

## 简单动力系统 中的倍周期分

### 岔和“混乱”行为

郝柏林

(中国科学院理论物理研究所)

对于同一个客观世界, 在物理学中有着确定论和概率论的两套描述方法。天体力学曾经是确定论描述的楷模, 而热力学则必须引用统计概念来论证。如何跨越两套描述之间的鸿沟, 长期以来是物理学中的基本问题之一。

即使抛开摆长涨落等等物理因素, 一支数学摆的运动也不能完全由力学刻画。如果初始角度正好在不稳定的平衡点, 而初始速度为零, 则摆的未来运动方向将由极其微小的随机因素决定。然而我们今天要讨论的不是这种“外在”的随机性, 它们往往只对应相空间中一些测度为零的初值点的集合。

一些简单的动力系统(一维的非线性迭代过程或某些非线性常微分方程组)表现出内在的随机性。它们具有普遍而深刻的规律, 可能导致对湍流和非线性振动现象的新的认识, 至少要求我们今后在力学教学中更全面地注意耗散系统和不可积哈密顿系统的问题。这一领域正在成为当前的热门之一, 其形势与七十年代初重正化群概念开始应用于相变理论时相似, 而且它本身也正在从重正化群和临界现象中寻求类比。1980年暑期以来, 有多次国际会议或暑期学校, 部分或全部地讨论与此有关的问题(见<sup>[1-6]</sup>), 而且已经出版了专著<sup>[7]</sup>和许多总结文章(这些综述中我们只指出最近的三篇<sup>[8-10]</sup>和一篇起过很大促进作用的老文章<sup>[11]</sup>, 读者可从中找到大量引文)。

在1980年八月于大连举行的第二次非线性非平衡统计物理会议上, 我们曾经作过一次简短介绍<sup>[12]</sup>。现在再综述最近的一些发展, 並涉及我们自己的若干工作<sup>[13-17]</sup>。本文仍然是一篇从头开始、适可而止的评述, 並不要求读者具有专门的预备知识。

### 一、简单的实例

让我们来考虑一个非线性迭代过程

$$y_{n+1} = \mu y_n (1 - y_n), \quad (1)$$

它依赖于参数  $\mu$ 。这是一种没有世代重迭的“虫口”模型, 其中  $(1 - y_n)$  因子计入由于食物限制而导致的饱和效应。稍作变量和参数代换, 可把它写成

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad (2)$$

当参数  $\lambda$  限制在  $(0, 2)$  区间内时, 只要  $x_n$  在  $(-1, 1)$  区间内取值,  $x_{n+1}$  也就落在同一区间内。我们说, (2) 式是一个从线段  $(-1, 1)$  到线段  $(-1, 1)$  的非线性映象。

这类一般形式为

$$x_{n+1} = f(\lambda, x_n) \quad (3)$$

的非线性映射，大量出现在数值计算实践中。它们来自非线性方程的迭代求解，来自微分方程初值问题的差分格式等等。但是多年来人们却忽略了它们在参数  $\lambda$  的一定范围内可能具有的复杂而又普遍的数学结构。直到年青的理论物理工作者 Feigenbaum 用台式计算机发现了其中的普适规律，并从标度变换的角度作出理论说明<sup>[1][2]</sup>之后，才引起人们注意，成为许多物理和数学工作者关注的问题。

在(2)式中将  $\lambda$  的区间  $(0, 2)$  按步长 0.0075 分成小段。对于每个固定的  $\lambda$  都用初值  $x_0 = 0.4$  进行迭代。为了避开过渡过程，先舍去前 300 个迭代值，再把后面 200 次迭代所得的每个  $x_n$  都标在同一条垂直线上，竟得到图 1<sup>1)</sup>。当  $\lambda$  值较小时，迭代很快达到不动点：

$$x^* = x^*(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} (\sqrt{1+4\lambda} - 1), \quad (4)$$

这就是图 1 最左面的那段曲线。为了判断这个不动点的稳定性，在(2)或(3)式中令  $x_n = x^* + \varepsilon_n$ ，展开到线性项得到稳定性的必要条件

$$|f'(\lambda, x^*)| \leq 1. \quad (5)$$

以(4)式代入，看出只有  $\lambda \leq 0.75$  时它才是稳定的。当  $\lambda$  超过 0.75 之后，这个不动点失去稳定性，但是出现一个稳定的 2 点周期：

$$\begin{aligned} x_2^* &= 1 - \lambda (x_1^*)^2, \\ x_1^* &= 1 - \lambda (x_2^*)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

显然， $x_1^*$  和  $x_2^*$  都是复合迭代

$$x \rightarrow f(\lambda, f(\lambda, x)) \quad (7)$$

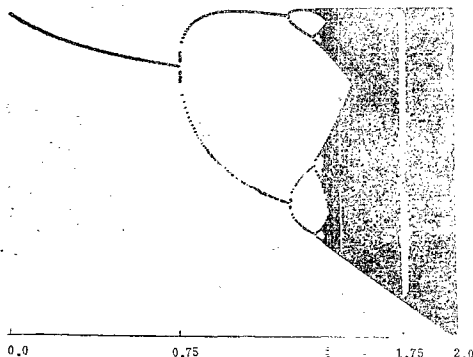


图 1 一级分岔序列和嵌在混乱带中的二级序列(纵坐标变化范围从 -1 到 +1)。

1) 图 1—3 是与 G. Parisi 一齐使用罗马大学马可尼物理研究所 VAX 计算机所配的显示屏绘制的。

的不动点。线性稳定性分析表明，它们只在  $0.75 < \lambda < 1.25$  区间内是稳定的。 $\lambda$  超过 1.25 之后，2 点周期失稳，出现稳定的 4 点周期，它们都是非线性迭代

$$x \rightarrow f(\lambda, f(\lambda, f(\lambda, f(\lambda, x)))) \quad (8)$$

的稳定不动点，但稳定区间更窄： $1.25 < \lambda < 1.3680\cdots$  此后迅速出现  $2^n$  点周期， $n = 3, 4, 5\cdots$  等等。图 1 中只分辨出 8 点周期。相应的分岔点  $\lambda_0 = 0.75$ ， $\lambda_1 = 1.25$ ， $\lambda_2 = 1.3680\cdots$  迅速收敛到  $\lambda_\infty = 1.40115\cdots$ 。Feigenbaum<sup>[11]</sup> 发现，它们按几何级数收敛

$$\lambda_n - \lambda_\infty \propto \delta^{-n} \quad (9)$$

收敛速率

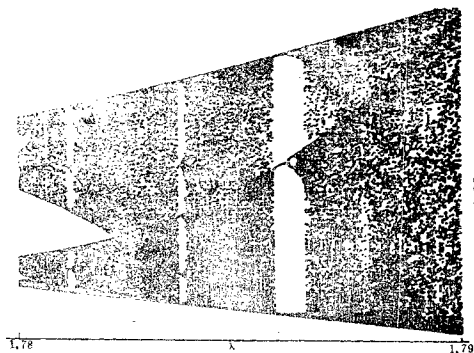


图 2 二级混乱带中的三级序列(纵坐标变化范围约为  $-0.13$  到  $+0.11$ )。

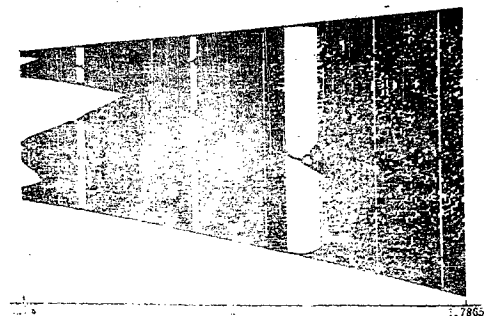


图 3 三级混乱带中的四级序列(纵坐标变化范围约为  $-0.015$  到  $+0.014$ )。

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2}} = 4.6692016091029909 \dots \quad (10)$$

是与  $f$  的具体形状无关 (只要求它在迭代值区间上有一个最大值, 在最大值附近可以展成二次函数) 的普适常数。

更有趣的是  $\lambda$  超过  $\lambda_n$  之后, 迭代结果似乎成为落在  $2^n$  ( $n = \infty, \dots, 3, 2, 1, 0$ ) 个区间内的随机数。图 1 中只分辨出  $n = 3, 2, 1, 0$  的四种“混乱”带。然而图 1 右半并没有“乱”成一片, 混乱带中的不少透明处表明还存在着明确的多点周期, 其中  $\lambda = 1.75$  处开始的三点周期最为明显, 而且它还继续分岔为 6 点周期等等。如果把  $\lambda = 1.75 \sim 1.7924$  一段取出来放大, 可以看到 3 点周期中的每一点都发展成像图 1 本身一样的无穷分岔序列, 包括周期点的正序列和混乱带的反序列。

图 2 就是把  $\lambda = 1.78 \sim 1.79$  区间分为 200 步, 每个  $\lambda$  值迭代 600 次, 舍去前 300 个值, 而后面每迭代三次绘出一点得到的。这样我们就从三点周期导致的三个分岔序列中取出一个来仔细观察 (事实上取出来的是图 1 三点序列中居中的那个, 纵坐标也相应放大了近十倍)。图 2 中可以清楚看到, 在二级混乱带中嵌有不少三级序列, 其中最明显的又是一个三点 (实际是九点, 因为我们从每三次迭代中只保留一次) 序列。

取出  $\lambda = 1.78632 \sim 1.7865$  一段分为 180 格, 对每个  $\lambda$  值在迭代到定态后每九次绘出一点, 就得到图 3。这里看到的是嵌在三级混乱带中的四级分岔序列, 其中最清楚的是一个 27 点周期所导致的序列。

图 1 那样的分岔结构是许多人熟知的 (可参看<sup>[7]</sup>中 1.19 图或<sup>[10]</sup>中图 1), 图 2 和图 3 所示的无穷嵌套的自相似结构, 虽然原则上已包含在<sup>[10]</sup>的数学讨论中, 但人们必须使用一点“分频采样法”<sup>[11]</sup>, 即每三次或九次迭代采样一次, 才能形象地表示出来。

图 1 至 3 中的“混乱”带, 是否真正对应随机分布的  $x_n$  值? 单纯靠数值计算, 很难区分极长的周期解, 非周期解和“混乱”解这三种情形。对于非线性映象 (2), 至少对若干特殊的  $\lambda$  值 (包括  $\lambda = (2 - \epsilon, 2)$  区间,  $\epsilon > 0$ ), 已经严格证明迭代结果的分布具有连续测度。因此, 它们原则上是与随机分布的数无法区分的。

## 二、普适性和标度性

一维非线性映象的研究, 至少已经有六十年历史 (见<sup>[7]</sup>中所引文献)。然而, 普适规律和标度性质的发现, 才使它们成为人们普遍关注的问题。我们仍以映象 (2) 或 (3) 为例继续讨论。

除了倍周期分岔点的收敛速率  $\delta$  (见前面 (10) 式), 还有许多不依赖于 (3) 式具体形式的普适常数, 其中最重要的是“标度因子”

$$\alpha = 2.50290787509589284 \dots, \quad (11)$$

也有人使用它的负倒数

$$\lambda = -\frac{1}{\alpha} = -0.3995353 \dots \quad (11a)$$

它的意义是: 在 (3) 式迭代收敛过程中, 一些几何特征在愈来愈小的尺度上重复, 每次缩小  $\alpha$  倍。更确切些说, 如果把映象 (3) 套用  $p$  次所得的函数记为

$$F(p, \lambda, x) = \underbrace{f(\lambda, f(\lambda, \dots f(\lambda, x) \dots))}_{p \text{ 次}}, \quad (12)$$

并把  $F(2, \lambda, x)$ ,  $F(4, \lambda, x)$ , ... 等画出来, 就可以看到  $F(2n, \lambda, x)$  的中心部分很象是把  $F(n, \lambda, x)$  缩小  $\alpha$  倍再颠倒过来的结果, 这时  $x$  本身的尺度也要变化  $\alpha$  倍。Feigenbaum<sup>[18]</sup> 证明, 当  $n$  很大时, 各种属于 (2) 式一类的非线性映象都趋于一个普适函数  $g(x)$ , 它是由函数方程

$$g(x) = -\alpha g\left(g\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) \quad (13)$$

决定的。目前关于  $g(x)$  的解析知识不多, 但有一批数值结果。

下面我们列举其它的普适常数, 不再详加解释。

(一) 把非线性映象 (3) 的历次迭代结果作为时间序列进行傅立叶分析, 分岔过程表现为功率谱中出现主频之外的二频、四频、八频... 等等峰, 它们的高度有规律地降低, 每次减少

$$\beta^{(1)} = 13.5 \quad \text{分贝} \quad (14)$$

$\beta^{(1)}$  是一个普适常数<sup>[12]</sup>, 对于它的数值目前理论和实验上都有一些分歧。

(二) 混乱带的功率谱由对应主频和各次分频的宽峰和噪声背景构成。当分频的次数  $n$  很大时, 峰宽的变化是<sup>[22, 23]</sup>

$$W_n = W_0 \beta^{-n}, \quad (15)$$

其中  $\beta = 3.48$  据说是一个新的普适常数, 与  $\delta$  和  $\alpha$  没有关系。然而, 最近有人指出它是由  $\alpha$  决定的, 但所给的估计不同,<sup>[24]</sup> 中是

$$\beta = \frac{2}{1+\alpha} = 3.58$$

而<sup>[25]</sup>中为

$$\beta = \alpha^2 \sqrt{\frac{2}{1+\alpha^2}} = 3.29$$

(三) 每个倍周期分岔点附近都发生临界慢化现象, 即达到定态所需的时间趋向无穷大。在不动点

$$x^* = F(p, \lambda, x^*)$$

附近

$$x_n = x^* + \epsilon_n,$$

$\epsilon_n$  随  $n$  指数衰减

$$\epsilon_n \propto e^{-n/\tau},$$

但“时间常数” $\tau$  发散

$$\tau = \frac{\lambda_n}{p|\lambda - \lambda_n|^d}, \quad (16)$$

慢化临界指数  $d = 1$ <sup>[14]</sup>, 这正是普通相变平均场理论的结果。不过这里能看到的只是“单边”慢化现象, 即由低阶分岔状态往高阶分岔状态接近时发生慢化。

普适性的重要表现, 不仅在于上面提到的各种普适常数和分岔结构对于相当多的一维非线性映象都成立, 而且看来对于高维映象和由微分方程描述的系统也能适用。除了一维映象外, 迄今已经研究过三类系统。

第一类, 二维非线性映象。最著名的是所谓 Hénon 映象<sup>[26-29]</sup>

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + y_n \quad (17)$$

$$y_{n+1} = bx_n$$

当  $b$  很小时, 它基本上是一维映象 (2)。映象 (17) 的雅可比行列式等于  $-b$ , 因此当  $b < 1$  时它是收缩映象, 可看作一种简单的耗散系统。通常人们取  $b = +0.3$ , 研究它的分岔结构与  $\lambda$  的关系。

Kadanoff 最近研究了二维映象

$$r_{n+1} = r_n - \frac{k}{2\pi} \cos(\pi\theta_n), \quad (18)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + r_{n+1},$$

它与各向异性并计入次近邻作用的易辛模型 (JNNNI 模型) 有密切关系。Aronson<sup>[55]</sup> 最近在研究二维映象

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n, \\ y_{n+1} &= \lambda y_n (1 - x_n), \end{aligned} \quad (19)$$

不难看出, 这是一维映象 (1) 的一种推广。

第二类, 自治常微分方程组

Lorenz 在 1963 年研究的模型方程组<sup>[30]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (20)$$

由于首次出现“奇异吸引区”(详见后面第三节)而著称。这导致 Ruelle 等人提出不同于朗道和 Hopf 模式的发生湍流的新的道路<sup>[54]</sup>(此参看<sup>[6]</sup>)。最近在 Lorenz 模型中也观察到倍周期分岔序列和若干混乱带。<sup>[32-36]</sup>

为了从简单些的模型出发, 探求湍流的产生过程, 人们把 Navier-Stokes 方程组放到二维环面上并加周期边界条件, 这样就把偏微分方程组化为无穷个傅立叶系数的常微分方程组。然后从物理考虑出发, 截取前若干个系数, 得到 5 个模<sup>[37]</sup>或 7 个模<sup>[38]</sup>的封闭方程组。

Rössler 构造了一批简单的非线性常微分方程组, 它们具有奇异吸引区等性质。<sup>[39]</sup> 其中如下的简单方程组

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + xz - cz \end{aligned} \quad (21)$$

中, 已经看到正的分岔序列和混乱带的逆序列(均看到 16 分频即 2<sup>4</sup> 分岔<sup>[40]</sup>)。还有人研究了双组元的 Lorenz 模型<sup>[10]</sup>, 得到五个模式的耦合方程组, 最近也看到了倍周期分岔序列。

所有上面提到的自治方程组都具有三个或更多变量和二次非线性项, 而且研究过程中只连续改变一个参数。

至少要有三个变量才能看到分岔和混乱现象, 这是由自治方程解的唯一性决定的。对于外力作用下的强迫系统, 往往只要有二个变量就可以出现分岔和“混乱”。这就是下面要讨论的

第三类系统, 即在周期外力作用下的强迫振荡系统。这样的例子很多, 如周期外力作用

下的非简谐振子<sup>[41]</sup>

$$\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} + \varphi - A\varphi^3 = \alpha \cos(\omega t), \quad (22)$$

周期激励下的参量摆<sup>[42]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= p \\ \dot{p} &= -Bp - (A + \alpha \cos(\omega t)) \sin \varphi, \end{aligned} \quad (23)$$

强迫布鲁塞尔振子<sup>[43-44, 13-17]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A - (B+1)x + x^2y + \alpha \cos(\omega t) \\ \dot{y} &= Bx - x^2y \end{aligned} \quad (24)$$

(这是带自催化步骤的三分子化学反应动力学方程, 当组份 A 受到周期调制时的情形。没有外力, 但带有扩散项的布鲁塞尔模型有许多文献, 可参看<sup>[45]</sup>及其引文)。其它如强迫 Duffin 方程, 强迫 Van der Pol 振子等均有人研究。

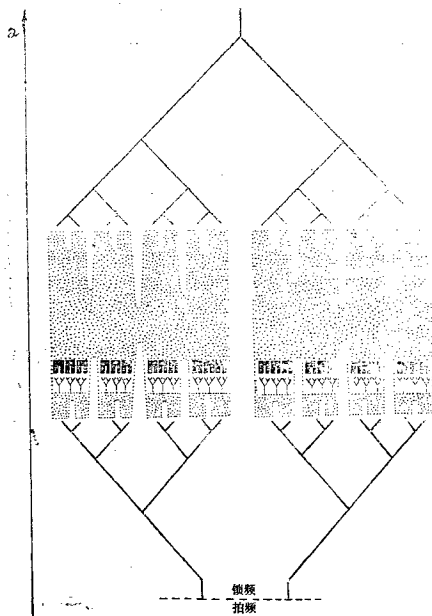


图4 强迫布鲁塞尔振子的分岔示意(A, B, ω固定, 纵轴是α, 没有比例)

相对于自治系统,在周期力作用下的强迫系统有两大优点。第一,它们往往可以看作非线性振子和线性振子(即周期外力)的耦合系统,从而使倍周期分岔和“混乱”的出现得到较直观的物理解释。图4是方程组(24)当 $A, B, \omega$ 固定,只改变耦合强度 $\alpha$ 时的分岔示意。当 $\alpha$ 很小时,两个振子没有耦合,系统中存在两个互相独立的频率。如果它们不可约,则出现“拍”现象,这就是图1横虚线下来详细示出的部分。当 $\alpha$ 达到0.008时,系统“锁频”到 $\omega/2$ 上,随后出现倍周期序列和混乱带的序列。当 $\alpha$ 很大时,外周期力处于支配地位,这就是图4上方的只有一个周期的运动,而它是经过另一个分岔序列才达到的。可以说,前一个序列是系统屈服于外力的过程,而后一个序列是外力取得支配的过程,在这两种过程之间才出现“混乱”。因此,“混乱”乃是非线性振动的一种特殊制度。

第二,外频率作为控制参数出现,才有可能使用分频采样法<sup>[13]</sup>来达到可与离散映象相比的分辨率。在现代电子计算机上很容易以极高精度求得非线性迭代的高阶分岔,但微分方程组的计算要求长得多的时间,特别是在每个分岔点附近还遇到临界慢化<sup>[14]</sup>。因此,迄今关于非线性微分方程中倍周期分岔的报导大多限于16或32分频之内,我们使用了分频采样法,才观测到许多较长的分岔序列。表1是方程组(24)中令 $A=0.4, B=1.2, \alpha=0.05$ 时对 $\omega$ 的分岔序列和对收敛速度的估计。

表1 方程(24)中的一个分岔序列

| 周期   | $\omega$ 的 范 围 | $\omega_n$ | $\epsilon_n$ |
|------|----------------|------------|--------------|
| 1    | -0.39820       | 0.398205   | 5.53         |
| 2    | 0.79821        | 0.7130625  | 4.24         |
| 4    | 0.7130625      | 0.7699998  | 4.02         |
| 8    | 0.779000       | 0.783435   | 4.16         |
| 16   | 0.78250        | 0.786776   | 4.41         |
| 32   | 0.78680        | 0.787525   | 5.30         |
| 64   | 0.78753        | 0.787695   | 4.04         |
| 128  | 0.78770        | 0.7877265  | 4.88         |
| 256  | 0.787727       | 0.78773425 | 4.92         |
| 512  | 0.7877345      | 0.78773585 |              |
| 1024 | 0.7877359      | 0.78773615 |              |
| 2048 | 0.78773620     |            |              |
| 4096 | 0.78773624     |            |              |
| 8192 | 0.78773625     |            |              |

有了这样高的分辨率之后,我们才得以首次在由微分方程组描述的系统,证实存在着与图1—3相似的多重嵌套的分岔序列的层次<sup>[15, 17]</sup>即初级分岔的混乱带中嵌有二级序列及其混乱带,(图4中只画了一个二级序列),而二级混乱带中又嵌有三级序列及其混乱带。

### 三、奇异吸引区

考虑一个由常微分方程组描述的动力系统,它具有 $n$ 维的相空间。在相空间中取一块有限体积,其维数仍是 $n$ 。观察这一块体积中的点如何随时间演化。对于保守系统,刘维定理保证这一区域的体积不变,但形状可以变化。对于耗散系统,体积可以缩小,在 $t \rightarrow \infty$ 的极



限下达到维数为  $D$  的渐近流型。当  $D < n$  时, 系统的运动趋向这个  $D$  维的吸引区。

有几种平庸的吸引区是人们熟知的。 $D = 0$  时是不动点, 对应与时间无关的非平衡定态。 $D = 1$  时是极限环, 对应周期解。 $D = 2, 3 \dots$  等等是高维环面, 对应各种准周期运动。

“混乱”解对应所谓“奇异吸引区”<sup>[12]</sup>。图5是方程组(24)在  $A = 0.4, B = 1.2, \alpha = 0.065, \omega = 0.8$  时的运动轨道。如果等待足够长的时间, 这一条轨道将充满整个图中的环带, 成为图6(b)那样的黑斑。然而这种填充是不均匀的, 任何时候只要放大足够多倍, 就可以看到填充比较密致和比较稀疏的部分。

奇异吸引区“奇”在三方面:

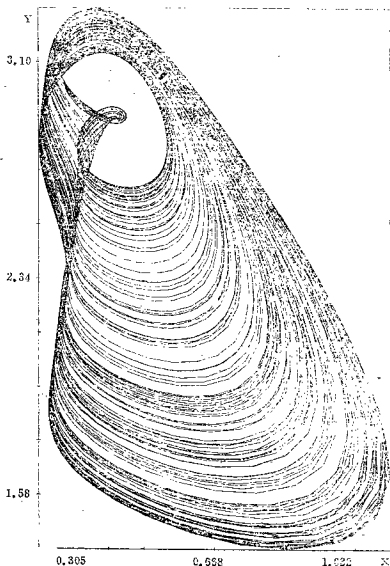


图5 对应“混乱”的一条轨道

第一, 它上面的运动对初始条件非常敏感。两个初始值靠得极近的点, 会在运动中指数式地分离开来。这里真正是“失之毫厘, 差之千里”。

第二, 它往往具有非整数的空间维数, 即豪斯道夫维数  $D$  (可参看<sup>[12]</sup>或<sup>[16]</sup>中的简单解释)。例如, Lorenz模型  $n = 3, D = 2.06$ , 而双组元的 Lorenz模型  $n = 5, D = 2.15$ <sup>[10]</sup>。

第三, 即使两个参数值极其接近, 相应奇异吸引区只是外部轮廓相似, 而拓扑结构完全

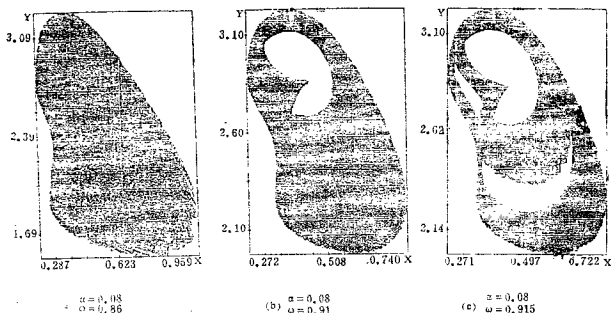


图 6 奇异吸引区  $A=0.4$   $B=1.2$

互不相干，不能从一个连续地变换到另一个。

当然，在数值实践中要判断一个吸引区是否奇异，不能只考察其轨道形状，还必须计算其里亚彭诺夫指数或豪斯道夫维数等特征数，对此可参看<sup>[8]</sup>和<sup>[7]</sup>。

#### 四、天体力学中的“混乱”行为

前面讨论的主要是耗散系统。现在看一个来自天体力学的保守系统实例<sup>[48]</sup>，它虽然不是与倍周期分岔相联系的“混乱”，却足以说明天体力学不再完全是确定论的科学。这就是限制在平面中的三体问题。

考虑小质量  $m_3$  在大质量  $m_1$ ,  $m_2$  作用下的运动，忽略  $m_3$  对  $m_1$  和  $m_2$  的反作用，而且把运动限制在平面内。这样就得到一个四阶非线性常微分方程组

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中  $\Omega = \frac{1}{2} \left[ (1-\mu) r_1^2 + \mu r_2^2 \right] + \frac{1}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$ ,  $\mu$  是约化质量,  $r_1$ ,  $r_2$  是  $m_3$  到  $m_1$ ,  $m_2$  的距

离。这个方程组有五个平衡点，其中垂直于  $m_1$  和  $m_2$  连线（在转动坐标系中）的  $L_4$  和  $L_5$  两个点当  $\mu < 0.038521$  时是稳定的，在天体力学中称为平动点，其余三点是不稳定的。如果在平动点放置一个没有初始速度的小质量，它会停留在那里。如果它具有小小的初速或不准确处于平动点上，则会在平动点附近摆动。其它情况下它都会从平动点逃逸，不论它以后是离开  $m_1 m_2$  系统还是继续在系统中运动，这都算是不同于摆动的另一类运动。<sup>[48]</sup>的作者们在稳定平动点附近用一个十二阶积分程序仔细求积 (25)，发现摆动与非摆动两种情形并不处处有光滑的分界线。图 7 是  $L_4$  点附近初值的分布，黑点导致平动，白点导致非平动，值得注意的

是两种区域有一些随机的交错。可见初值的微小差异会导致定性不同的后果。难怪这位“轨道理论”<sup>[48]</sup>一书的作者认为天体力学不再是确定论的科学。

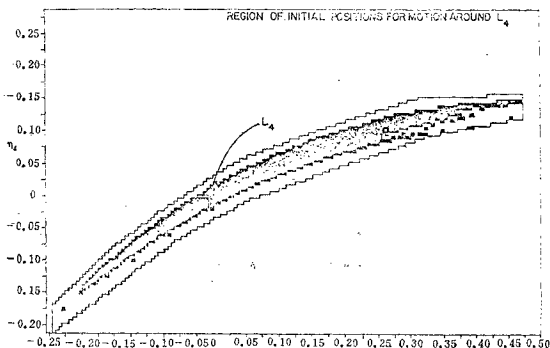


图7 平面三体问题平动点 $L_4$ 附近的运动( $\eta_1$ 和 $\xi_1$ 是以 $L_4$ 为原点的坐标)。黑点代表导致平动的初值,白点为非平动初值。折线内是已经仔细研究过的区域。

三体问题中出现随机行为的另一个例子发现得更早,在<sup>[1]</sup>中有所介绍,这里不再复述。

## 五、实验观测

倍周期分岔序列和相应的“混乱”行为已经开始在实验室中观测到。这首先是在液体氮中关于对流不稳定性的观测(即瑞利-贝纳德不稳定类型的实验)。法国Libchaber等人的结果已经发表<sup>[50]</sup>,美国加州大学圣巴巴拉分校的Ahlers等人也在作类似的实验。最近意大利米兰的一组人也看到了分岔序列<sup>[51]</sup>。当然,在这些实验中很难测到高阶分岔,因此也就缺少对于收敛速率(常数 $\delta$ )的定量估计。实验中还间或看到三倍、五倍周期的分岔。这些分岔均是在临近湍流状态时出现,因而被认为是通向湍流的一种道路。

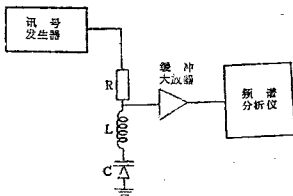
前面已经提到,倍周期分岔和相应的“混乱”现象的更为直接的解释,是非线性振动的一种新制度。因此,应当期望在非线性振荡电路中看到它们。最近有人作了实验<sup>[52]</sup>,其设备相当简单,我们在这里略加描述。用RLC组成一个振荡电路,其中非线性元件是一支变容二极管。把外加正弦讯号电平作为控制参数,用频谱分析仪观测输出结果(图8)。当外加讯号电平很小时,线性RLC回路在1.78兆周共振。在此频率下增加讯号电平,先看到普通的倍频序列,然后在基频下面出现倍周期序列。由于电学测量可达到较高精度,[52]中实测了 $\delta$ 值为 $4.4 \pm 0.1$ ,  $4.6 \pm 0.6$ ,与Feigenbaum的常数很接近。

这个实验的装置和频率范围均在一般物理实验室的能力之内,但倍周期分岔现象都被漏过去许多年,可见物理思想对于设计实验的重要性。其实,一个非线性振动与一个线性振动

耦合,或两个非线性振子相耦合,在固体物理,等离子体物理和非线性光学中可以设想许多实例。最近有一些这方面的建议(如<sup>[41]</sup>),相信不久会有更多的实验报导。

另一方面,如果各种实验都仅仅证实普遍存在着倍周期分岔和“混乱”这种数学现象,其行为又是处处相似的,则对于物理学说来,这只是一消极结果。自然现象应当也必须比数学模型更为丰富。只有在阐明普适性的同时,更深入地研究那些不能纳入普适框架的特殊性质,才能带来更多的物理知识,同时促进理论的发展。流体力学不稳定(参看<sup>[53,55]</sup>)和化学湍流<sup>[54,56]</sup>的实验看来正在向这方面前进。这些实验表明,可能存在着许多通向湍流的道路,它们可能在不同条件下出现在同一个系统中<sup>[57,58]</sup>。倍周期分岔虽然也被列为通向湍流的一种道路,

看来它更多地与出现弱湍流前后的非线性振动有关,而和发达的湍流没有直接关系。



## 六、一些基本问题

本文始终把“混乱”二字放在引号之中,因为这是确定论系统中自发产生的随机性。这类现象目前有许多不同的名称,如“动力随机性”(dynamical stochasticity),“自发混乱”(self-generated chaos),“输入讯号,输出噪声”,“内在混乱”(以区别于外致混乱)等等。这一领域的发展正在提出许多新的数学和物理问题。除了象“怎样量子化一个处于混乱态的非线性振子”这样的具体问题外,还涉及了一些基本问题。例如,

(一) 确定论描述和概率论描述的关系以及不可逆性的来源。既然力学看来确实具有内在的随机性,这里就有一座更为平缓的桥梁通向对复杂系统的统计描述。微观力学本身也应有一种统计的、不可逆的表述方式。近年来人们对此有许多讨论(例如,可以参看两种互不相关的提法<sup>[57,58]</sup>),但并未把它与动力系统“混乱”行为直接联系起来。其实,轨道不稳定性的出现可以作为系统“复杂”的标帜,而奇异吸引区乃是轨道不稳定的一类后果。具有“混乱”行为的动力系统可能成为研究微观不可逆的一种原型。

(二) 动力系统中各类吸引区的研究,可能会对统计物理学中非平衡定态的分类有所启发。非平衡定态有可能划分为三大类,即由细致平衡保证的定态,由环平衡保证的定态和由“混乱”或“湍流”平衡保证的定态。它们在一定意义上对应着动力系统中不动点,各种周期的极限环和奇异吸引区。(其实,这种分类使人想起对整数,有理数和无理数的划分)。迄今对于非平衡定态的研究基本上限于由细致平衡保证(从而具有势函数)的一类,目前亟需对其它类型的非平衡定态进行深入研究。

(三) 奇异吸引区是一类很特殊的几何对象,它们往往具有非整数维,几乎处处稀疏,完全非连续地依赖于参数。我们事实上还缺少一套定义在这种几何对象上的数学分析工具。鉴于这类几何对象常常具有无穷嵌套的自相似结构,重正化群技术也许可以在这里发挥作用。目前这仅仅是一种合理的猜测。

(四) 湍流这个老大难问题的理论和实验研究, 目前仍应作为物理学中的一个根本问题。湍流的发生阶段与非线性振动的“混乱”制有一定关系。固体, 等离子体和非线性光学中应努力寻求分岔序列和“混乱”的实例。这些方面都存在着开展实验研究的广阔天地。特别是湍流的研究必定要考虑具有无穷多自由度的系统, 而目前在计算机上研究的都是有限自由度的系统。由偏微分方程描述的系统及其中的“空间分岔”和“混乱”可能是一个内容丰富的领域。

我们只限于列举了一些课题, 其中每一个都有待于深入研究。

### 参 考 文 献

- [1] R.G.H. Helleman, in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, vol. 5, North-Holland, 1980.
- [2] T. Riste (ed.), *Nonlinear Phenomena at Phase Transitions and Instabilities*, NATO Advanced Study Institute, Norway, 29 March-9 April, 1981, Plenum Press, 1981.
- [3] Workshop on Long-Time Prediction in Non-linear Conservative Systems, March 1981, Austin, Texas.
- [4] International Symposium on Synergetics, 29 April-4 May, 1981, Echlöss, Elmau, Germany, 会议文集 *Chaos and Order in Nature*, Springer 1981.
- [5] "Chaotic Behaviour in Dissipative Systems", Les Houches-Summer School, July, 1981.
- [6] "International Conference on Mathematical Physics", 10-17 September, 1981, Berlin.
- [7] P. Collet, J.-P. Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart, 1980.
- [8] J.-P. Eckmann, *Rev. Mod. Phys.* **53** (1981) 641.
- [9] M.G. Velarde, in [2].
- [10] E. Ott, *Rev. Mod. Phys.* **53** (1981) 655.
- [11] R.M. May, *Nature*, **261** (1976) 459.
- [12] 郝柏林, 见“1980年全国非平衡统计物理会议论文集”, 大连铁道学院学报, 1980. 第三、四期, 43.
- [13] B.-L. Hao, S.-Y. Zhang, *Phys. Lett.*, **87A** (1982) 267.
- [14] B.-L. Hao, *Phys. Lett.*, **86A** (1981) 267.
- [15] B.-L. Hao, S.-Y. Zhang, *Commun. Theor. Phys. (China)*, **1** (1981) 111.
- [16] B.-L. Hao, *J. Theor. Biol.*, **98** (1982) 9.
- [17] B.-L. Hao, S.-Y. Zhang, *J. Stat. Phys.*, **28** (1982) 769.
- [18] M.J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19** (1978) 25; **21** (1979) 669.
- [19] J.E. Hirsch, B.A. Huberman, D.J. Scalapino, *Phys. Rev.*, **A25** (1982) 519.

- [20] B. Derrida, A. Gervois, Y. Pomeau, *Annales de l'Institut Henri-Poincaré* **29** (1978) 305; *J. Phys.* **A12** (1979) 269.
- [21] M. J. Feigenbaum *Phys. Lett.* **74A** (1979) 375; *Comm. Math. Phys.* **77** (1980) 65.
- [22] B. A. Huberman, A. B. Zisook, *Phys. Rev. Lett.* **46** (1981) 626.
- [23] M. Nauenberg, J. Rudnick, *Phys. Rev.*, **B24** (1981) 493.
- [24] S. Thomae, S. Grossmann, *Phys. Lett.* **83A** (1981), 181.
- [25] A. Wolf, J. Swift, *Phys. Lett.* **83A** (1981), 184.
- [26] M. Hénon, *Comm. Math. Phys.* **50** (1976) 69.
- [27] S. D. Feit, *Comm. Math. Phys.* **61** (1978) 249.
- [28] J. H. Curry, *Comm. Math. Phys.* **68** (1979) 129.
- [29] C. Sim, *J. Stat. Phys.* **21** (1979) 465.
- [30] E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* **20** (1963) 130.
- [31] D. Ruelle, F. Takens, *Comm. Math. Phys.* **20** (1971) 167.
- [32] V. Franceschini, *J. Stat. Phys.* **22** (1980) 397.
- [33] K. A. Robbins, *SIAM J. Appl. Math.* **36** (1979) 457.
- [34] T. Shimizu, N. Morioka, *Phys. Lett.* **66A** (1978) 182.
- [35] I. Simada, T. Nagashima, *Progr. Theor. Phys.* **59** (1978) 1033.
- [36] J. A. Yorke, E. D. Yorke, *J. Stat. Phys.* **21** (1979) 263.
- [37] V. Franceschini, C. Tebaldi, *J. Stat. Phys.* **21** (1979) 707.
- [38] V. Franceschini, C. Tebaldi, *J. Stat. Phys.* **25** (1981) 397.
- [39] O. E. Rössler, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **316** (1979) 376.
- [40] J. Crutchfield, D. Farmer, N. Parcard, R. Shaw, G. Jones, R. J. Donnelly, *Phys. Lett.* **76A** (1980) 1.
- [41] B. A. Huberman, J. P. Crutchfield, *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 1743.
- [42] J. B. McLaughlin, *J. Stat. Phys.* **24** (1977) 377.
- [43] T. Kai, K. Tomita, *Progr. Theor. Phys.* **61** (1979) 54.
- [44] K. Tomita, T. Kai, *J. Stat. Phys.* **21** (1979) 65.
- [45] G. Nicolis, I. Prigogine, *Self-organisation in Nonequilibrium Systems*, Wiley, N. Y., 1977.
- [46] 于渌, 郝柏林, *物理*, **9** (1980) 545.
- [47] H. Mori, *Progr. Theor. Phys.*, **63** (1980) 1044.
- [48] V. Szebehely, R. McKenzie, *Celestial Mech.* **23** (1981) 131.
- [49] V. Szebehely, *Theory of Orbits*. Academic Press, N. Y., 1967.
- [50] A. Libchaber, J. Maurer, *J. Phys (Paris) Lett.* **40** (1979) 419; *J. Phys. (Paris) Collog.* **41** (1980) C3--51.
- [51] M. Gigrlio, S. Musazzi, U. Perini, *Phys. Rev. Lett.*, **47** (1981) 243.
- [52] P. S. Lindsay, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 1349.
- [53] J. A. Yorke, E. D. Yorke, *Chaotic Behaviour and Fluid Dynamics*, in "Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence", ed. by H. L.

- Swinney, J. P. Gollub, Springer, 1981.
- [54] J. -C. Roux, H. L. Swinney, Topology of Chaos in a Chemical Reaction, in "Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics", ed. by A. Pacault, C. Vidal, Springer, 1981.
- [55] D. G. Aronson, M. A. Chory, G. R. Hall, R. P. McGehee, Comm. Math. Phys. **83** (1982) 303.
- [56] G. Iooss, W. F. Langford, Ann. N. Y. Acad. Sci., **357** (1980), 489.
- [57] I. Prigogine, Science, **201** (1978) 777.
- [58] G. Lochak, Foundations of Physics, **11** (1981) 593.