

用单位虚速度法作平面多杆复杂机构的运动位置误差分析

上海大学工学院 何荣明 北京航空学院 张启先

摘 要

任何平面多杆复杂机构,在用拆杆拆副法作运动分析^[1,2]的基础上,均可以利用单位虚速度继续通过假想的拆杆拆副,调用双杆组子程序,按照应遵从的几何等同条件,通过线性叠加,进一步有效地求解机构的运动位置误差。文中引有算例,说明单位虚速度法不仅简便,而且由此编制的计算机通用程序将使机构的运动误差分析从理论研究进入实用阶段。

一、前言

以往一个时期内,对机构的运动位置误差分析相继提出了从位移关系式求误差敏感系数法^[3]、输入输出关系微分法^[4]、矢量封闭形法^[5]、约束方程组微分矩阵法^[6]、复数向量法^[7]等一系列解析方法,可以认为无论在广度和深度上都已达到一定的水平。然而,由于这些方法均须建立和微分机构的位移方程或约束方程,且要解大量的线性方程组,计算工作量巨大而在使用上受到限制。近期提出的微小位移合成法^[8,9],已克服了上述困难,能够直接分析多种原始误差引起的机构运动误差,且所求出的运动位置误差具有较简洁的表达式。无疑,这对研究机构的运动位置误差起到一定的推动作用。但是,由于该方法的技巧性较强,除了不易被一般工程技术人员掌握以外,要编制通用的计算机程序看来也有困难。因此总的说来,目前机构误差分析还多限于理论上的研究,与进入工程界的实用阶段尚有一定的距离。

本文从分析机构的误差敏感系数与速度两者之间关系,提出用单位虚速度法作机构运动位置误差分析。可以看到:任何平面多杆复杂机构,在用拆杆拆副法作运动分析之后,由于各原始误差的敏感系数能够转化为单位虚速度下的速度求解,因而可以继续通过假想的拆杆拆副,调用双杆组子程序,按照应遵从的几何等同条件,利用线性叠加法则,进一步有效地求解机构的运动位置误差。由此编制的计算机通用程序将适用于任意多杆机构的运动位置误差分析,从而使机构误差分析由理论研究进入实用阶段。

本文的研究仅考虑由结构参数的误差所引起的机构运动参数误差,对于间隙矢量则采取简化法^[3,10,11],将其折算为附加的结构参数误差。

二、求误差敏感系数的单位虚速度法原理

众所周知,对输入运动参数为 V 而有 n 个结构参数 q_i 的单自由度机构,当理想机构的从动件位置表述为

$$U = U(V, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n) \quad (1)$$

且各结构参数误差和运动副内间隙均较小时, 则由结构参数误差引起的从动件位置误差为

$$\Delta U = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) \cdot \Delta q_i \quad (2)$$

式中 $\frac{\partial U}{\partial q_i}$ ——误差敏感系数 (按结构参数的名义值计算);

Δq_i ——结构参数的误差 (包括间隙矢量的附加结构参数误差)。

然而, 对于稍许复杂一些的连杆机构, 关系式 (1) 是很难确定的, 于是式 (2) 中的 $\frac{\partial U}{\partial q_i}$ 就很难求出。以往许多文献的研究, 大都是围绕着这个基本问题展开的。为了避免直接求偏导, 现将误差敏感系数写成下列关系:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial t} \bigg/ \frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} \bigg/ \dot{q}_i \quad (3)$$

如令 $\dot{q}_i = 1$, 则有

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (4)$$

代入 (2) 式得

$$\Delta U = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{\dot{q}_i = 1} \cdot \Delta q_i \quad (5)$$

由此可见, 机构的名义位置确定之后, 计算各个结构参数的误差敏感系数 $\frac{\partial U}{\partial q_i}$, 可逐一转化为在虚设 $\dot{q}_i = 1$ 情况下求解速度 $\frac{\partial U}{\partial t}$ 的问题。此即具有普遍意义的单位虚速度法原理。

因此, 无论是对构件、杆组还是机构作运动位置误差分析均可主要归结为进行各种单位虚速度情况下的速度分析。下面举例说明。

图 1 (a) 所示为有固定铰链的构件, 当转角 θ_1 固定不变或没有误差时 (即 $\dot{\theta} = 0$), 其原始误差单独出现为 Δl 、 Δx_A 和 Δy_A 三种长度性误差, 分别如图 (b)、(c) 及 (d) 所示。为了求出相应的误差敏感系数, 可以如图沿长度性误差发生方向, 分别虚设移动副并令 $\dot{l} = 1$ 、 $\dot{x}_A = 1$ 和 $\dot{y}_A = 1$ 而求解 B 点的速度。这时所求得的 $\dot{x}_B$ 和 $\dot{y}_B$ 即为各自的误差敏感系数。显然有

$$\frac{\partial x_B}{\partial l} = \cos \theta_1, \quad \frac{\partial y_B}{\partial l} = \sin \theta_1, \quad \frac{\partial x_B}{\partial x_A} = 1, \quad \frac{\partial y_B}{\partial x_A} = 0, \quad \frac{\partial x_B}{\partial y_A} = 0, \quad \frac{\partial y_B}{\partial y_A} = 1。$$

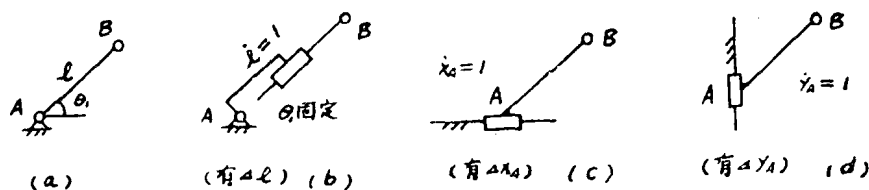


图 1

图 2 所示为一含有两个转动副 R 和一个移动副 P 的 RRP 双杆组。如仅要求移动副 C 处位置误差与杆长 l_2 对应的误差敏感系数, 只要沿该杆杆长虚设移动副并令 $l_2 = 1$, 然后求移动副 C 处的速度就行。

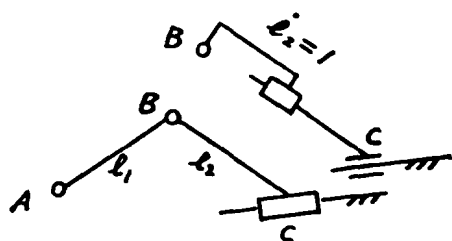


图 2

平面连杆机构可分为双杆组机构和非双杆组机构两大类。为了说明单位虚速度法在机构位置误差分析中的应用, 本节仅举双杆组机构为例。图 3 (a) 所示为含有三个双杆组的单自由度八杆机构, 其中杆 1 为输入杆。如要计算由杆 1 长度误差所引起的 G 点位置的误差敏感系数时, 则可如图 3 (b) 所示沿杆 1 虚设移动副并令 $l_1 = 1$, 然后调用三次双杆组子程序作

速度分析, 可求出 $\dot{x}_G$ 和 $\dot{y}_G$, 此即所求误差敏感系数 $\frac{\partial x_G}{\partial l_1}$ 和 $\frac{\partial y_G}{\partial l_1}$ 。

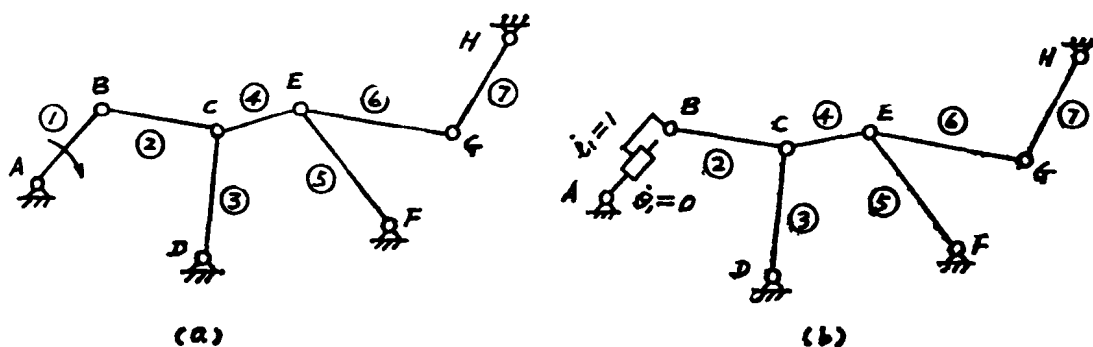


图 3

三、任意多杆机构的运动位置误差分析和计算机通用程序

任意多杆机构中最难分析的情况是复杂的非双杆组机构。对这类多杆复杂机构, 尽管不能直接调用双杆组子程序求解, 但是由文^{[1], [2]}知道, 通过假想的拆杆拆副是能够将其转化为自由度增加了的纯双杆组机构, 因而对其作位置误差分析就相当于对一个有各种单位虚速度的纯双杆组转化机构作速度分析。

具体进行时, 可按照转化双杆组机构应遵从的线性几何等同条件, 利用线性叠加法则以简化求解过程。现以图 4 的复杂机构 (杆 1 为输入杆) 为例作一说明。

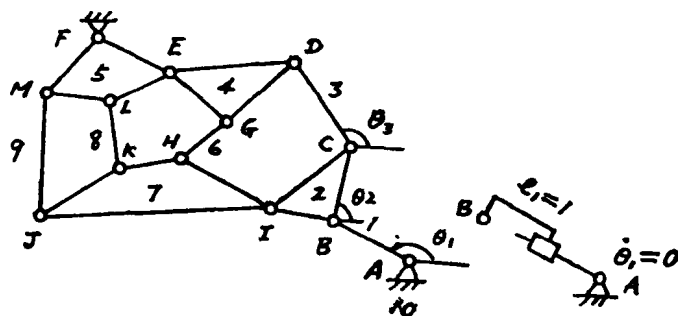


图 4

设杆 1 有长度误差而要求从动杆 5 上 L 、 M 铰点位置的误差敏感系数。为此, 拆去杆 8 和杆 9 将该机构转化成三自由度 ($\dot{l}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$) 的纯双杆组机构。对拆去两杆应遵从的几何等同条件求导得出为:

$$(x_L - x_K)(\dot{x}_L - \dot{x}_K) + (y_L - y_K)(\dot{y}_L - \dot{y}_K) = 0 \quad (6)$$

$$(x_M - x_J)(\dot{x}_M - \dot{x}_J) + (y_M - y_J)(\dot{y}_M - \dot{y}_J) = 0$$

由转化的三自由度双杆组机构按单位虚速度法 ($\dot{l}_1 = 1$) 可写出:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_L &= \dot{x}_L' + \dot{x}_L''\dot{\theta}_2 + \dot{x}_L'''\dot{\theta}_3 \\ \dot{y}_L &= \dot{y}_L' + \dot{y}_L''\dot{\theta}_2 + \dot{y}_L'''\dot{\theta}_3 \\ &\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中 $\dot{x}_L', \dot{y}_L', \dots\dots$ 系令 $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = 0$ 但 $\dot{l}_1 = 1$ 时求出点 L 、 $\dots\dots$ 的速度;

$\dot{x}_L'', \dot{y}_L'', \dots\dots$ 系令 $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{l}_1 = 0$ 但 $\dot{\theta}_2 = 1$ 时求出点 L 、 $\dots\dots$ 的速度;

$\dot{x}_L''', \dot{y}_L''', \dots\dots$ 系令 $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_3 = \dot{l}_1 = 0$ 但 $\dot{\theta}_3 = 1$ 时求出点 L 、 $\dots\dots$ 的速度。

将式(7)代入(6)可得两个有关 $\dot{\theta}_2$ 和 $\dot{\theta}_3$ 的线性方程式。 $\dot{\theta}_2$ 、 $\dot{\theta}_3$ 解出之后, 各铰点的速度即易按线性叠加法则直接算出。而这些值恰恰正是我们所希望得到的原始误差 Δl_1 的敏感系数 $\partial x_L / \partial l_1$ 、 $\partial y_L / \partial l_1$ 、 $\dots\dots$ 。

值得指出的是, 我们只需令相应的 $q_i = 1$, 改变其中 $\dot{x}_L', \dot{y}_L', \dots\dots$ 项的值, 其他 $\dot{x}_L'', \dot{y}_L'', \dots$ 及 $\dot{x}_L''', \dot{y}_L''', \dots$ 的值均可沿用以往进行机构速度分析的结果, 就能求出该多杆复杂机构所有结构误差的敏感系数。因此问题的关键还在于“拆杆拆副法”的正确使用。作者在“转化双杆组机构自动生成”^[12]的基础上编制了机构运动位置误差分析的通用电算程序, 并在 IBM-PC 机上调试成功。图 5 是它的简单流程示意框图(其中 N_1 为增加的虚拟自由度数, N_2 为结构参数个数, 均由计算机通过输入的机构拓扑和几何参数信息自动得出)。

四、数字算例

图 6 所示为一个含有 19 根杆和 26 个铰点的两自由度复杂机构。它的主动杆①和⑩与 x 轴正向夹角分别为 63.4349° 和 194.036° , 已知几何参数为: (mm)

$$l_{1,2} = 22.3607 \quad l_{2,3} = 22.3607 \quad l_{3,4} = 15.8114 \quad l_{3,5} = 20.6155$$

$$l_{4,5} = 18.0278 \quad l_{4,6} = 15.8114 \quad l_{5,7} = 20.6155 \quad l_{5,12} = 20.6155$$

$$l_{7,12} = 21.2132 \quad l_{7,8} = 18.0278 \quad l_{7,9} = 20.0998 \quad l_{8,9} = 16.4012$$

$$l_{8,10} = 15.0, \quad l_{9,11} = 23.8537 \quad l_{12,13} = 21.2132 \quad l_{12,21} = 15.8114$$

$$l_{13,21} = 31.6228 \quad l_{13,4} = 18.0278 \quad l_{13,16} = 22.3607 \quad l_{14,16} = 20.6155$$

$$l_{14,15} = 20.6155 \quad l_{16,7} = 15.8114 \quad l_{16,18} = 22.3607 \quad l_{17,18} = 25.4951$$

$$l_{17,19} = 18.0278 \quad l_{18,20} = 18.0278 \quad l_{21,22} = 20.0998 \quad l_{22,23} = 18.6815$$

$$l_{22,24} = 22.3607 \quad l_{23,24} = 17.0 \quad l_{23,25} = 20.6155 \quad l_{24,26} = 15.0$$

$$x_1 = 20.0 \quad y_1 = 0.0 \quad x_6 = 50.0 \quad y_6 = 0.0 \quad x_{10} = 100.0 \quad y_{10} = 0.0$$

$$x_{11} = 13.00 \quad y_{11} = 15.0 \quad x_{15} = 120.0 \quad y_{15} = 80.0 \quad x_{19} = 100.0 \quad y_{19} = 105.0$$

$$x_{20} = 50.0 \quad y_{20} = 105.0 \quad x_{25} = 40.0 \quad y_{25} = 90.0 \quad x_{26} = 5.0 \quad y_{26} = 62.0$$

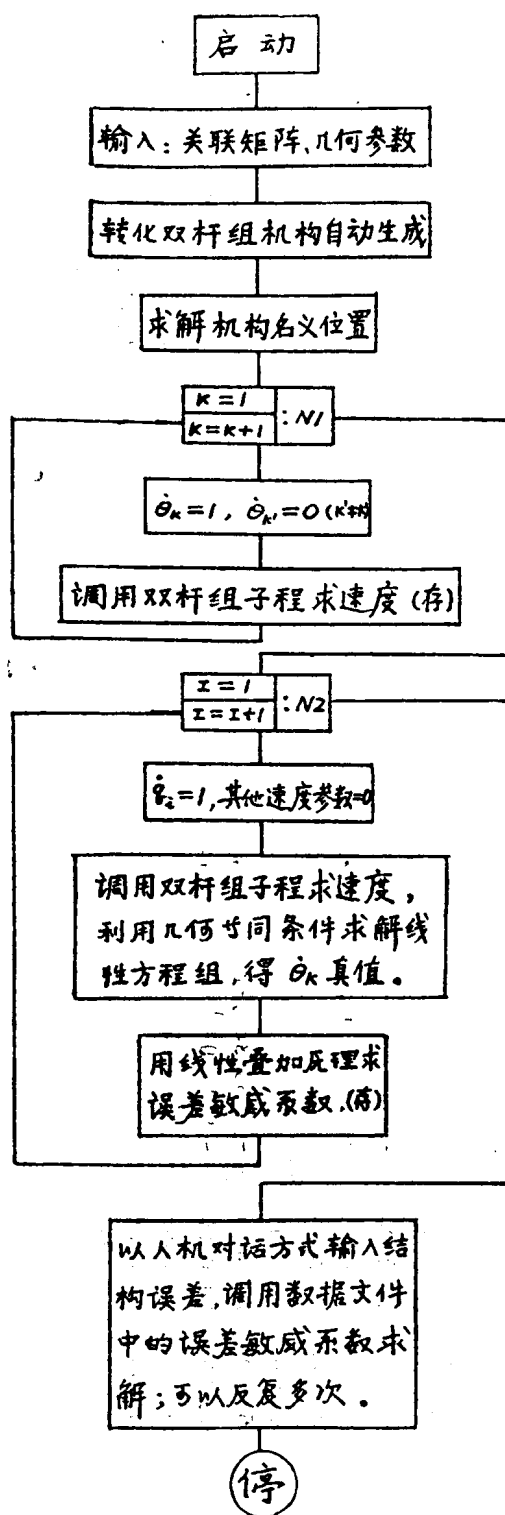


图 5

铰点 编号	机构名义位置精确解		机构出现的 位置误差		杆长有误差		时	
	x_i	y_i	Δx_i	Δy_i	由误差反求机构实际位置		用优化方法直接求机构位置	
					$x_i + \Delta x_i$	$y_i + \Delta y_i$	x_i^*	y_i^*
1	20.0000	0.0000	—	—	20.00000	0.00000	20.00000	0.00000
2	30.0000	20.0000	.4472143E-2	.8944268E-2	30.00447	20.00894	30.00450	20.00896
3	50.0000	30.0000	.7213105E-2	.2582299E-1	50.00721	30.02582	50.00729	30.02580
4	54.9999	15.0000	-.1931670E-1	.1697980E-1	54.98068	15.01698	54.98079	15.01694
5	70.0000	25.0000	-.1630093E-2	-.9549986E-2	69.99837	24.99045	69.99842	24.99053
6	50.0000	0.0000	—	—	50.00000	0.00000	50.00000	0.00000
7	90.0000	29.9999	-.7880895E-2	.1545383E-1	89.99212	30.01535	89.99218	30.01531
8	100.0000	15.0000	-.1606125E-1	.1000016E-1	99.98394	15.01000	99.98428	15.01000
9	110.0000	28.0000	-.8971559E-2	.4546632E-2	109.99113	28.00465	109.99120	28.00469
10	100.0000	0.0000	—	—	100.00000	0.00000	100.00000	0.00000
11	130.0000	15.0000	—	—	130.00000	15.00000	130.00000	15.00000
12	75.0000	45.0000	-.2663383E-1	-.3298937E-2	74.97337	44.99671	74.97359	44.99669
13	90.0001	60.0000	-.9311599E-1	.3318357E-1	89.93688	60.03318	89.93667	60.03351
14	100.0000	75.0000	-.9701435E-2	.2425316E-2	99.99030	74.99768	99.99030	74.99767
15	120.0000	80.0000	—	—	120.00000	80.00000	120.00000	80.00000
16	80.0000	80.0000	.8102581E-2	.6879347E-1	80.00810	80.06879	80.00836	80.06923
17	85.0000	94.0000	-.7673414E-1	.9707244E-1	84.92326	95.09716	84.92361	95.09722
18	60.0000	90.0000	-.4845551E-1	-.4432205E-1	59.95154	89.95568	59.95223	89.95621
19	100.0000	105.0000	—	—	100.00000	105.00000	100.00000	105.00000
20	50.0000	105.0000	—	—	50.00000	105.00000	50.00000	105.00000
21	60.0000	50.0000	-.3879472E-1	-.3978127E-1	59.96121	49.96022	59.96132	49.95977
22	40.0000	52.0000	-.5037338E-1	-.5506929E-1	39.94970	51.94504	39.94985	51.94601
23	35.0000	70.0000	.5829840E-1	-.2488239E-1	35.05829	69.97512	35.05734	69.97549
24	20.0000	62.0000	.9999838E-2	.6567771E-1	20.00999	62.06518	20.00986	62.06518
25	40.0000	90.0000	—	—	40.00000	90.00000	40.00000	90.00000
26	5.0000	62.0000	—	—	5.00000	62.00000	5.00000	62.00000

现对它作运动位置误差分析。

计算机得到与机构对应的拓扑结构（关联矩阵）和几何参数信息之后，首先将原机构自动转化成拆去⑭、⑧和⑮三连架杆并增选⑩、④和⑮三虚主动杆的五自由度双杆组转化机构；接着用优化手段，按照所拆三杆相应几何等同条件（杆长）确定机构位置的名义解；然后对转化机构作三十五次速度计算（其中三次是分别设 $\theta_k = 1$ ，还有三十二次是分别令 $\dot{l}_i = 1$ ），便可求出由三十二根杆长误差所引起的二十六个铰点位置的误差敏感系数（共计 $26 \times 2 \times 32$ ），最后由人机对话方式，输入各个结构误差，计算机就能根据用户要求，很快算出哪一根或几根杆长误差所引起的机构位置误差。附表中所得各项数据是由①、②、④、⑦、⑧、⑪、⑬、⑭、⑮、⑰和⑱同时产生 0.01 误差所引起的机构位置误差。此结果与把误差杆长（ $l + 0.01$ ）直接输入计算机、用优化方法得出的位置精确值相符。

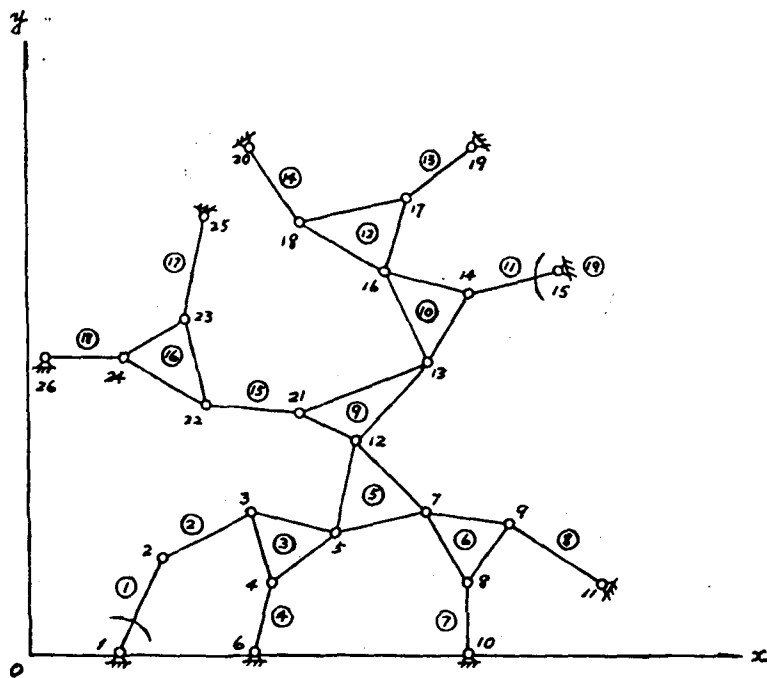


图 6

结 束 语

本文提出的单位虚速度法原理，不仅适用于任何平面多杆复杂机构的运动位置误差分析，而且可进一步推广至机构速度、加速度的误差分析（这方面作者另有行文）。由于该方法概念简明，适用性广，能编制便于在微机上运算的计算机通用程序，无疑，它将对机构的运动分析由理论研究进入实用阶段起到有力的推动作用。

参 考 文 献

- [1] 张启先：平面多环机构的分析，机械原理教师讲习班资料 T M 京 85002，北京钢铁学院印，1985
- [2] 吴瑞祥，张启先：用拆杆拆副法作平面多杆复杂机构的运动分析，机械工程学报，

第3期, 1987

- [3] 张启先: 空间机构的运动误差分析, 华南工学院讲义稿, 1981
- [4] Aandia—Laca: Positonal shifts deteiminatoin of mechanim by means of transmission, Pro.the 6th IFTOMM congress on MMT—1983
- [5] K.Lakshminaiayana, R.G.Narayanamuthi: on the analysis of the effect of tolerances in linkages, J.Mech, Vol.6,1971
- [6] 徐卫良, 邓家贤吴慈生: 确定连杆机构运动误差的矩阵法, 南京工学院学报, 第3期, 1986
- [7] 杨基厚: 平面多杆机构位置精度的解析法, 机械设计(西工大), 第1期, 1986
- [8] Xu wei-liang, Zhang qi-xian: On the method of Combining small displacements in studying the kinematic errors in spatial openand closedloop linkages Submitted to the 7th IFTOMM congress on MMT-1987, Spain
- [9] 徐卫良, 张启先: 用微小位移合成法作平面连杆机构的运动误差分析, 机械设计(天津)
- [10] 仇时雨: 硕士等位论文, 北京航空学院, 1984.12.
- [11] 徐卫良: 硕士学位论文, 南京工学院, 1982.12.
- [12] 何荣明, 张启先: 平面多杆复杂机构分析中转化双杆组机构的自动生成, 第四届全国机构学会讨论文, 1986年8月烟台, 北京航空学院学报, 第1期, 1988