

2010/1/4

233

海岸线是几维？它不是一维的，也不是二维的，而是介于1与2之间的一个分数维数。分形几何学有广泛的物理应用。



# 分形和分维

高柏林

普通的几何对象，具有整数维数。零维的点、一维的线、二维的面、三维的立体，乃至四维“时空”，是人们熟知的例子。然而最近十几年，具有不必是整数的分维 (fractal dimension) 的几何对象——分形 (fractals)，引起了自然科学工作者的广泛注意。

自然界中许多事物，具有自相似的“层次”结构，在理想情况下，甚至是无穷多层次。适当地放大或缩小几何尺寸，整个结构并不改变。不少复杂的物理现象，背后是反映这类层次结构的分形几何学。物理学家们提出了处理这类问题的有效的数学方法——重正化群技术。可惜重正化群的精神，还一直未能脱离物理的躯体，抽象为干干净净的数学。因此，也还没有引起数学家们足够的重视。可是，作为重正化群背景的分形几何学，早就是简单而美妙的数学篇章。数学家们在六十多年前就准备了最基本的概念。最近十年，主要由于曼德尔勃罗特 (B. B. Mandelbrot) 的持续努力，分形和分维正在成为“热门”。在现代电子计算机的图形显示屏幕上，分

形成了一门新的艺术；物理学家也学会了在实验室中测量分形对象的维数。分维的概念，已经开始出现在

## 特征尺度和“无标度性”

诸葛亮《卜居》里有半句话说：“夫尺有所短，寸有所长”。用现代科学术语，就是说事物有它自己的特征长度，要用恰当的尺去测量。用尺来量万里长城，或者用寸来量大肠杆菌，前者失之太短，后者又嫌太长，都是不适当的，俗话说“海水不可斗量”，也包含着这层意思。

特征长度、特征时间……等等特征尺度，是很有益的概念，可以用来想事推理，简便地得出带普遍性的结论。举一个例子，从特征尺度考虑，可以推测计算机的微型化会达到什么程度。元件微型化以分子尺度为极限，还会有很大的发展余地：打印机、显示屏、键盘之类与人发生直接关系的设备，必须与人体尺度一致，不可能无限地缩小。火柴盒似的荧光灯，指甲盖大小的键盘，微雕艺术品一样的打印结果，为了表明现代技术的威力，当然不妨制造几件，但决不会成为常规产

品。将来的电子计算机，会只见“外部设备”运转，不知主机何在。在建立和求解数学模型时，抓住特征尺度更是关键环节。一个好的模型，往往要涉及三个层次。一个由特征尺度决定的基本层次，更大尺度的环境用“平均场”，决定外力的“位势”等等替代。而更小尺度上的相互作用，化成了摩擦系数、扩散系数这些通常取自实验的“常数”。如果要从理论上推算摩擦或扩散系数，那就必须转入更细的层次，从物质运动的更为微观的图象出发。看准了特征尺度，问题就比较容易解决。

有没有不存在特征尺度的问题？没有特征尺度，就必须同时考虑从小到大的许许多多尺度（或者叫“标度”），这显然是更为困难的事情。这类以“无标度性”为特点的问题，往往是物理学中的难题。相变和湍流，是两个著名的例子。

相变，或者更确切些，连续相变，是指温度、压力等等“控制参数”缓慢变化时，物质的宏观状态

没有特征尺度的问题？没有特征尺度，就必须同时考虑从小到大的许许多多尺度（或者叫“标度”），这显然是更为困难的事情。这类以“无标度性”为特点的问题，往往是物理学中的难题。相变和湍流，是两个著名的例子。

相变，或者更确切些，连续相变，是指温度、压力等等“控制参数”缓慢变化时，物质的宏观状态

高柏林，中国科学院学部委员，中国科学院理论物理研究所副所长，研究员，本刊副主编。

在某个参数值由于对称性改变而发生突变。一块处于高温下的磁铁，微观磁矩杂乱无章地排列着，表现不出宏观的磁性。温度逐渐下降到“居里点”，突然沿某个方向出现了宏观磁矩。对称性降低了（从绕一切方向的转动对称，降到沿宏观磁矩方向的一种转动），但进入了更为有序的磁化状态。在这里，磁矩之间的关联长度是一个自然的特征尺度。我们知道，磁体中磁矩之间的关联是按指数规律衰减的，每增大一个关联长度的距离，关联就衰减 $e$ 倍。在临界点（居里点）上，关联长度为无穷大。既然是无穷大，那么不管你用的尺子是大大还是小小，总是无穷大的。也就是说与用的尺子（标度）无关，这就是“无标度性”。如果接近临界点而又恰好不在临界点上，这时关联长度虽不是无穷大，但仍很大。在大于微观尺度而小于关联长度的尺度范围内，也应该存在着与所用尺子无关的“无标度性”。

存在无标度性，就可以在很宽的范围作尺度变换。物理系统在尺度变换下的不变性，决定相变的基本定量特征——各种各样的“临界指数”。七十年代初，威耳孙（K. G. Wilson）发展这一思想，引用重整化群技术，解决了连续相变这个难题。威耳孙因而获得了1982年度的诺贝尔物理学奖。在诺贝尔委员会的决议中指出，他的方法还可以用来处理湍流这类难题。

湍流也是自然界中极为普遍的现象。小至宇宙中缭绕的青烟，巨至木星大气中的涡流，都是看起来十分紊乱的流体运动。粗略地说，流体宏观运动的能量，经过大、中、小、微等许许多多尺度上的湍流，最后转化成分子尺度上的热运动。同时涉及大量不同尺度上的运动状态，这正是从理论上描述湍流的困难所在，也是借助“无标度性”解决问题的希望所在。

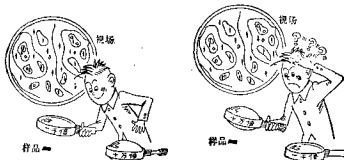


图1 如果想着眼为最近（但仍高于）居里点时磁体内部微观磁矩究竟如何排列，可以使用中子散射等手段，或者用电子计算机模拟。漫圈中的十万倍放大镜头当然是找不到的，但漫圈却形象地说明了人们真“看”到那些图像时会多么吃惊。原来每一个微观磁矩都有一定的影响范围，要求影响所及的其他磁矩向自己“看齐”；然而每个磁矩却有同等的权力要求别人向自己“看齐”，大家还是达不成协议，表现不出宏观磁性。这些影响范围可以想象成不同尺寸的取向“花斑”，它们没有固定的边界和位置，此起彼伏，若隐若现，而且花斑之中套花斑，小至原子尺度，大到可与磁体的宏观尺寸比拟。难怪把一千倍放大镜头换成十万倍时，视野中还是相间的图像。这就是“无标度性”。

现在知道，相变点附近的涨落花斑，发达湍流中的高旋涡区域，都

是分形的物理实例。在进一步介绍分形之前，我们先想想另一个问题。

### 英国的海岸线有多长？

曼德尔勃罗特在一本起了很大推动作用的著作中提出的这个问题，并不容易明确回答。它的答案依赖于测量时所使用的尺度。如果用公里作测量单位，从几米到几十米的一些曲折就会被忽略。改用米作单位，测得的总长度会增加，但是一些厘米量级、甚至更小的弯曲曲曲之处，还是不能准确反映出来。即使抛开涨潮落潮这些使海岸线位置无法严格定义的因素，水陆分界线也是具有各种层次的不规则性的十分复杂的几何对象。

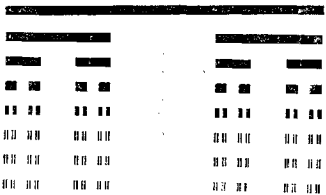
作为一种实际事物，海岸线在大小两个方向都有自然的限制。取不列颠岛外缘上几个突出点，用直线把它们连起来，得到海岸线长度的一种下界。使用比这些直线段更长的尺度是没有意义的（谁也不使用“光年”这样的天文单位来测量地球上两点间的距离）。另一方面，海边沙石的最小尺度莫过于原子和分子的大小，使用更小的尺度也是没有意义的，在这两个自然限度之间，

存在着可以变化许多个数量级的“无标度”区。在无标度区内，长度显然不是海岸线的很好的定量特征。我们将看到，分维将是更合适的概念。

为了更直观地理解这一点，我们不妨借助于数学家寇赫（H. von Koch）提出的几何模型。从一个正方形的“岛”出发，始终保持面积不变，可以把它的“海岸线”变得无限曲折，其总长度也不断增加，趋向无穷大。面积有限，而周长无穷，普通的规整几何图形，不可能具有这种性质。以后将看到，分维才是定特岛海岸线的更精确的特征量。用不同规则构造出的寇赫岛，海岸线分维均介于1到2之间。英国海岸线的分维也应大于1。各地海岸线的分维不尽相同，大致在1.2左右。

其实，从一维光滑曲线出发，也不难构造出各种各样的分形。设想一条正弦曲线，在上面添加一条周期更短、幅度更小的正弦曲线，

科学杂志



$$D_0 = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.630929 \dots$$

图2 取(0,1)线段三等分之后舍去中段,剩下的每段再三等分舍去中段,……如此无限次划分和舍去,最后的极限仍是无穷多个点的集合,这就是一种康托尔集合。它是一种处处粗糙的对象,其拓扑维数 $d=0$ 。取第二行图形的左半部分作为一个对象,把尺寸放大 $l=3$ 倍,就得到 $N=2$ 个原来的对象。套用公式算得它的分维是0.630929…。

如此不断迭加下去,直至无穷。虽然每一条正弦都是光滑的连续曲线,无穷条正弦迭加的结果,却可能出现断裂或折角。方形波或锯齿波不就是这样用三角级数(傅里叶级数)表示吗?在特定情况下,还可

能得到处处连续、但处处无导数的曲线——所谓韦尔斯特拉斯(K. Weierstrass)函数。韦尔斯特拉斯函数决不是没有实际意义的数学游戏。布朗粒子的轨迹,就是这种函数——这是后话。

### 拓扑维和分维

维数是几何对象的一个重要特征量。直观地说,维数就是为了确定几何对象中一个点的位置所需的独立坐标的数目,或者说独立方向的数目。在平直的欧氏空间中,维数是很自然的:地图上的点有经纬两个坐标,一只集装箱有长、宽、高三个尺寸,它们分别是二维和三维的几何对象。对于更抽象或更复杂的对象,只要在每个局部可以和欧氏空间对应,也很容易确定出维数。即使把这样的几何对象连续地拉伸、压缩、扭曲,维数也不会改变。这就是拓扑维数,以后用字母 $d$ 表示。

维数和测量有密切关系。为了测量一块平面图形的面积,可以用一个边长为 $l$ 、面积为 $l^2$ 的“标准

方块去覆盖它。所得的方块数目就是它的面积(以 $l^2$ 为单位):

$$\frac{\text{平面图形面积}}{l^2} = \text{有限数} = \text{面积}.$$

如果用标准长度 $l$ 去测面积,那就得到无穷大:

$$\frac{\text{平面图形面积}}{l} = \infty.$$

相反,用标准立体 $l^3$ 去测量没有体积的平面,结果是零:

$$\frac{\text{平面图形面积}}{l^3} = 0.$$

我们看到,用 $n$ 维的标准体 $l^n$ 去测量某个几何对象时,只有 $n$ 与拓扑维 $d$ 一致时,才能得到有限的结果。如果 $n < d$ ,结果是 $\infty$ ;如果 $n > d$ ,则得到0。这个简单的观察,以后要推广来定义更普遍的维数。

现在换一种方式来考虑问题。把一个正方形的每个边长增加为原来的3倍,得到一个大正方形,它正好等于 $3^2=9$ 个原来的正方形。类似地,把一个正方体的每个边长增加为原来的3倍,就得到 $3^3=27$ 个原来大小的立方体。推而广之,一个 $d$ 维几何对象的每个独立方向,都增加为原来的 $l$ 倍,结果得到 $N$ 个原来的对象。这三个数之间的关系是 $l^d=N$ 。读者不难验证,对于一切普通的几何对象,这个简单关系都是成立的。现在把这个关系式两面取对数,写成

$$d = \frac{\ln N}{\ln l}.$$

我们就完成了一次“飞跃”: $d$ 不必再是整数。以后把这样推广定义的维数称为分维,用大写字母记为 $D_n$ 。为什么加了个下标,以后再解释。

前面说到的范赫岛,以及康托尔集合、谢尔宾斯基(W. Sierpiński)海绵或谢尔宾斯基地毯,都是典型的构造简单的分维对象,不难根据以上定义算出它们的分维。

对于规整的几何对象,可以使用统一长度变换倍数 $l$ 。然而,分形并不限于规整对象。在前面关于海岸线长度的讨论中,已经知道总长度与所使用的测量单位有关系。为了测得精确一些,我们不是把尺寸放大为原来的 $l$ 倍,而是把测量单位缩小为原来的 $\epsilon$ 倍,其实 $l=1/\epsilon$ 。只有不断缩小 $\epsilon$ ,才能使结果精益求精,测得的长度 $N(\epsilon)$ 也随着 $\epsilon$ 减小而增大。分维定义中的 $N$ 和 $l$ ,要换成 $N(\epsilon)$ 和 $1/\epsilon$ ,而且要看 $\epsilon$ 不断小时有没有极限存在,于是

$$C = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}.$$

这里写了字母 $C$ ,是因为严格说来,它只是康托尔集合、谢尔宾斯基海绵等“奇怪集合”的“容量”,又称科尔莫戈罗夫(A. N. Kolmogorov)

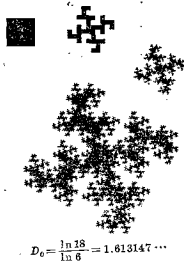
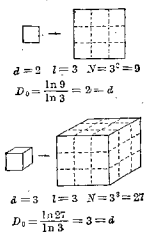


图3 左侧的图形是拓补维与分维相等的规则的几何图形。右侧图形是一种粗糙。最初的正方形每个边长都取为1,作为基本的单元。第二个图形的是小构成单位边长为1/6的正方形(因此不难看出,该图形海岸线的长度为1/6的72倍),只有把边长放大6倍,即 $l=6$ ,它才是我们的基本单元。此时由72个小单元组成的海岸线的长度也成为72。于是,与此对应的初始正方形的每个边变成 $N=72/4=18$ 个。考察作图方法,可以看出每前进一步, $l$ 和 $N$ 都按同样的倍数变,这样算得的分维是 $D_0$ 的分维是1.613147...

容量。为了使它成为维数,我们还要仿照前面用长度、面积、体积复盖平面图形,分别得到 $\infty$ 、有限数和0的办法,把 $C$ 的数值上下调整一番。如果能存在一个数 $D_0$ ,当 $C < D_0$ 时 $N(e) \cdot e^C$ 趋近无穷大, $C > D_0$ 时 $N(e) \cdot e^C$ 趋近零, $C = D_0$ 时 $N(e) \cdot e^C$ 趋向有限数,这样的 $D_0$ 才是相应“奇怪集合”的分维。它又叫作豪斯道夫(F. Hausdorff)维数,因为这基本上就是豪斯道夫早在1919年引入

的维数定义。在多数实际问题中,可以不管容量和豪斯道夫维数的细致差别,一律称之为分维。

可以证明,拓补维数 $d$ 和分维 $D_0$ 满足不等式

$$d \leq D_0,$$

等号只对普通的规则几何对象才成立。爱德勃罗特最初就把分形定义成使不等式

$$d < D_0$$

严格成立的几何对象。

都是边界很复杂的分形。某些电化学反应中,电极附近沉积的固态物质,以不规则的树枝形状向外增长。受到污染的一些水流中,粘在藻类植物上的颗粒和胶状物,不断因新的沉积而生长,成为带有许多须毛的枝条状。仅仅在二十年前,这些极不规范的“脏脏”系统,还是使科学家们无从下手研究的对象。现在有了无标度性、分形、分维等等概念,再加上计算机模拟这一强有力的手段,对于各种絮状集团已经开始形成定量描述的理论,发现了不少标度规律和普适指数。这些发展,显然会在生态和环境科学,乃至工业技术中找到应用。

自然界中更大的尺度上也存在分形对象。一枝粗干可以分出无数不规则的枝杈,每个枝杈继续分为细枝,……至少有十几次分枝的层次。谁有兴趣测算一下树枝的分维。估计会象鸟息息那样,得到介于1和2之间的分数。

最近有人研究了某些云彩边界的几何性质,发现存在从1公里到1000公里的无标度区。其实这也是不难理解的:小于一公里的云朵,更多地地形地貌影响,大于1000公里时,地球曲率开始起作用。大小两端都受到一定的特征尺度限制,

### 自然界中的分形

康托尔集合、谢尔宾斯基海绵、寇特岛、……这些分形都具有无穷自相似的层次,遵从比较简单的构造规则。它们的分维也很容易计算。自然界中更为常见的分形,是具有自相似分布特性的随机对象。英国的海岸线,连续相变临界点附近的涨落花斑,发达湍流的运动图象,是前面已经提到过的例子。我们再考察几种在自然界或者物理模型中遇到的分形。

在显微镜下观察落入液体中的一粒花粉,会看到它不间断地作无规运动。1827年植物学家布朗第一次观察到这种运动时,曾以为是见到了生命的活动形态。现在知道,这是花粉在大量液体分子的无规碰

撞(每秒种多达 $10^{23}$ 次)下表现的平均行为。布朗粒子的轨迹,由各种尺寸的折线连成。只要有足够高的分辨率,就可以发现原以为是直线段的部分,其实由大量更小尺度的折线连成。概而言之,这是一种处处连续,但又处处无导数的曲线,即前面提到的韦尔斯特拉斯函数。可以证明,布朗粒子轨迹的分维 $D_0$ 等于2,大大高于它的拓补维数 $d=1$ 。根据上节末尾的定义,这确是一种分形。顺便指出,分维可以取整数值,只要大于拓补维,就是分维。

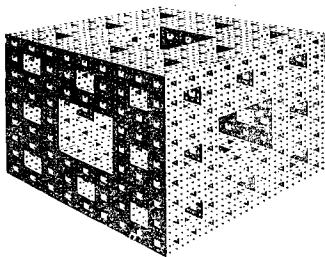
在粉末冶金过程中,粉粒状的原料被烧结成大块金属。烧结过程中形成各种尺寸的絮状团,每个团

中间有三个数量级的无标度区，这已经足够宽了。分形就存在于这中间区域，实际测出的分维  $D_0$  大约是 1.35。

处处光滑的运动轨迹也可能导致分形。描述流体运动、化学反应、等离子体中波的相互作用等等现象的非线性微分方程，往往包含着两种对立的因素。一方面，从局部看，存在不稳定的运动模式，使得某一时刻靠得很近的两条轨道，在下一刻就迅速离开，形成“失之毫厘，差之千里”的动向。另一方面，保守系统的相体积不变(刘维定理)，耗散系统的相体积要缩小，运动轨迹不能跑到千里之外。这是一种整体性的稳定因素。把这两种对立倾向调和的办法，就是运动轨迹要无穷无尽地扭曲和折迭，在保守情况下，这就导致随机的轨道分布，而在耗散情况下，形成“混沌吸引子”(也称奇怪吸引子)。两者都极为敏感地依赖于初值的选取，都是具有分维的对象。

考察比微分方程更简单的演化过程：平面上的离散迭代过程，可以更清楚地看到分形的层次结构。伊依(M. Hénon)吸引子就是通过这样的迭代产生的。除了伊依吸引子等来自数学模型的混沌吸引子外，近几年在流体力学不稳定性、光学双稳器件、化学振荡反应等实验中，都实际测得了混沌吸引子，并且从实验数据中计算出它们的分维。这些实验的一个共同教益是：不论实际物理系统的运动涉及如何众多的自由度，至少在转入混沌状态的初始阶段，运动限制在维数不高(例如，小于 5)的吸引子上。这就唤起了通过研究混沌转变来认识流态发生机制的希望。

学会从实验数据测算分维是最进的一大进展。我们现在就来讨论这个问题。我们将从分维的定义说起，在介绍方法的同时，还介绍几个有用的概念。



$$“地毯”: D_0 = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1.892789 \dots$$

$$“海绵”: D_0 = \frac{\ln(8+4+8)}{\ln 3} = 2.726833 \dots$$

图4 这就是所谓谢尔宾斯基海绵，它的每个面是一块谢尔宾斯基地毯，而每条对角线(和许多其他线)是康托尔集合。它们都是用对规整的几何对象“分割”和“打洞”的办法制造出来的。图中只画出构造了有限步的中间情况。用选取基本单元，放大边长，再数单元个数的方法，不难算出谢尔宾斯基地毯和海绵的分维分别是 1.892789... 和 2.726833...。

### 怎样测量分维?

分维的定义本身，提示了一种测量它的方法。取边长为  $\epsilon$  的小盒子，把分形覆盖起来。由于分形内部有各种层次的空洞和缝隙，有些小盒子会是空的，数数有多少盒子不是空的，把这个数目记为  $N(\epsilon)$ 。然后缩小盒子的尺寸  $\epsilon$ ，所数得的  $N(\epsilon)$  自然要增大。根据前面的定义，只要在双对数坐标纸上画出  $\ln N(\epsilon)$  对  $\ln \epsilon$  的曲线，其直线部分的斜率就给出分维  $D_0$ 。伊依吸引子维数就是这样计算出来的。

这种看起来很简便的“数盒子”方法，有着理论和实践两方面的局限性。对于实际计算，只有分维小子二维或在二维附近，而相空间维数也不高时，它才是可行的。维数增高后，计算量迅速上升，以致很难得到收敛的结果。从理论上讲，

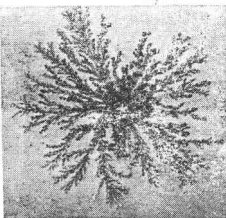
一个小盒子不管是包含了分形的一个点或是一批点，就算是非空的，可在  $N(\epsilon)$  中占有一席，这就完全不能反映分形内部的不均匀性。不过，分维的定义就是如此。只有修改维数的定义，才能改进描述的细致程度。

让我们把小盒子编号。如果知道分形中的点落入第  $i$  只盒子的概率是  $P_i$ ，那就可以写出尺寸为  $\epsilon$  的盒子进行测算所得的信息量

$$I = - \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} P_i \ln P_i,$$

然后就可以用  $I$  代替  $N(\epsilon)$ ，定义“信息维数”  $D_1$  (为什么加下标 1 以后再解释)。假如落入每只盒子的概率都相同，即  $P_i = 1/N(\epsilon)$ ，求和记号下面的每一项都和编号  $i$  无关，于是  $I = \ln N(\epsilon)$ ，我们就回到

图5 右边上方两幅照片为电极附近的沉积“树”，由清华大学王良御、赵慧敏和中科院理论物理研究所欧阳钟灿获得。在培养皿中倒入硫酸铜溶液，在其上复盖一层酚胺丁醇溶液，垂直插入表面磨平的阴极碳棒，使之刚好接触硫酸铜溶液，阳极为一圆形铝片。加直流电压，在碳棒顶端造成两相界面沉积铜棒，上方右侧为其二维图案，类似地注入二氯化铜溶液可得铜的沉积图案，如上方左照片。经分析计算铜的质量分维为1.53，铜的质量分维为1.67。下方为仰视拍摄的白阜孔菌中一株古柏树枝叉的照片(邹红莲)。估计它的分维应当与上方的沉积“树”相近，应为1与2之间的一个分维。



了前面分维 $D_0$ 的定义，一般说来  

$$d < D_1 < D_0.$$

信息维数不是新概念，早在五十年代匈牙利数学家瑞登(A. Renyi)就从概率论角度建议了上面的定义，不过当时没有把它和分形联系起来。从计算角度看，信息维数 $D_1$ 的算法比简单分维 $D_0$ 还要费事一些(要先求 $P_i$ )，因而也是不切实际的。

在力学中往往把每个质点的座标和速度当作座标轴，支起一个相空间。相空间中每个点代表力学系统的一种可能状态。对于自然界中其他复杂的过程，也可以采用类似办法。

但是在多数情况下，人们无法确切知道相空间的维数有多高。例如，流体中的每一个点都有自己的速度和座标，无穷多个连续的点构成流体，因此它的相空间必定是无穷维的。然而另一方面，决定复杂系统基本运动状态的又可能是为数不多的一组变量，它们在很高维相空间中只组成相当低维的几何对象，有时是分维对象。混沌吸引子就是一例。实验室中进行测量时，往往还不能跟踪这个低维对象的一切分量，只得把它投影到更低维的平面或直线上来观测，即只采集一两个变量的数据序列。借助现代数据采集设备，可为少数观测量取得

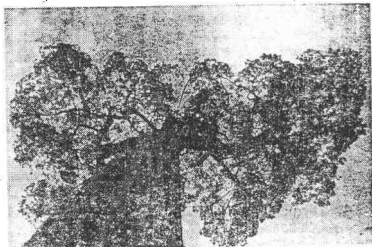
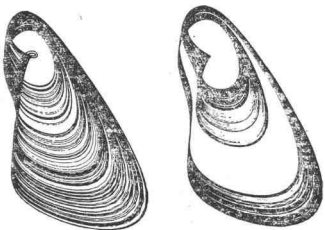


图6 下为一个化学反应的数学模型中两个不同参数值下的混沌吸引子。图中有大小两类空隙，由全部轨道的轮廓线形成的大空隙反映了运动仍具有某种平均的周期性质，这与分维关系不大。轨道之间疏密不均的空隙，处在不断填充的过程中。不管填充多久，在更小尺度仍然留下疏密不均的空隙，而各个层次具有自相似性的分布。这样的混沌吸引子是一种分形。



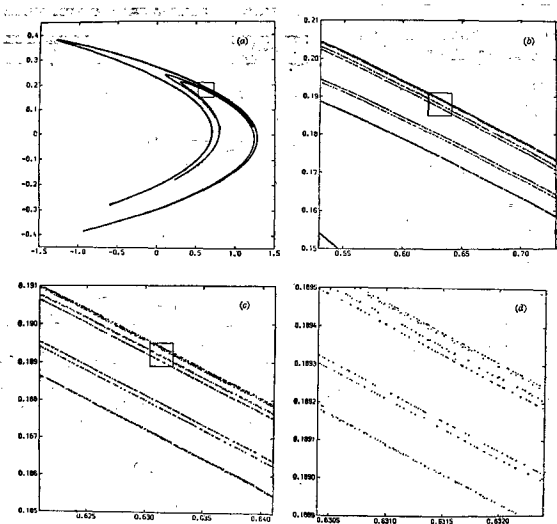


图7 这是伊依发现的一个吸引子。它是用下面的办法产生的。在平面上取一点  $x_0=0.63135448$ ,  $y_0=0.18940634$  作为初值, 然后计算出下一点  $x_1=y_0+1-1.4x_0$ ,  $y_1=0.3x_0$ ; 再把  $(x_1, y_1)$  作为初值, 用同样的式子算出  $(x_2, y_2)$ , 如此重

复下去。很长的(通常是等时间间隔)的数据序列。能不能在不知道背景相空间维数情况下, 从这少数甚至单一数据序列, 取出关于维数的信息呢? 最近一两年发展了一种很简便的方法, 可从实验数据计算分维。不仅实验物理学家, 而且某些生理学家和经济学家也已经掌握了这一方法, 用来处理自己的数据。因此, 我们也稍为仔细地加以介绍。

考虑实验中测得的一个数据序列

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$$

$x_i$  是第  $i$  时刻测得的值, 例如, 第  $i$  秒时布朗粒子的横坐标。由于不知道实际的相空间维数有多高, 我们先用这些数据支起一个  $m$  维的空间。造这个  $m$  维的“嵌入空间”的办法很多。例如取  $m=10$ , 把

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$$

作为十维空间中的一个矢量  $y_1$ , 然后右移一步, 把

$$x_2, x_3, x_4, \dots, x_{11}$$

作为十维空间中的第二个矢量  $y_2$ 。

复下去。a 图是 1 万个点迭代的结果, b、c、d 图依次是前一图中小方框内图形的放大。为了使细节随着清楚, 迭代次数相应增加到 10 万、100 万和 500 万。自相似的层次结构是显而易见的。后来有人计算了伊依吸引子的分维是 1.26。

这样构造出一大批矢量  $y_1, y_2, \dots, y_n$ 。现在随便给定一个数  $\epsilon$ , 然后检查一遍有多少点对  $(y_i, y_j)$  之间的距离小于  $\epsilon$ 。把距离小于  $\epsilon$  的“点对”在“一切点对”中所占比例记作  $C(\epsilon)$ 。用电子计算机很容易从原始数据中算出  $C(\epsilon)$ 。

如果  $\epsilon$  取得太大, 当然一切“点对”的距离都不会超过它, 因此,  $C(\epsilon)=1$ , 取对数后有  $\ln C(\epsilon)=0$ 。这样的  $\epsilon$  当然反映不了系统的内部性质。适当减小  $\epsilon$ , 可能在一段  $\epsilon$  区

分维 (科尔莫戈罗夫容量, 豪斯道夫维数):

$$D_0 = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon}$$

信息维数:

$$D_1 = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_i P_i \ln(1/P_i)}{\ln \epsilon}$$

关联维数:

$$D_2 = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\epsilon)}{\ln \epsilon}$$

$$C(\epsilon) = \frac{1}{K^2} \sum_{i,j} \theta(\epsilon - |y_i - y_j|)$$

一般定义

$$D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_i P_i^q}{\ln \epsilon}$$

$$q = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$$

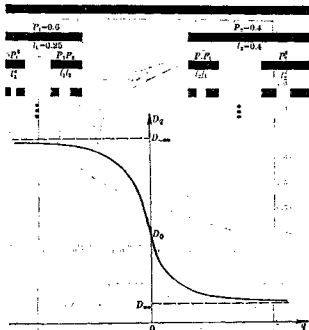


图8 方框中给出维数的几种定义, 其中包括无穷多种维数  $D_q$  的一般定义。对于复杂的分形, 必须采用多种维数来描述。比如, 右上图即为一种较复杂的分形——不均匀康托尔集合。(0, 1) 线段不再均匀分割和舍去中段, 而是左边留 1/4, 右边留 2/5, 中间舍去 1/20。同时, 某种“事件”(例如访问)的概率也不再简单地比例于线段的长度。到达较短的左段( $l_1=1/4$ )的概率反而高一些, 例如取  $P_1=0.6$ ; 到达  $l_2=2/5$

的右段的概率  $P_2=0.4$ 。当然  $P_1+P_2=1$ 。此后按同样的比例分割剩下的线段, 对每一段按同一方式赋予访问概率, 这样无穷地分割和舍去, 最后得到一种不均匀的康托尔集合。它的维数是  $q$  的连续函数, 如右下图所示, 不同的  $q$  对应不同的  $D_q$ 。对于均匀的康托尔集合, 这个函数的曲线退化为通过  $D_0$  的一条水平直线, 所有的  $D_q$  都等于  $D_0$ , 与  $q$  没有关系, 或者说只剩下一种分维。

间内有

$$C(\epsilon) = \epsilon^\gamma$$

和分维的定义相比, 可见  $\gamma$  是一种维数。实际上  $\gamma$  是对所谓“关联维数”  $D_2$  的很好逼近。如果  $\epsilon$  取得太小, 实验中一切偶然噪声便会表现出来。由于噪声在任何一维上都起作用,  $m$  维空间中就会测得  $\gamma = m$ 。

这样, 我们再次看到了实际系统的尺度变换, 在大小两头受到限制。 $\epsilon$  太大时,  $\gamma=0$ ,  $\epsilon$  太小时,  $\gamma=m$ ; 都与所研究的系统的本质没有关系。只有中间  $C(\epsilon) = \epsilon^\gamma$  的一段, 才对应无标度区。有没有无标度区, 不取决于主观愿望, 而决定于客观的事实, 上述维数测量方法的好处在于: 只要对一批  $m$  值画出  $\ln C(\epsilon) - \ln \epsilon$  曲线, 看看是否在斜率等于 0 和  $m$  的两段直线之间还有一

段斜率  $\gamma$  介于 0 和  $m$  之间的直线, 它就自动指出无标度区的范围, 并且表明实验数据的噪声背景有多大 (大致相当斜率以  $\gamma$  变到  $m$  处的  $\epsilon$  值)。如果斜率直接从 0 变到  $m$ , 往往是嵌入空间的维数  $m$  选得不够大。如果调整  $m$  之后还看不到无标度区, 当然谈不到测量分维。

可以证明, 我们已经见过的各种维数满足不等式

$$d \leq D_1 \text{ (或 } \gamma) \leq D_2 \leq D_0$$

事实上可以统一地定义无穷多种维数  $D_q$ , 它依赖于一个参数  $q$ ,  $q=0, 1, 2$  时,  $D_q$  分别等于分维  $D_0$ 、信息维数  $D_1$  和关联维数  $D_2$ 。这就是前面为  $D$  加了不同下标的原因。当  $q$  取正数时, 只要  $q > q'$ , 就有  $D_q \leq D_{q'}$ 。其实  $q$  不必限于正整数, 它可以取从  $-\infty$  到  $+\infty$  的一切实数值。

计算表明, 对于康托尔集合、谢尔宾斯基海格这些简单分形, 所有  $D_q$  都相等, 即  $D_q = D_0$ 。因此, 前文提到这几种分形的维数时用的  $D_0$  都应换成  $D_q$ , 或者不加任何下标。更复杂的分形, 原则上要用多种维数来刻画。对于一种不均匀的康托尔集合, 它的维数是  $q$  的连续函数, 不同的  $q$  对应于不同的  $D_q$ 。

若干分形的维数

简单的康托尔集合:

$$D_q = 0.689829 \dots$$

寇赫岛的海岸线:

$$D_q = 1.613647 \dots$$

实际的海岸线:  $D_q$  在 1.2 左右

谢尔宾斯基海格:

$$D_q = 2.726833 \dots$$

谢尔宾斯基地毯:

$$D_q = 1.892789 \dots$$

布朗粒子的轨迹:  $D_q = 2$



对于简单的康托尔集合,  $D_0$  函数曲线退化为通过  $D_0$  的一条水平直线。

形象地说, 复杂的分形好象由大量维数不同的子集合交错添加而成; 研究某个特定物理性质时, 某个  $D_0$  起主要作用。然而, 目前实践中便于直接测量的只是  $D_0$ , 有时还能测得  $D_1$  和  $D_2$ ,  $D_0$  的测量方法是那样简单易行, 没有高深的数学基础, 也可以掌握。因此, 越来越多的人开始测量自己所研究对象的维数。最近, 有人用脑电波数据, 测量产生这些信号的“吸引子”的维数。被测者闭目静坐时,  $D_0=2.4$ , 而从 300 往下默数数字时, 维数上升到 3.0 左右。有的经济学家想弄清楚一些经济活动指数貌似无规的变化后面, 有没有“吸引子”存在, 结果测得相当低的分维 (小于 2)。这类吸引子的本质当然还远未阐明。然而, 实际测量出的维数不高这一事实, 可能暗示着将来构造这些复杂系统的模型时, 并不需要用

很多变量。

分形和分维同其他数学概念一样, 都是从客观存在的数和形的关系中抽象出来的。虽然数学家们早就提出了基本的定义, “分形热”在近几年才蔓延开来, 其主要原因有三条。第一, 电子计算机图形显示协助人们推开了分形这座艺术宫殿的大门。这座具有无穷层次结构的宏伟建筑, 每一个角落都存在无限嵌套的迷宮和回廊, 使许许多多科学家和艺术家流连忘返。第二, 只有在物理学家手中, 分形宝库才和自然界里的真实事物发生不解之缘。银河系中的若断若续的星体分布, 难道不是具有分维的吸引子? 多孔介质中的流体运动和由之产生的渗流模型, 给出了多少具体的分形图象。自然界中的分形, 真是比比皆是, 俯拾可得。不过, 自然界只能在“无标度区”里作尺度变换游戏, 必须看清在大、小两方面客观

存在的特征尺度, 才不会弄巧成拙。第三, 曼德尔勃罗特这位计算机和数学兼通的人物, 起了持续的推动作用。他在 1975, 1977 和 1982 年先后用法文和英文出版的三本书, 特别是《分形——形、机遇和维数》以及《自然界中的分形几何学》, 把许多人引进了分形百花园。本文关于寇赫岛、康托尔集合和谢宾尔斯基海绵的图也取自他的书中。

数学家们比较喜欢拓扑维数这样的性质, 它在连续变换下仍然保持不变。分维是一种测度性质, 把康托尔集合赖以存在的整个线段, 不均匀地拉伸和压缩, 它的分维也随之改变。拓扑分类虽有统管一切的威力, 也正失于过分笼统。测度性质虽然灵活多变, 却给了物理学家们对自然现象作细致研究和分类的依据。在分形几何学的基础上, 分维物理学也正在成为有充实内容的研究领域。