



# 第一章 薄壳的应力与内力

## 1. 绪言

薄壳是以两曲面为边界的曲面墙。其厚度远小于其它尺寸，两曲面之间壳体面中点形成的曲面称为薄壳的中面。如果我们已知中面的形状和壳体的厚度，即可完整地描绘出薄壳的几何图形。

薄壳的结构作用与板有很大不同。板基本上通过弯曲承受荷载并传递到支点。而薄壳则是通过轴向力承载的。分析图1-1中的结构平面可知，板由于弯曲承受荷载并传递到支承边梁。如果板按某一曲率弯曲，我们就得到了一种典型的有相同跨距的简支筒壳。在这种情况下，其结构作用将有显著差别。筒壳主要是在壳顶部附近产生压应力和纵向弯曲，在边梁产生拉应力和纵向弯曲。比较确切地说，如果将跨度与所谓横向弦杆宽度相比，其跨度越长，则其横截面的性能越接近于梁。

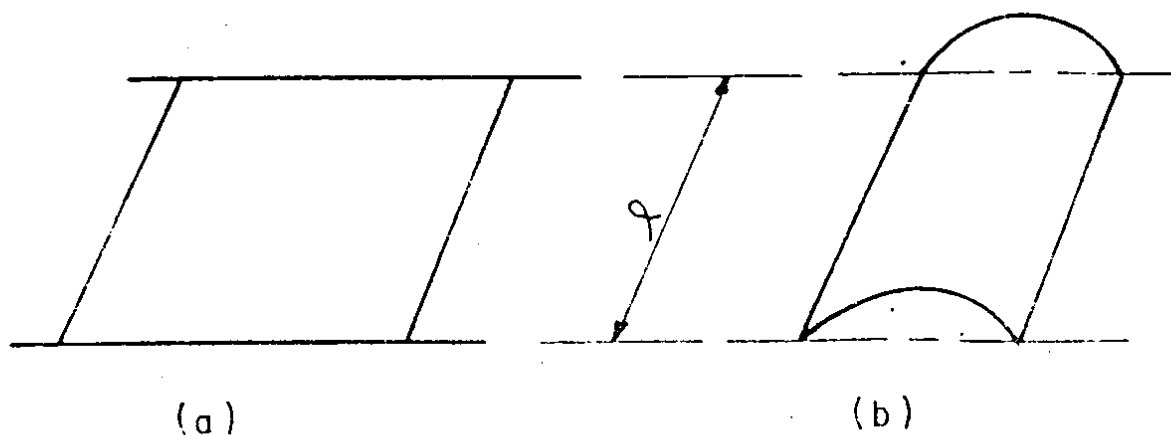


图1-1 平板与曲面板

采用适当的几何形状，薄壳结构具有比板结构更大的跨距和更强的承载力。这在建筑学、航空学和造船学方面都将得到广泛的应用。

## 2. 薄壳结构体系的分类

壳面的几何形状对壳体结构的强度和刚度有着重要的作用。设 $k_1$ 和 $k_2$ 为壳面的主曲率，称两曲率的乘积为高斯曲率，即

$$K = k_1 k_2 = \frac{1}{R_1 R_2} \quad (1-1)$$

其中， $R_1$ ， $R_2$ 为曲率半径。高斯曲率基本上确定了壳面的二维几何形状。若高斯曲率为零，即 $k_1 \cdot k_2 = 0$ ，例如筒壳(壳面的主要曲率半径之一， $R_2 = \infty$ ，即其母线为直线)，其壳面的一个方向没有曲率。若高斯曲率大于零，即 $K > 0$ ，例如球壳的情况， $k_1$ 、 $k_2$ 符号相同。若高斯曲率小于零，即 $K < 0$ ，例如双曲壳， $k_1$ 、 $k_2$ 符号相反。

薄壳也能以其壳面的几何形状分类。图1-2所示几种壳面均为一曲线沿另一曲线平移而成。它们分别为椭圆壳，筒壳和双曲壳。

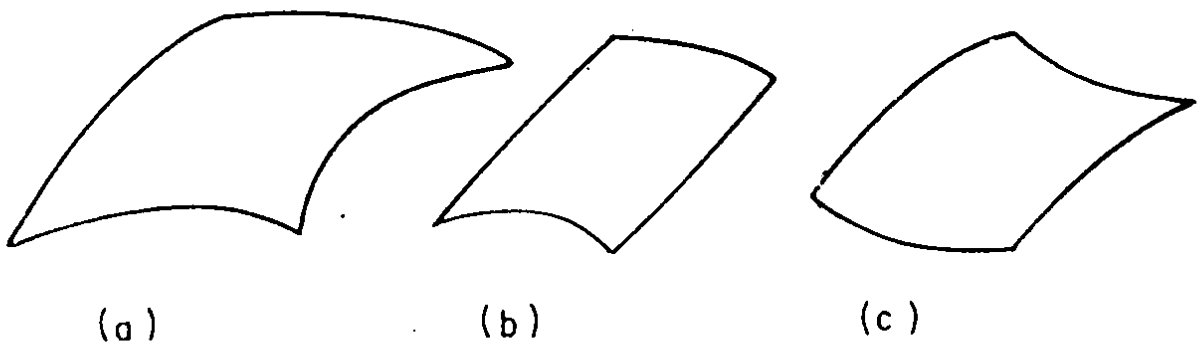


图1-2 平移形成的壳面

壳面也可通过旋转形成。由一直线相对于同一平面内的另一一直线旋转即形成旋转壳。图1-3所示为锥形薄壳。

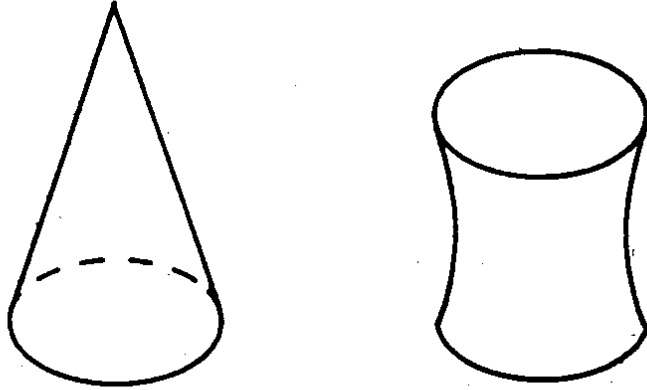


图1-3 旋转形成的壳体

### 3. 内力与合应力<sup>[1]</sup>

图1-4所示为作用在一薄壳单元体各边上的内力与力矩。应力和应力力偶定义为：作用在中面单位长度的内力和力矩，为应力在壳体中面单位长度上沿其厚度的积分。

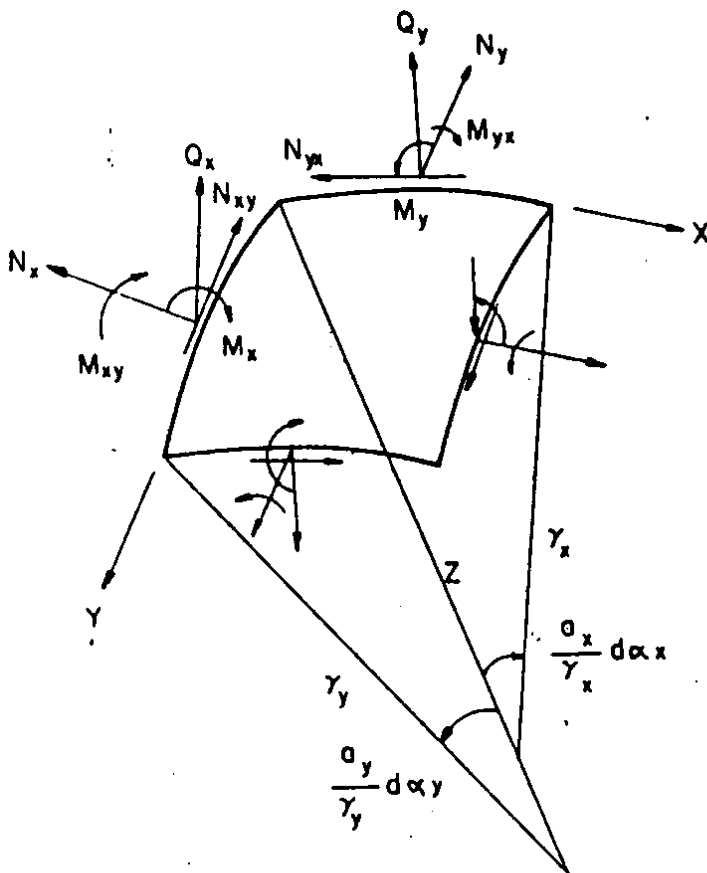


图1-4 壳体单元的内力

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz$$

$$N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$N_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz$$

$$M_{xy} = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz$$

(1-2)

一旦已知应力的合力，各应力可由单元法求得。在一匀质的很薄的壳体内，我们认为其应力分布是线性的，应力可由在轴力和弯矩作用下的矩形横截面梁的公式来求得：

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{N_x}{t} \pm \frac{12M_x z}{t^3} \\
 \sigma_y &= \frac{N_y}{t} \pm \frac{12M_y z}{t^3} \\
 \tau_{xy} &= \frac{N_{xy}}{t} - \frac{12M_{xy} z}{t^3} \\
 \tau_{yx} &= \frac{N_{yx}}{t} - \frac{12M_{yx} z}{t^3} \\
 \tau_{xz} &= -\frac{3Q_x}{2t} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right) \\
 \tau_{yz} &= -\frac{3Q_y}{2t} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right)
 \end{aligned} \tag{1-3}$$

#### 4. 薄膜理论<sup>[1,2,3]</sup>

薄壳为一种能承受垂直于自身平面的弯矩和剪力的曲面薄板。将薄膜定义为：有着与薄壳相同的几何形状但不能传递横向弯矩或剪力的物体。正象一根绳索，尽管形似梁却不能承受弯矩或剪力。如果薄壳壁确实很薄以致比较容易弯曲，壳壁将仅以拉应力或压应力承载。如果边界条件不妨碍薄壳的自然变形趋势，则只存在上述应力。如果边界条件不允许上述拉一压应力引起的薄壳变形，那么将存在局部的弯曲。由此产生了薄膜应力和弯曲应力的概念。薄膜应力理论应用很多，计算上也很简化。

如果忽略所有的弯矩和扭矩，薄壳理论便大大简化了。全部未知应力由10个减少到3个： $N_x$ ， $N_y$ 和 $N_{xy} = N_{yx}$ ，如图1-5。以

鸡蛋壳为例，尽管蛋壳很薄，但只要不破碎和出现可见变形，便可承受相当的外力。上述力主要是法向力 $N_x$ ， $N_y$ 和剪力 $N_{xy} = N_{yx}$ 。既然不出现大的变形，其弯矩和扭矩也应非常小。由三个力平衡方程可计算上述内力。然后可计算出相应的变形。

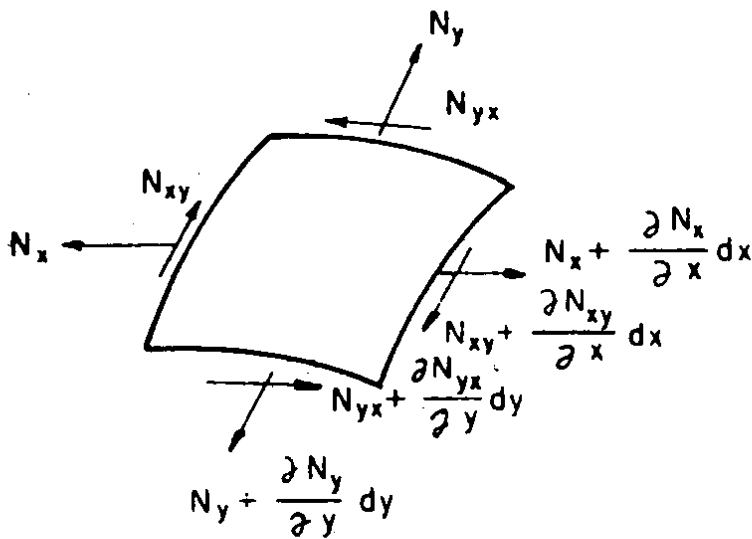


图1-5 薄膜力

薄膜理论应用于薄壳设计，计算上很方便，但必须满足下述条件：

- (1) 薄膜应力引起的变形尚未导致可见弯曲；
- (2) 全壳面承受均布荷载；
- (3) 边界可协调力的分布并允许位移与薄膜合应力相应。

## 5. 薄壳分析中的假定<sup>[2]</sup>

薄壳分析中包括：建立单元体的平衡微分方程，并达到应变的协调，从而使各相邻单元变形后仍是连续的。

必须满足下列假定

**微小的挠度：**这是薄壳分析的基础。挠度应足够的小，使得薄壳几何方面的变化不致影响系统的静态平衡。

**弹性状态：**将线性弹性状态应用于薄壳分析可得到应力-应变的直接关系，由此可将应力的合力和力偶的平衡方程表述为应变协调方程。

**弯曲后截面仍为平截面：**中面法线上各点在变形后仍保持在原法线上。

剪力引起的变形很小：径向剪力( $Q_x$ 和 $Q_y$ )产生的壳体变形很小，可忽略。

基于上述假定，我们可分五步列出薄壳的一般公式：

(1) 建立壳单元力的平衡微分方程，

我们可得到下列五个方程(内含八个未知值)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (N_x a_y) - N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (N_{yx} a_x) - Q_y \frac{a_x a_y}{r_{xy}} \\
 & - Q_x \frac{a_x a_y}{r_x} + p_x a_x a_y = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (N_y a_x) - N_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (N_{xy} a_y) - Q_x \frac{a_x a_y}{r_{xy}} \\
 & - Q_y \frac{a_x a_y}{r_y} + p_y a_x a_y = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (Q_x a_y) + \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (Q_y a_x) + N_x \frac{a_x a_y}{r_x} + N_{xy} \frac{a_x a_y}{r_{xy}} + N_{yx} \frac{a_x a_y}{r_{xy}} \\
 & + N_y \frac{a_x a_y}{r_y} + p_z a_x a_y = 0 \\
 & - \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (M_y a_x) - M_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - M_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (M_{xy} a_y) + Q_y a_x a_y = 0 \\
 & - \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (M_x a_y) - M_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + M_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (M_{yx} a_x) + Q_x a_x a_y = 0
 \end{aligned} \tag{1-4}$$

其中， $\alpha_x$ 和 $\alpha_y$ 是两族曲面参数， $da_x$ 和 $da_y$ 定义了单元的各边， $a_x$ 和 $a_y$ 是参数一长度的转换系数。如果忽略薄壳内的所有弯曲，

那么，上面的方程可简化为



$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial(N_x a_y)}{\partial \alpha_x} - N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial(N_{yx} a_x)}{\partial \alpha_x} + p_x a_x a_y &= 0 \\
 \frac{\partial(N_y a_x)}{\partial \alpha_y} - N_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N_{xy} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial(N_{yx} a_y)}{\partial \alpha_y} + p_y a_x a_y &= 0 \\
 \frac{N_x}{r_x} + \frac{N_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N_{yx}}{r_{xy}} + \frac{N_y}{r_y} + p_z &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

式1-5中只含有三个未知值： $N_x$ 、 $N_y$ 和 $N_{xy}=N_{yx}$ ，称之为薄膜应力的合力，全部作用在薄壳壳面内。

## (2) 建立应变-位移关系式

如果 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 方向的位移分量分别为 $u$ 、 $v$ 、 $w$ ，表示 $a_y (d\alpha_y)$ 与 $a_x (d\alpha_x)$ 之间总的角变化的剪切应变为 $\gamma'_{xy}$ ，则中面应变可表述为：

$$\left. \begin{aligned}
 \epsilon'_x &= \frac{1}{a_x} \frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_x} \\
 \epsilon'_y &= \frac{1}{a_y} \frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_y a_x} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_x} \\
 \gamma'_{xy} &= \frac{1}{a_x} \frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y} \frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{u}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{2w}{r_{xy}}
 \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

如果 $\phi_x$ 、 $\phi_y$ 分别是中面绕 $y$ 轴和 $x$ 轴的转角，其曲率变化可表述为：其中 $\chi_{xy}$ 是扭矩变量

$$\left. \begin{aligned}
 \chi_x &= \frac{1}{a_x} \frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_x} \\
 \chi_y &= \frac{1}{a_y} \frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_y a_x} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \\
 2\chi_{xy} &= \frac{1}{a_y} \frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x} \frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x} - \frac{\phi_x}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\phi_y}{a_y a_x} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x}
 \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

in which  $\chi_{xy}$  is the change in twist.

### (3) 建立应力-应变关系式

距中面距离 $Z$ 的壳体的应变由两部分组成: 中面拉伸引起的应变( $\epsilon'_x$ ,  $\epsilon'_y$ )及弯曲产生的应变。令 $\chi$ 为曲率变量, 可将应变表述为:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon'_x - Z\chi_x \\ \epsilon_y &= \epsilon'_y - Z\chi_y \\ \gamma_{xy} &= \gamma'_{xy} - 2Z\chi_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

我们假定薄壳的材料是线性弹性的, 各向同性的和匀质的。可建立应力-应变关系式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

其中 $G = E/2(1+\nu)$ 是剪切刚度模量或弹性模量。

我们可将方程(1-8)和(1-9)代入方程(1-2), 并积分, 得其中

$$\left. \begin{aligned} N_x &= K (\epsilon'_x + \nu\epsilon'_y) \\ N_y &= K (\epsilon'_y + \nu\epsilon'_x) \\ N_{xy} &= N_{yx} = Gt \gamma'_{xy} \\ M_x &= -D (\chi_x + \nu\chi_y) \\ M_y &= -D (\chi_y + \nu\chi_x) \\ M_{xy} &= -M_{yx} = D(1-\nu)\chi_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

in which

$$K = \frac{Et}{1-\nu^2}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

$K$ 和 $D$ 分别是壳体的拉伸刚度和弯曲刚度。

#### (4) 将力-应变关系式转换成力-位移方程

将方程(1-6), (1-7)代入方程(1-10), 可得到下列力-位移方程

$$\begin{aligned}
 N_x &= K \left[ \frac{1}{a_x} \frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{\nu}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_x} \frac{w}{r_x} + \nu \left( \frac{1}{a_y} \frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y} \right) \right] \\
 N_y &= K \left[ \frac{1}{a_y} \frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y} + \nu \left( \frac{1}{a_x} \frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{\nu}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x} \right) \right] \\
 N_{xy} &= N_{yx} = Ct \left( \frac{1}{a_x} \frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y} \frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{u}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\nu}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{2w}{r_{xy}} \right) \\
 M_x &= -D \left[ \frac{1}{a_x} \frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \nu \left( \frac{1}{a_y} \frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \right) \right] \\
 M_y &= -D \left[ \frac{1}{a_y} \frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \nu \left( \frac{1}{a_x} \frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \right) \right] \\
 M_{xy} &= -M_{yx} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( \frac{1}{a_y} \frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x} \frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x} - \frac{\phi_x}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\phi_y}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \right)
 \end{aligned} \tag{1-11}$$

方程(1-11)中含九个未知值, 方程(1-4)中含八个未知值, 综合起来有11个方程和未知值。以普通解法求解是可能的, 但极其烦琐, 即使对于最简单的薄壳类型而言也如是。因而, 常常将薄壳设计建立在对一般理论的某些简化的基础上。由这些简化的引入, 使得我们尽可能无条件地获得一种合乎数学逻辑的解法。薄膜理论便是其一。

#### 参考文献

1. Flugge, W., *Stress in Shells*, Springer-Verlag, New York, 1966.
2. Billington, D., *Thin Shell Concrete Structures*, McGraw-Hill Book Company, 1965.
3. Den Hartog, J. P., *Advanced Strength of Materials*, McGraw-Hill Book Company, 1952.

## 第二章 穹顶的分析

### 1. 绪言

穹顶是有着正高斯曲率的旋转薄壳。其厚度很薄。一平面曲线绕其平面内某一轴旋转而形成旋转壳面。我们称该曲线为子午线，称该平面为子午面。本章将讨论建立于薄膜理论基础的穹顶分析，薄膜应力的合力在边界处的误差及其校正方法。

### 2. 承受轴对称荷载的穹顶<sup>[1]</sup>

图2-1中的壳单元在极坐标中各参数可定义为：

$$\begin{array}{llll} \alpha_x = \theta & a_x = r_0 & r_x = r_1 & N_x = N_\theta \\ \alpha_y = \phi & a_y = r_1 & r_y = r_2 & N_y = N_\phi \end{array}$$

旋转薄壳体系对称于旋转轴，故所有包含 $\partial\theta$ 的几何项为零，方程(1-5)变为：

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} r_1 + N_{\theta\phi} \frac{\partial r_0}{\partial \phi} + \frac{\partial(N_{\phi\theta} r_0)}{\partial \phi} + p_\theta r_0 r_1 = 0 \\ \frac{\partial(N_\phi r_0)}{\partial \phi} - N_\theta \frac{\partial r_0}{\partial \phi} + \frac{\partial(N_{\theta\phi} r_1)}{\partial \theta} + p_\phi r_0 r_1 = 0 \\ \frac{N_\theta}{r_2} + \frac{N_\phi}{r_1} + p_z = 0 \end{array} \right\} \quad (2-1)$$

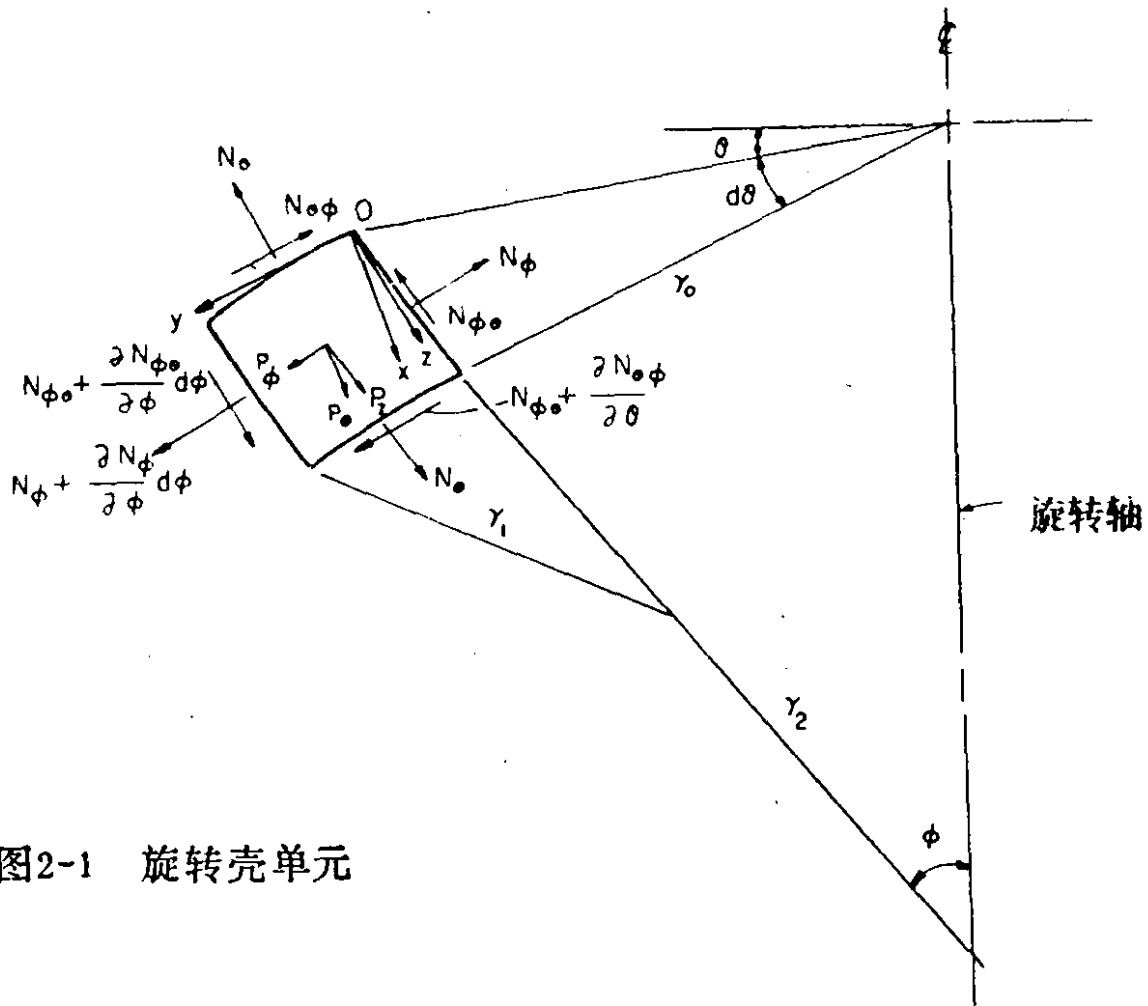


图2-1 旋转壳单元

当荷载对称于旋转轴时，因 $\theta$ 无变化，所有包含 $\partial\theta$ 的项为零，且 $\partial\phi$ 可写成 $d\phi$ 。由于 $P_\theta$ 也为零，可约掉方程(2-1)中的①式，其余两式简化为：

$$\frac{d(N_\theta r_0)}{d\phi} - N_\theta \frac{dr_0}{d\phi} + p_\phi r_0 r_1 = 0$$

$$\frac{N_\theta}{r_2} + \frac{N_\phi}{r_1} + p_z = 0 \quad (2-2)$$

轴对称穹顶在对称荷载作用下，解出方程(2-2)可求得薄膜应力的合力 $N_\theta$ 和 $N_\phi$ 。

$$N_\theta = -\frac{r_0}{\sin\phi} \left( \frac{N_\phi}{r_1} + p_z \right) \quad (2-3a)$$

$$N_\phi = -\frac{1}{2\pi r_0 \sin\phi} \int_0^\phi (p_\phi \sin\theta + p_z \cos\phi) (2\pi r_0) r_1 d\phi \quad (2-3b)$$

方程(2-3b)中的积分表示作用在以 $\phi$ 定义的平行圆上的垂直荷载的总和。从图2-2可知,参量 $N_\phi, 2\pi r_0 \sin\phi$ 是以 $\phi$ 定义的平行圆上 $N_\phi$ 的垂直分量总和,可写作:

$$N_\phi = -\frac{R}{2\pi r_0 \sin\phi} \quad (2-4a)$$

$$N_\theta = \frac{R}{2\pi r_1 \sin^2\phi} - p_z \frac{r_0}{\sin\phi} \quad (2-4b)$$

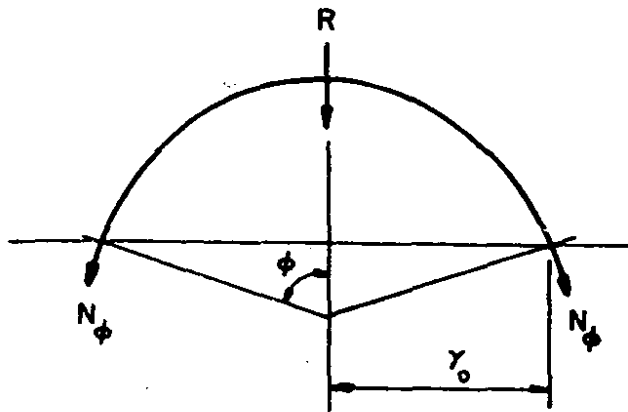


图2-2 以 $\phi$ 定义的平行圆以上的穹顶截面。

### 3. 球形穹顶<sup>[1,2,3]</sup>

#### 穹顶壳面上作用均布荷载

一等厚度球形穹顶,在静载 $q$ 作用下,其 $r_1 = r_2 = a$ ,

$$p_\phi = q \sin\phi$$

$$p_z = q \cos\phi$$

$$\begin{aligned} R &= 2\pi a^2 q \int_0^\phi \sin\phi \, d\phi \\ &= 2\pi a^2 q(1 - \cos\phi) \end{aligned}$$

方程2-4a和2-4b变为

$$N_\phi = -\frac{aq}{1 + \cos\phi} \quad (2-5a)$$

$$N_{\theta} = aq \left( \frac{1}{1 + \cos\phi} - \cos\phi \right) \quad (2-5b)$$

半球面上 $N_{\phi}$ 、 $N_{\theta}$ 的分布见图2-3。子午线上的压力值从穹顶的顶端至底边是递增的。环向应力值从球顶的最大压应力递减至 $\phi = 51^{\circ}50'$ 处的零值，其后变为拉应力递增至底边的最大值。

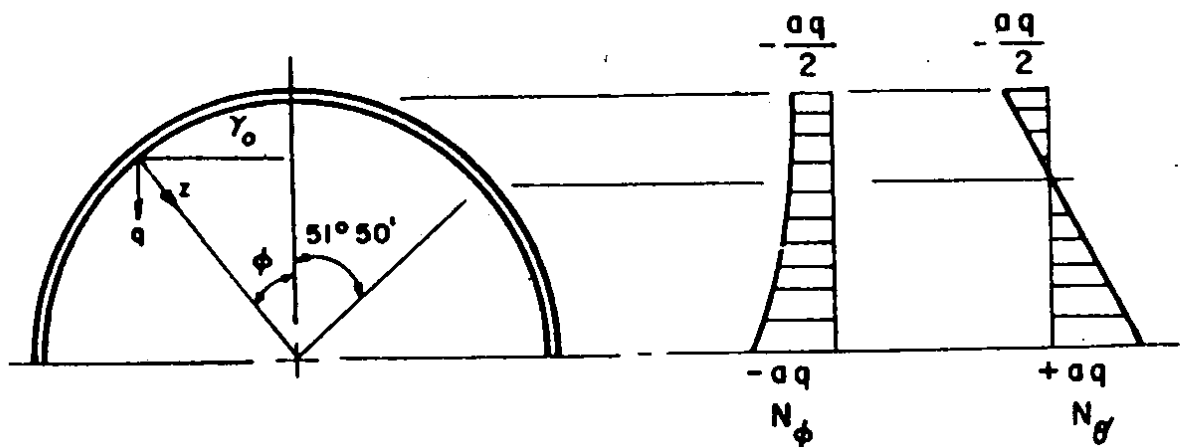


图2-3 静载作用下的半球面穹顶

在许多情况下，穹顶都是竖向支承的，并且在其底边形成一环向拉应力以抵抗水平推力 $H_{\phi}$ ， $H_{\phi} = N_{\phi} \cos\phi$ ，环向力 $T_{\phi}$ 可由下式计算：

$$T_{\phi} = N_{\theta} a \sin\phi \cos\phi \quad (2-6)$$

这一拉应力可能会很大，而且通常需要用配筋的边缘加劲环。这一环上的应变是拉应变，反之，通常穹顶环的应变都是压应变且极少会相等于加劲环的拉应变，因为应变必须是协调的，因此，沿子午线便会出现弯曲。当穹顶竖向支承时，其内部水平薄膜应力的合力必须平衡，以使

$$\int_0^{\phi} N_{\theta} a \, d\phi + T_{\phi} = 0$$

在 $\phi = 51^{\circ}51'$ 时， $T_{\phi}$ 为最大值

$$\begin{aligned} \text{在 } \phi = 90^{\circ} \\ T_{\phi} = 0 \end{aligned}$$

并且

$$\int_0^{\pi/2} N_{\theta} a d\phi = 0$$

**穹顶壳面水平投影上的均布荷载。**

在此情形下,  $R = \rho a^2 \pi \sin^2 \phi$ , 从方程(2-4a)和(2-4b)可得:

$$N_{\phi} = -\frac{ap}{2} \quad (2-7a)$$

$$N_{\theta} = -\frac{ap}{2} \cos 2\phi \quad (2-7b)$$

方程(2-7a)和(2-7b)的受力分布情况见图2-4。其中 $N_{\phi}$ 是一恒定的压力值, 而 $N_{\theta}$ 从顶部受压变化到边缘受拉, 其零值环在 $\cos 2\phi = 0$ 或 $\phi = 45^\circ$ 处。

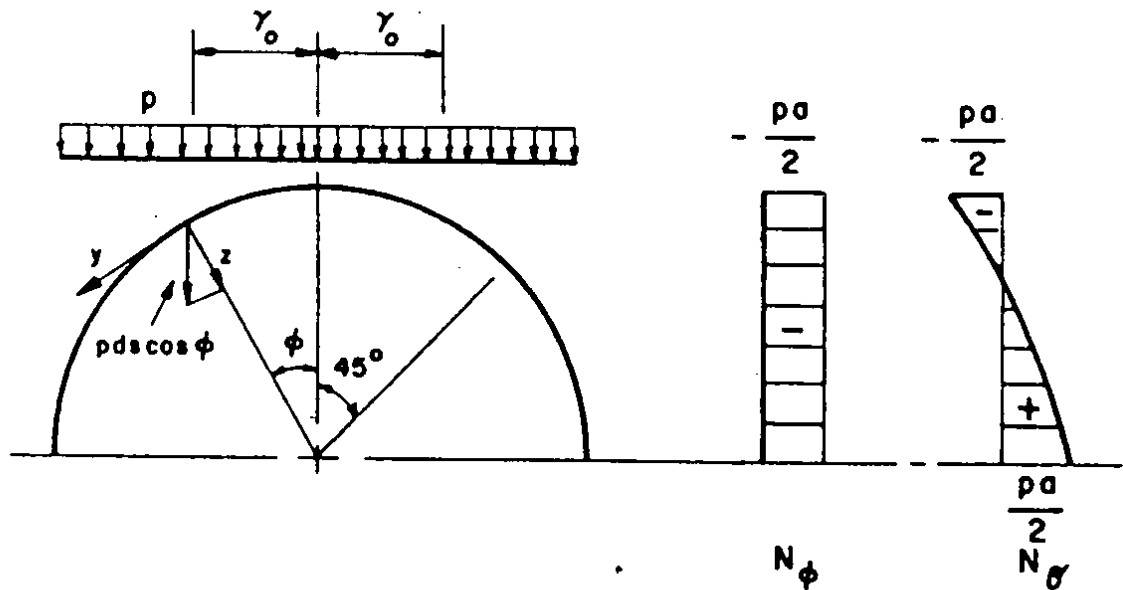


图2-4 穹顶水平投影上的均布荷载。

**均布外压荷载**

由于穹顶全壳面承受均布压力荷载 $p$

$$P_x = P, P_{\phi} = 0, \text{ 和 } P_{\theta} = 0$$



$$R = 2\pi a^2 p \int_0^\phi \sin\phi \cos\phi \, d\phi = \frac{\pi a^2 p}{2} [2 \sin^2\phi]_0^\phi$$

$$N_\phi = -\frac{\pi a^2 p \sin^2\phi}{2a \sin^2\phi} = -\frac{pa}{2} \quad (2-8a)$$

$$N_\theta = -a \left( p - \frac{pa}{2a} \right) = -\frac{pa}{2} \quad (2-8b)$$

### 变厚度穹顶

P16 厚度有变化的穹顶如图2-5所示，可认为其厚度由两部分组成—不变厚度 $t$ 和有规律变化的 $t'$ ， $t'$ 在 $\phi_0$ 处为零，以下部分的变化是 $\phi$ 的函数。若 $q'$ 是 $t'$ 引起的穹顶自重增量，则，

$$\begin{aligned} p_r &= q' (\phi - \phi_0) \cos\phi \\ p_\phi &= q' (\phi - \phi_0) \sin\phi \\ p_\theta &= 0 \end{aligned}$$

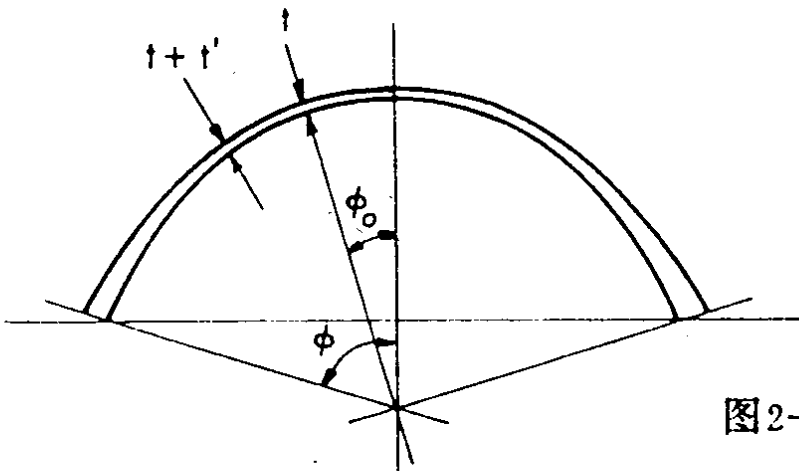


图2-5 变厚度穹顶

$q'$ 引起的薄膜应力的合力由下式求得：

$$\begin{aligned} R &= 2\pi a^2 q' \int_{\phi_0}^\phi \sin\phi (\phi - \phi_0) \, d\phi \\ &= 2\pi a^2 q' [\sin\phi - \sin\phi_0 - (\phi - \phi_0) \cos\phi] \end{aligned}$$

$$N'_\phi = \frac{-aq'}{\sin^2\phi} [\sin\phi - \sin\phi_0 - (\phi - \phi_0) \cos\phi] \quad (2-9a)$$