23.3	- .16	26.1	- .17	- 39.2
-70.0	-28.9	-39.7	- .09	14.8	- .10	- 22.5
-81.0	-33.4	-45.9	- .00	- 1.2	.00	0.0
-70.0	-28.9	-39.7	- .10	-17.0	.10	+ 22.5
-42.0	-17.3	-23.6	- .17	-27.6	.17	+ 39.2
-14.0	- 5.8	- 7.9	- .21	-34.0	.23	+ 51.0
-18.0	- 7.4	-10.2	- .23	35.5	- .22	- 48.7
-53.0	-21.9	-30.0	- .19	30.5	- .18	- 40.6
-87.0	-40.0	-49.3	- .10	16.5	- .10	- 21.3
-100.0	-41.2	-56.6	- .00	- 0.4	.00	0.0
-87.0	-40.0	-49.3	- .10	-16.4	.10	+ 21.8
-53.0	-21.9	-30.0	- .19	-30.6	.18	+ 40.6
-18.0	- 7.4	-10.2	- .22	-36.2	.22	+ 48.7
-10.0	- 4.1	- 5.6	- .26	42.4	- .24	- 52.5
-39.0	-16.1	-22.1	- .20	33.6	- .18	- 40.2
-69.0	-28.5	-39.1	- .12	14.2	- .10	- 23.1
-81.0	-33.4	-45.9	- .00	0.3	.00	0.0
-69.0	-28.5	-39.1	- .11	-18.1	.10	+ 23.1
-39.0	-16.1	-22.1	- .19	-31.2	.18	+ 40.2
-10.0	- 4.1	- 5.6	- .24	-38.8	.24	+ 52.5
- 1.0	- 0.4	- 0.6	- .27	44.3	- .23	- 51.4
-13.0	- 2.2	- 7.4	- .23	37.7	- .19	- 43.0
-31.0	-12.8	-17.6	- .13	20.8	- .10	- 23.1
-38.0	-15.7	-21.5	- .00	1.2	- .00	0.0
-31.0	-12.8	-17.6	- .11	-19.1	.10	+ 23.1
-13.0	- 2.2	- 7.4	- .20	-32.4	.19	+ 43.1
- 1.0	- 0.4	- 6.6	- .24	-38.8	.23	+ 51.9