数学中的辩证法

天津市科学技术协会

自然辩证法数学组

目　　录

一、《自然辩证法》一书简介

《自然辩证法》一书是伟大导师恩格斯一部未完成的著作。

该书包括两个计划草案，十篇论文，一百六十九段札记和片断，共181篇文章组成。

该书从内容的互相联系上大致可分为五个部分。

1.导言部分：这部分包括〔导言〕；〔《反杜林论》旧序。论辩证法〕；〔神灵世界中的自然科学〕三篇论文和〔科学历史摘要〕、〔自然科学和哲学〕两篇札记。主要内容论述了自然科学与生产、自然科学与阶级斗争、自然科学与哲学的关系，说明蔑视辩证法不能不受到惩罚。

2.唯物辩证法部分：这部分包括〔辩证法〕一篇论文和〔辩证法〕〔A，辩证法的一般问题。辩证法的基本规律〕〔B，辩证逻辑和认识论。关于“认识的界限”〕两篇札记。

主要内容是论证了“辩证法的规律是自然界的实在的发展规律”。根据科学材料阐明了辩证法的一般性质，辩证法的基本规律和范畴以及辩证逻辑和辩证唯物主义认识论的一些重要原理。阐明了辩证法与形而上学的根本对立。

3.物质运动部分：这部分包括〔运动的基本形式〕〔运动的量度——功〕两篇论文和〔物质运动形式。科学分类〕一篇札记。

主要内容说明了物质和运动的辩证关系，通过分析各种物质运动形式的联系和转化，论述了辩证唯物主义物质运动观的基本原理，批判了机械唯物论和经验主义，说明了物质运动形

式的辩证关系是科学分类的基础。以辩证唯物主义观点提出了科学分类的基本原则。

4.这部分包括〔潮汐摩擦。康德和汤姆生——台特〕〔热〕〔电〕三篇论文和〔数学〕、〔力学和天文学〕、〔物理学〕〔化学〕、〔生物学〕五篇札记和片断。

主要内容是用辩证唯物主义具体深刻地分析和论述了各门自然科学中的哲学问题，阐述了各门科学的重要理论问题。揭露和批判了唯心论形而上学的观点，进而用科学的成果论证了唯物辩证法的无比正确。

5.人类的起源部分：这部分包括〔劳动在从猿到人转变过程中的作用〕一篇论文。

主要内容是论述人类起源问题，批判了社会达尔文主义混淆了自然科学概念与社会科学概念的区别的错误观点，论述了劳动创造了人本身及其历史这一重要原理，阐述了人与动物的本质区别及其联系。从而可以看做是由研究自然科学到社会科学的过渡。

《自然辩证法》一书虽然是未完成的著作，大部分是未完成的论文和零星片断的札记，但是这部著作的内容是非常丰富的，思想是完整的，前后一贯的。

在这部著作中，恩格斯概述了自然观发展的历史，以充分事实证明了自然界发展的辩证过程，揭露了形而上学自然观的错误。同时，恩格斯还概括了当时自然科学的成就，精辟地概述了辩证唯物主义的自然观。恩格斯运用大量自然科学材料，论述了唯物辩证法，着重指出唯物辩证法是指导自然科学正确地进行理论思维的哲学，认真地学习和掌握唯物辩证法对于自然科学的研究和自然科学的发展具有十分重大的意义。这是贯穿全书的中心思想，这方面的内容是《自然辩证法》一书的精华。

二、〔数学〕札记的写作背景

〔数学〕 这部分共有十七段札记和片断， 大部分写于1874—1885年。“关于现实世界中数学的无限的原型”这篇札记最初是作为《反杜林论》第一篇第三章的附注而写的。大约写于1885年。从“总计划草案”看来，这部分材料很可能是恩格斯为写作“数学：辨证的辅助工具和表现方式。——数学的无限出现在现实中”（第 3 页，以下凡未注书名均摘自《自然辩证法》一书）一文而准备的。虽然这篇论文没有完成，但是从这些材料中，我们仍然可以清楚地看到，恩格斯如何运用辩证唯物主义的观点研究了当时数学的成果，批驳了数学中的唯心主义和形而上学的世界观和方法论。并用数学的材料论证了辩证唯物主义的世界观和方法论。

恩格斯为什么要研究数学？为什么要写作数学札记？这主要是根据当时阶级斗争的需要，为了批判杜林和杜林一类的政治骗子企图利用数学的抽象性和微积分的神秘性来攻击马克思主义的唯物辩证法。譬如：杜林为了宣扬唯心主义的先验论，在他的著作中就这样写道：在纯数学中，悟性所处理的是“它自己的自由创造物和想象物”；数和形的概念是“对数学来说已经足够并且可以由数学本身创造的对象”，所以数学具有“脱离特殊经验和现实的世界内容而独立的意义。”恩格斯批判杜林这段话时指出：“在纯数学中悟性绝不能只处理自己的创造物和想象物。数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的。”“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。”“甚至数学上各种数量的

明显的相互导出，也并不证明它们的先验的来源，而只是证明它们的合理的相互关系。”（《反杜林论》第35页）

在十八世纪中叶，资本主义的生产给科学带来了飞跃的进步，而科学的进步又要求对已获得的材料进行综合、整理给予理论上的说明。到了十九世纪，自然科学在本质上已成为整理材料的科学，即研究过程、研究这些事物发生和发展，研究那把自然界的这些过程结合为一个伟大整体的联系的科学了。这时，在自然科学中，出现了许多重大的发现，数学也已经创立了解析几何和微积分的理论。这些重大的发现和变量数学广泛运用使陈腐的形而上学自然观被打开了一个又一个的缺口，弄得百孔千疮、陈腐不堪，从而新的自然观——辩证唯物主义自然观必然应运而生。但是这个时期的数学和各门自然科学仍然受到唯心主义和形而上学观点的极其深刻的影响。唯心主义者认为数学是一个纯粹抽象的科学，认为人们关于数量概念是纯粹抽象思维的产物。他们把数学和现实世界对立起来，否认数学的现实原型。形而上学者否认数学的辩证的内容。恩格斯为了批判当时数学中的唯心主义和形而上学观点，阐明辩证唯物主义关于数学的观点，与形形色色的反动哲学家做斗争，恩格斯才花费了不少精力去研究数学问题，写了许多有关数学的札记和片断。

三、〔数学〕札记的内容介绍

〔数学〕札记的内容，按照《自然辩证法》现行版本的按排，可分为三个部分：

（一）关于数学公理；（第①段）

（二）关于数学中的辩证法；（第②——⑭段）

（三）关于现实世界中数学的无限原型；（第⑮段——第⑰段）

（一）关于数学公理

恩格斯对数学公理的本质作了简炼而精辟的分析，主要讲了三个问题。

1.什么是数学公理？

历来存在着两种针锋相对的见解。恩格斯指出："数学上的所谓公理，是数学需要用作自己的出发点的少数思想上的规定。"（第235页）而旧数学课本却指出：所谓公理就是指"不加证明而采用的真理。"我们认为前者是正确的，而后者欠妥。

数学是以现实世界的空间形式和数量关系作为自己的研究对象。它是从量的概念开始进而探讨全部量的关系。特别是几何，还用形式逻辑推理的演译方法来叙述这些量的概念和量的关系。

首先解释形式逻辑推理的演译方法。

人们在生产实践中积累了相当丰富的某一方面的数学感性知识，通过实践，认识了许多定理，当然这些定理反映了现实世界中的数量关系。但是如何把它们整理起来呢？在古代亚里士多德提出在建立任何一门严密的科学理论时，应当首先在该门科学的所有概念中选取少数几个概念作为基本概念对他们不加定义，其余的概念则通过基本概念或已经由基本概念解释过的概念推出，叫作定义；其次在该门科学理论的所有命题中选取少数几个命题作为公理，对他们不加证明，其余的命题则通过公理或已经由公理推出的命题来推导叫作证明；这种将基本概念和公理作为逻辑演译的大前题，用演译法来建立数学

体系的方法叫做公理方法，这种体系叫做公理体系，如欧几里得几何公理体系。当然这只是建立数学体系的一种方法。

具体来讲，例如欧几里得几何体系，就是用公理方法建立起来的数学体系。它从点、直线、平面，这些基本概念出发，对他们不加定义。几何学中的直线，顶多下一个“直线是由点组成的”之类的不充分的定义。但是仅仅这样是不够的。当我们将这些原始概念从现实世界中抽象出来的同时，还必须将它们之间的某些基本关系也抽象出来，表达为逻辑上的判断和命题，“作为思想上的规定”而这就是公理。例如“过任意两点可以引并且只可以引一条直线”这个点和直线的关系就是作为公理从外部补充进去的。进一步说明直线，而这些内容是上述直线的不充分定义所不能包括的。所以恩格斯讲：“它从数量这个概念出发。它给这个概念下一个不充分的定义，然后再把未包含在定义中的数量所具有的其他基本规定性，当作公理从外部补充进去，这时，这些规定性就表现为未加证明的东西，自然也就表现为数学上无法证明的东西。”（第235页）

问题就出现在这里，公理在数学体系中是不要逻辑证明的，也是不能用逻辑证明的，这时因为要证明A需要用命题B，而要证明B又需要命题C……如此推演下去就是A－B－C－D……，因此如果一切命题都要逻辑证明就必然陷入无穷倒推或循环论证，而这是不行的。

由于公理在逻辑体系中无需证明，也不能证明，这一点被古今中外的唯心主义者抓住大做文章，说公理是人们的任意假定，任意“约定”它不反映客观而完全是先验的东西。康德说“数学的公理（例如两点之间只能有一条直线）就是普遍的、先天的知识的实例”。杜林也跟着叫嚷“全部数学都不反映客观”、“不依赖于任何经验”而统统由几条数学公理推导出

来；而全部公理又是“不依赖于任何经验成份”统统由人们理性自由创造和自由想象出来……”为他们的唯心主义先验论寻找自然科学理论根据。对这些谬论恩格斯在本书和“反杜林论”中都给予了驳斥。

2.数学公理的客观性

恩格斯借助于斯宾塞的话说：“我们所认为的这些公理的自明性是承继下来的。这些公理只要不是纯粹的同义反复，就是可以辩证地证明的。”（第235页）深刻地说明了公理的来源是人类的长期的实践经验积累的结果。

公理既然是作为从外部补充进去的东西，所以它的正确性是不能靠数学来证明的。但是决不意味着公理的正确性不能证明或“不加证明而采用”。根据“只有人们的社会实践，才是人们对于外界认识的真理性的标准。”（《毛泽东选集》第一卷第261页）我们提出公理来之于实践，是人们长期实践的结果，公理如同其他一切客观真理一样是来之于实践，在实践中发展、检验、并在实践中被应用。在长期的实践中，正如恩格斯指出：“现代自然科学已经把全部思维内容起源于经验这一命题加以扩展，以致把它的旧的形而上学的限制和公式完全推翻了。由于它承认了获得性的遗传，它便把经验的主体从个体扩大到类；每一个体都必须亲自去经验，这不再是必要的了；它的个体的经验，在某种程度上可以由它的历代祖先的经验的结果来代替。如果在我们中间，例如数学公理对每个八岁的小孩都似乎是不言而喻的，都无需用经验来证明，那末这只是‘积累起来的遗传’的结果。”（第244页）

所以公理之所以成为数学上不加以证明而被用来做为数学推理的出发点，正是因为它已经是人类长期亿万次实践所证明了的东西，正因为公理来之于实践，从实践中抽象出来，并经

过千百万次的实践和检验，所以公理才能作为数学推理的正确前提，一句话公理是有着客观实践内容的并非“先验的”。

我们还应看到公理和其他概念一样，不是僵死的，在实践的推动下它也在不断地发展，如古代关于数学上第五公设的争论到非欧几何的诞生和在实践中被采用，都说明了数学公理的客观性。非欧几何的诞生和在实践中被应用是对唯心主义的沉重打击，是唯物辩证法的光辉胜利！

3.数学公理的贫乏性

由于公理只是说明数量关系的一些最简单的性质，因此对于数学的丰富的内容来讲，它的内容是极其贫乏的。正如恩格斯指出的：“数学公理是数学不得不从逻辑那里借用的极其贫乏的思想内容的表现”。（《反杜林论》第36页）许多公理其实只不过是一些同义语的反复，因此数学要前进，数学要发展，决不能靠几条公理，也不能只靠形式逻辑的推导。

恩格斯指出：“为了继续前进，我们必须汲取真实的关系，来自现实物体的关系和空间形式。线、面、角、多角形、立方体、球体等等观念都是从现实中得来的，只有思想上极其幼稚的人，才会相信数学家的话：第一条线是由点在空间中的运动产生的，第一个面是由线的运动产生的，第一个体是由面的运动产生的，如此等等。”（《反杜林论》第37页）

因此我们必须在实践的基础上对客观存在复杂的数量关系和空间形式进行大量地周密地调查研究，从丰富的感性材料中进行概括上升到理性认识。所以公理尽管可以表现为逻辑体系的出发点，但它决非整个认识过程的出发点，我们整个认识过程的出发点是实践。

总之学习恩格斯关于“公理”的论述，要坚决反对数学中的唯心主义和形而上学的种种表现。在辩证唯物主义世界观的

指导下，进行数学教学的改革。

（二）关于数学中的辩证法

客观世界是相互联系着的充满矛盾斗争的统一体。它按照辩证法的规律发展着，作为研究客观世界中数量关系和空间形式的数学，也必然反映客观世界的辩证规律。所以数学本身充满着辩证的内容。在这里恩格斯深刻分析了从初等数学到高等数学的大量实例。从数学运算、数学中的量与质、数学概念三个方面论证了对立统一规律，揭示了数学内容的辩证实质。这一部分包括数学札记第二段到十四段，大体上概括为三个问题：

1.数学运算中的对立统一关系（第 2 段）

2.数学中量与质之间的辩证关系（第 3 、 4 、14段）

3.数学概念中的对立统一关系。（其他各段）

1.关于数学运算中的对立统一关系

参看第二部分初等数学中的辩证法第二讲。

2.数学中量与质之间的辩证关系

包括第 3 段（第236页量和质）、第 4 段（第237页数）、第14段（第 243 页分子和微分）。这三段札记中恩格斯说明即使在研究纯粹的量的数学中，也存在着质的差异。在数学中量也是和一定的质联系着的，量与质也是对立统一。脱离了一定质的量是不存在的，数学中任何的量都表示一定的量的内容，同时也具有一定质的特点。

（Ⅰ）所以恩格斯讲：“数是我们所知道的最纯粹的量的规定。但是它充满了质的差异。”（第236页）黑格尔在《逻辑学》“定量”谈到了数目与单位、乘与除、乘方和开方，然而黑格尔认为算术没有思想性——即没有概念的辩证运动。因此黑格尔没有指出数目与单位、乘与除、乘方和开方所表现的质的差异。恩格斯反驳了这种论点，比如质数和乘积，简单的

根式和幂、质数只能被 1 和本身整除，而任何乘积除了 1 和本身以外还可以被整数因子所整除。根式$\sqrt{2}$和幂2^2形式如此简单，但质的差异是很明显的，前者是无理数，后者是有理数。

16不仅是16个 1 的和——纯粹量的积累，然而可以显示为不同的质：

$16 = 4^2 = 2^4 = 256^{½} = \cdots\cdots$

这些不同的幂式就显示16这个数的不同的质。

不仅如此，质数给予由它和其他数相乘而得的数以新的一定的质。具体表现在判定整除的规律因数而异。

①只有末一位是 2 的倍数的数才能被 2 整除。

②末二位是 4 的倍数时才能被 4 整除。

③末三位是 8 的倍数时才能被 8 整除。

④而被 3 整除需要其数字和能被 3 整除。

⑤而被 6 整除需要其数字和是被 3 整除的偶数。

⑥被9整除的需要其数字和被 9 整除。

⑦被 7 整除的特殊一些，如果一个数去掉末位数，剩下的数减去末位数的 2 倍其差是 7 的倍数，那末这个数一定能被 7 整除。如371去掉末位数为37，减去末位数的2倍为$37 - 2 \times 1 = 35$，是 7 的倍数，所以371是 7 的倍数（$371 \div 7 = 53$）

总之判定整除的法则因数而异的原因就在于除数 2 、3 、4 、5 …… 9 ，既有量的大小区别，又有一定的质的差异，有这种质的差异必然要反映在该数与其他数相乘而得的数中，数学游戏就建立在这上面，没有学过的人感到莫明其妙，其实说穿了就在质数给予由它和其它数相乘而得的数以新的一定质这个辩证的关系上。

（Ⅱ）数

其实不仅质数和乘积是如此，就是“单个的数在记数法中

已经得到了某种质，而且质是依照这种记数法来决定的”。（第237页）

比如在10进位制中 9 不仅是 1 相加 9 次的和而且是90，900，99，等的基数。所谓基数有两种意义：

①记数法中的基数，n进位基数就是n，5 进位制基数为 5。

②某数相加若干次产生新数，某数为新数的基数，如 9 是99、90000的基数。9加11次为99……在十进位制的 9 的运算性质在其他进位制就不存在了。如在12进位制中 9 相加10次为76。

因为在12进位制中90不再是 9 相加10次之和，所以 9 不是90的基数。所以一切数的定律都取决于所采用的记数法，而且被这个记数法所决定，为了便于说明把 2 进位制、3 进位制、5 进位制、10进位制作一比较。

10进位制：1 2 3 4 5……12……

2 进位制：1 10 11 100 101……1100……

3 进位制：1 2 10 11 12……110……

5 进位制：1 2 3 4 10……22……

可见在 3 进位制中 $2\times2\neq4$，$2\times2=11$。

在以奇数作基数的每种记数法，偶数和奇数的差异不存在了。例如 5 进位制中的 $5=10$，$10=20$，在10进位制中 5 是奇数，10是偶数，在 5 进位制中已不存在。不仅如此，3 和 9 的倍数可以被 3 或 9 整除的规律也消失了。如 6 在 5 进位制中相当于11，$1+1=2$，都不能被 3 除尽。所以基数不但决定于它自己的质而且也决定其他一切数的质。

（Ⅱ）关于幂的关系，这种由一个数不但决定自己的质，而且也决定其它一切数的质的现象就更明显，我们知道每个数都可以当作其它任何一个数的幂，即$N=a^{\log_a N}$，这样，有多少整数和分数，就有多少对数系统。

$\because 16 = 4^2$ $\therefore \log_4 16 = 2$

$\because 16 = 256^{\frac{1}{2}}$ $\therefore \log_{256} 16 = \frac{1}{2}$

$\because 16 = 8^{\frac{4}{3}}$ $\therefore \log_8 16 = \frac{4}{3}$

$\because 16 = 10^{1.204}$ $\therefore \log_{10} 16 = 1.204$

一般地如果$y = a^x$，则$x = \log_a y$。

对数的底可以是不等于1的任何正数，，对于每一个确定的数$a > 0$，都有相应的以a为底的对数系统，常用的有以10为底的常用对数，还有以e为底的自然对数。由于对数的底数不同，不仅同一个数的对数值不同，例如$\lg 10 = 1$；$\ln 10 = 2.3026$。而且利用对数计算时所依据的规律也不同。所以不同的对数系统在量（对数的底）的规定中有着质的差异。顺便说一句，正是由于有无数个对数系统，所以才产生了换底公式$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$，这样无数多个对数系统便可以通过换底公式转化为一个共同的对数系统以供我们解决实际问题。

在这里特别要提到对数系统中的共性和个性的问题。由于以不同的数为底，所以各个对数系统有不同的质，但是它们都是对数系统，所以它们有共性。我们在教学中应区别出对数系统的共性和个性。

如以e为底的自然对数和以10为底的常用对数，在从“对数”这个概念着眼看共性。如积的对数等于各个因数的对数的和。……但是由于底数不同，所以在某些方面，如取对数的规律就截然不同。

如$\lg 5.2 = 0.7160$，$\lg 520 = 2.7160$。它们的尾数都一样。而$\ln 289.2 = 5.6672$；$\ln 28.92 = 3.3646$。查表计算的方法也截

然不同。

$$\begin{aligned} lo289.2 &= \ln\ (2.892\times10^2) \\ &= \ln2.892+\ln10^2 \\ &= \ln2.892+2\ln10 \\ &= 1.0620+2\times2.3026 \\ &= 5.6672 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\ln28.92 \\ &= \ln\ (2.892\times10) \\ &= \ln2.892+\ln10 \\ &= 1.0620+2.3026 \\ &= 3.3646 \end{aligned}$$

至于它们的其他性质区别就更大了。所以数是我们所知道的最纯粹的量的规定，但是它充满着质的差异。一个数不但决定它自己的质，而且也决定其它一切数的质。

在高等数学也是如此。

在高等数学中"谈到无限大与无限小,它就导入一个质的差异，这个差异甚至表现为不可克服的质的对立：量的相互差别太大了，甚至它们之间的每一种合理的关系、每一种比较都失效了，甚至它们变成在量上不可通约的了。"（第236页）。

所谓不可通约通常是指不同的两个概念之间的关系不可比拟。

在数学上所谓无限大和无限小都是指变化的量，前者是越来越大，比任何数都要大；后者是绝对值越来越小，比任何数的绝对值都要小。从上述定义中我们可以看到质的对立。如任何一个有限量总是可以加上一点或减去一点，找到比它大或比它小的量；但是无限大，加上一个或减去一个有限量并不能得到一个比无限大更大的量，也不能使无限大变得小一点，否则就不成为无限大了。无限小也一样。正是在这一点无限大和无限小与有限量是具有质的差异，并表现为不可克服的质的对立。再如有限量中可以比较一个量是另一个量的多少倍，但是无限大与无限小就无法按一般理解去比较，无限大比无限小大多少？所以有限量和无限大、无限小，表现在量上是不可通约

的，而这些不可通约的形成正是由于量的差别太大了，换句哲学上的语言就是量变引起质变。

恩格斯的这种光辉的观点，在马克思数学手稿中处处皆是，对我们深入理解微分有着重要意义。

总之，尽管数学是研究数量的科学，它抛开了物的质的方面，但就纯粹的量而言，也是有质的差异，质是一定量的质，量也总是一定质的量，没有质的量是不存在的，由于量变产生质变。正是同一类数量的量的差异把质的差异提到了不可通约性，这种观点不是凭空捏造的，而是有着客观基础的，有着现实原型的，其中当时的科学家维德曼在《电学》中就把有限的距离和分子的距离看作直接互相对立的东西。恩格斯很注意维德曼的这种看法，但是这种对立是辩证的对立，而不是绝对的对立。有限距离和分子的距离的关系，好比数学上变数x与它的微分dx之间的关系，在这里分子距离正是对有限距离的微分。

3.数学概念中的对立统一关系

数学概念是客观事物在量的方面的反映。一切客观事物是充满着矛盾运动的，反映客观事物的数学概念也必然充满着矛盾运动。数学概念之间的关系，反映了客观事物之间的关系，自然它们也构成对立的统一体。

从第5段到第13段这部分札记中，恩格斯主要讲了下列几方面的对立统一关系：一与多、零与非零、正和负、有限与无限、直线与曲线、三角形和圆……通过分析数学概念中的对立统一关系，进一步说明数学中的辩证法。

（Ⅰ）一（第5段）

参看第二部分初等数学中的辩证法第三讲。

（Ⅱ）零——有与无的对立统一（第7段）

参看第二部分初等数学中的辩证法第三讲。

（Ⅱ）$\sqrt{-1}$ （第8段）

（Ⅰ）正和负的对立统一关系。

恩格斯说："代数学上的负数，只是对正数而言，只是在和正数的关系中才是实在的；在这种关系之外，就其本身来说，它们纯粹是虚构的。"（第240页）这段话深刻阐明了正负数的对立统一关系。实际上，代数学的正数和负数是客观世界具有相反意义的量在数学上的抽象。例如规定火车东行为正，那么西行为负。－100公里表示火车向西走了100公里。反过来如果规定西行为正，则东行为负，＋100公里就表示火车向西走了100公里。因此，负数只是在和正数的关系中才有实在意义。孤立的说－5，没有意义。实际上，在数学上"正和负可以看作彼此相等的东西——不管把哪方面当作正，把哪方面当作负，都是一样的，……。"（第194页）具体实例详见《自然辩证法》194页。

不论在三角学、解析几何和高等数学中，负永远是表示和运动方向相反的一定的运动方向。

在三角学中，逆时针旋转的角为正，顺时针旋转的角为负。"不论从第一象限或第四象限都同样能计算出圆的正弦和正切，这样就可以把正和负直接颠倒过来。"（第241页）如图，在单位圆中，显然$\sin\alpha = MN$；$\sin(-\alpha) = -MN$从第一象限的$\sin\alpha = MN$，得出第四象限的$\sin(-\alpha) = -MN$；反过来由第四象限的$\sin(-\alpha) = -MN$，得出第一象限的$\sin\alpha = MN$。正弦是这样，正切也是如此。

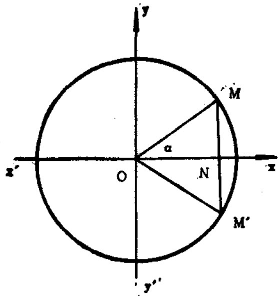

图 1