QQ教辅

QQJIAOFU

适合各种版本教材

JIETIFANGFADAQUAN

解题方法大全

主编：李永哲

高三数学

题题精彩★解题无忧

例题详解◎方法多样

延边大学出版社

QQ教辅

QQJIAOFU

适合各种版本教材

JIETIFANGFADAQUAN

解题方法大全

高三数学

本册主编：王雪晶

本册副主编：刘德广　李　萍

编　　委：钱永发　李玉忠　赵连生　郑艳秋

张慧珉　栗　敏　冷建华　卢经英

郭泗强　李小华

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

解题方法大全·高三数学/李永哲主编.
—延吉:延边大学出版社,2007.11
ISBN 978-7-5634-2401-6

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.数学课-高中-解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 170701 号

解题方法大全·高三数学

主编:李永哲

责任编辑:秀 豪

出版发行:延边大学出版

社址:吉林省延吉市公园路 977 号

网址:http://www.ydcbs.com

E-mail:ydcbs@ydcbs.com

电话:0433-2133001 **传真**:0433-2733266

印刷:北京荣玉印刷有限公司

开本:787×1092 1/32

印张:46 **字数**:1044 千字

印数:1—16000

版次:2008 年 2 月第 1 版

印次:2008 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5634-2401-6

定价:64.50 元(共 3 册)

前　言

美国著名数学家波利亚说过:"掌握数学就意味着要善于解题"。重视对数学思想方法的考查,特别是突出考查能力的试题,在解答过程中都蕴含着重要的数学思维方式及解题技巧。

知识是基础,思想是深化,方法是手段。提高学生对数学思想方法的认识和应用,综合提高学生的数学解题能力是本书的宗旨。

本书的作者都是具有多年教学经验的一线特、高级教师,通过对具有代表性的例题、习题,以及历年来高考中出现的经典试题进行细致而全面的分析和讲解,帮助学生探索解题规律,掌握解题方法,提高解题技巧。

下面介绍本书各栏目及其特点

一、高考点拨

通过对考点的分析、解读,使学生掌握学习重点,明确学习目标,做到有的放矢。

二、经典及拓展例题详解

通过对经典例题的分析,帮助学生理解数学中的常用方法(如:判别式法、待定系数法、反证法、构造法、几何变换法等,以及客观性试题的解题方法:直接推演法、验证法、特殊值法、排除法、图解法、分析法、数形结合法等),认识知识的形成过程,构建知识间的联系;通过对经典例题的点评,帮助学生找准解题的关键,避免思维误区,让学生亲身体验数学解题、发展、深化的全过程,真正达到举一反三、触类旁通的目的。

三、经典及拓展题训练

习题的编选由浅入深，边学边练，体现了方法与能力训练的完美结合，把学生从“题海”中拯救出来。

由于编者水平所限，本书如有不足之处，恳请广大读者多多指正，以期修订完善。

目　　录

第一章　概率与统计

高考点拨

1. 考试要求

(1)了解离散型随机变量的意义,会求出某些简单的离散型随机变量的分布列.

(2)了解离散型随机变量的期望值、方差的意义,会根据离散型随机变量的分布列求出期望值、方差.

(3)会用随机抽样、系统抽样、分层抽样等常用的抽样方法从总体中抽取样本.

(4)会用样本频率分布去估计总体分布.

(5)了解正态分布的意义及主要性质.

(6)了解线性回归的方法和简单应用.

2. 概率与统计是高中数学新课程的重要学习内容,根据中学数学教学大纲的要求,这部分内容在新课程中分为必修和选修两部分,其中必修部分包括:随机事件的概率,等可能事件的概率,互斥事件有一个发生的概率,相互独立事件的概率,独立重复试验等(这部分知识在本系列丛书中的第二册里已介绍). 选修部分分为文科、理科两种要求,选修Ⅱ为理科的要求,包括:离散型随机变量的分布列,离散型随机变量的期望值和方差,抽样方法,总体分布的估计,正态分布,线性回归. 在高考试卷中,概率和统计的内容每年都有所涉及,以必修概率内容为主,不过随着对新内容的深入考查,理科的解答题也会设计包括离散型随机变量的分布列与期望为主的概率与统计综合试题. 概率与统计的引入拓宽了应用问题取材的范围,概率的计算、离散型随机变量的分布列和数学期望的计算等内容都是考查实践能力的良好素材.

由于中学数学中所学习的概率与统计内容是这一数学分支中最基础的内容,考虑到教学实际和学生的生活实际,高考对这部分内容的考查贴近考生生活,注重考查基础知识和基本方法.

1.1 离散型随机变量的分布列、期望和方差

经典及拓展例题详解

例1 （2004·全国Ⅱ·理）从装有3个红球、2个白球的袋中随机取出2个球，设其中有ξ个红球，则随机变量ξ的概率分布为__________.

分析

从袋中取球的个数为2个，袋中共有3个红球，这样取出红球的个数就可能为0个、1个、2个，而这样随机取球是等可能事件，从而可求得ξ取不同值时对应的概率，即求得其分布列.

解：由题意可知，ξ的可能取值为0、1、2个.

$\therefore P(\xi=0)=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}=0.1$,

$P(\xi=1)=\dfrac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=0.6$,

$P(\xi=2)=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=0.3$,

$\therefore$ 随机变量ξ的概率分布列为

ξ	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

点评：求解此类问题要抓住两点：①弄清ξ的取值情况；②问题中事件的类型.只有正确分析题意，才能准确求解.

例2 （2004·湖北·理）设随机变量ξ的概率分布为$P(\xi=k)=\dfrac{a}{5^k}$，a为常数，$k=1,2,\cdots$，则$a=$__________.

分析

利用离散型随机变量ξ的概率分布列的性质，可得$P(\xi=1)+P(\xi=2)+\cdots=1$，即$\dfrac{a}{5}+\dfrac{a}{5^2}+\dfrac{a}{5^3}+\cdots=1$.再利用无穷等比数列的各项和公式即可求得$a$.

解:由题意,可得 $P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3)+\cdots=1$,

即 $\frac{a}{5}+\frac{a}{5^2}+\frac{a}{5^3}+\cdots=1$, $\therefore a\times\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=1$, $\therefore a=4$.

点评:无穷等比数列的各项和公式只与此数列的首项、公比有关,这一点请切记,同时牢固掌握离散型随机变量 ξ 的概率分布列的性质,也是解决本题的关键.

例3 (2006·全国Ⅰ·理)A、B 是治疗同一种疾病的两种药,用若干试验组进行对比试验.每个试验组由4只小白鼠组成,其中2只服用 A,另2只服用 B,然后观察疗效.若在一个试验组中,服用 A 有效的小白鼠的只数比服用 B 有效的多,就称该试验为甲类组,设每只小白鼠服用 A 有效的概率为 $\frac{2}{3}$,服用 B 有效的概率为 $\frac{1}{2}$.

(1)求一个试验组为甲类组的概率;

(2)观察3个试验组,用 ξ 表示这3个试验组中甲类组的个数.求 ξ 的分布列和数学期望.

分析

第(1)问中注意若一个试验组为甲类组则可能有如下三种情况:服用 B 有效的小白鼠为0只时,而服用 A 有效的小白鼠为1只或2只;服用 B 有效的小白鼠为1只时,服用 A 有效的小白鼠为2只.这三种情况之间是互斥的,求出对应概率再求和即可;第(2)问中 ξ 的可能取值为0,1,2,3,并且由3个试验组可以认为是3次独立重复试验,这样 $\xi\sim B(n,P)$,分别求出对应的概率即得分布列和数学期望.

解:(1)设 A_i 表示事件"一个试验组中,服用 A 有效的小白鼠有 i 只",$i=0,1,2$;

B_i 表示事件"一个试验组中,服用 B 有效的小白鼠 i 只",$i=0,1,2$.

依题意有

$P(A_1)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$, $P(A_2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

$P(B_0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $P(B_1)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

所求的概率为

$P=P(B_0\cdot A_1)+P(B_0\cdot A_2)+P(B_1\cdot A_2)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{9}.$

(2)ξ 的可能值为0,1,2,3,且 $\xi\sim B(3,\frac{4}{9})$

$P(\xi=0)=(\frac{5}{9})^3=\frac{125}{729}$,

$P(\xi=1)=C_3^1\times\frac{4}{9}\times(\frac{5}{9})^2=\frac{100}{243}$,

$P(\xi=2)=C_3^2\times(\frac{4}{9})^2\times\frac{5}{9}=\frac{80}{243}$,

$P(\xi=3)=(\frac{4}{9})^3=\frac{64}{729}$.

ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{125}{729}$	$\frac{100}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{64}{729}$

数学期望 $E\xi=0\times\frac{125}{729}+1\times\frac{100}{243}+2\times\frac{80}{243}+3\times\frac{64}{729}=\frac{4}{3}$.

点评:本题主要考查概率的基础知识,同时考查逻辑思维能力和数学应用能力,在(1)问中的各种情况要考虑周全,做到不重不漏;(2)问中对事件的类型要判断准确,即可顺利求解分布列及其数学期望.

例4 (2006·江西·理)某商场举行抽奖促销活动,抽奖规则是:从装有9个白球,1个红球的箱子中每次随机地摸出一个球,记下颜色后放回,摸出一个红球可获得奖金10元;摸出2个红球可获得奖金50元.现有甲、乙两位顾客,规定:甲摸一次,乙摸两次,令 ξ 表示甲、乙两人摸球后获得的奖金总额.求

(1)ξ 的分布列;

(2)ξ 的数学期望.

分析

本题的难点在于要把 ξ 的所有可能取值考虑全面.当甲、乙两人都未摸到红球时,ξ 为0元;当甲、乙两人中只有1人摸到1次红球时,ξ 为10元;当甲摸到红球,乙摸两次中只有一次为红球时,ξ 为20元;当甲未摸到红球,乙两次均摸到红球时,ξ 为50元;当甲摸到红球,乙也两次均摸到红球时,ξ 为60元,这样可知 ξ 的可能取值共5种,即0,10,20,50,60,再求其对应概率即可.

解:(1)ξ的所有可能的取值为0,10,20,50,60.

$P(\xi=0)=(\frac{9}{10})^3=\frac{729}{1000}$,

$P(\xi=10)=\frac{1}{10}\times(\frac{9}{10})^2+\frac{9}{10}\times C_2^1\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{243}{1000}$,

$P(\xi=20)=\frac{1}{10}\times C_2^1\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{18}{1000}$,

$P(\xi=50)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{9}{1000}$,

$P(\xi=60)=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}$,

$\therefore\xi$的分布列为:

ξ	0	10	20	50	60
P	$\frac{729}{1000}$	$\frac{243}{1000}$	$\frac{18}{1000}$	$\frac{9}{1000}$	$\frac{1}{1000}$

(2)$E\xi=0\times\frac{729}{1000}+10\times\frac{243}{1000}+20\times\frac{18}{1000}+50\times\frac{9}{1000}+60\times\frac{1}{1000}=3.3$(元)

点评:解答此题要注意,当$\xi=10$时,对应情况有三种:分别为甲摸到红球,乙两次均未摸到红球,此时概率为$\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}$;也可能甲未摸到红球,乙第一次摸到红球而第二次未摸到红球,此时概率为$\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}$;或甲未摸到红球,乙第一次未摸到红球而第二次摸到红球,此时概率为$\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}$.三种情况是互斥的,所以$\xi=10$时,对应的概率为$\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{243}{1000}$,若只考虑其中的两种情况,会导致错误求解,这一点在学习时要格外注意.

例5 (2006·陕西·理)甲、乙、丙3人投篮,投进的概率分别是$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{1}{2}$.

(1)现3人各投篮1次,求3人都没有投进的概率;

(2)用ξ表示乙投篮3次的进球数,求随机变量ξ的概率分布及数学期望$E\xi$.

分析

(1)此事件是相互独立事件,直接用对立事件的概率相乘.

(2)此事件是3次独立重复试验,直接用公式$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$求出即可.

解:(1)记"甲投篮1次投进"为事件A_1,"乙投篮1次投进"为事件A_2,"丙投篮1次投进"为事件A_3,"3人都没有投进"为事件A.

则$P(A_1)=\frac{1}{3}$,$P(A_2)=\frac{2}{5}$,$P(A_3)=\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\therefore P(A)&=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})\\&=[1-P(A_1)]\cdot[1-P(A_2)]\cdot[1-P(A_3)]\\&=(1-\frac{1}{3})(1-\frac{2}{5})(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

$\therefore$ 3人都没有投进的概率为$\frac{1}{5}$.

(2)随机变量ξ的可能值为0,1,2,3,且由题意$\xi\sim B(3,\frac{2}{5})$.

$\therefore P(\xi=k)=C_3^k(\frac{2}{5})^k(\frac{3}{5})^{3-k}$,$(k=0,1,2,3)$,

$\therefore \xi$的概率分布为:

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$\therefore E\xi=nP=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$.

点评:求解概率统计问题的关键是弄清题意中事件的类型,这一点在今后学习中还要加大重视力度.

例6 (2005·全国Ⅱ·理)甲、乙两队进行一场排球比赛.根据以往经验,单局比赛甲队胜乙队的概率为0.6.本场比赛采用五局三胜制,即先胜三局的队获胜,比赛结束.设各局比赛相互间没有影响.令ξ为本场比赛的局数,求ξ的概率分布和数学期望.(精确到0.0001)

分析

要弄清比赛的局数$\xi=3,4,5$:

$\xi=3$时,甲队胜3局或乙队胜3局;

$\xi=4$时,前3局中甲队胜2局,第4局甲队胜或前3局中乙队胜2局,第4局乙队胜;

$\xi=5$时,前4局中甲队胜2局,第5局甲队胜或前4局中乙队胜2局,第5局乙队胜.

解:单局比赛甲队胜乙队的概率为0.6,乙队胜甲队的概率为 $1-0.6=0.4$,由题意可知,ξ 的可能取值为3,4,5.

比赛3局结束有两种情况:甲队胜3局或乙队胜3局,因而

$P(\xi=3)=0.6^3+0.4^3=0.28.$

比赛4局结束有两种情况:前3局中甲队胜2局,第4局甲队胜;或前3局中乙队胜2局,第4局乙队胜. 因而

$P(\xi=4)=C_3^2\times0.6^2\times0.4\times0.6+C_3^2\times0.4^2\times0.6\times0.4=0.3744.$

比赛5局结束有两种情况,前4局中甲队胜2局、乙队胜2局,第5局甲胜或乙胜,因而

$P(\xi=5)=C_4^2\times0.6^2\times0.4^2\times0.6+C_4^2\times0.6^2\times0.4^2\times0.4=0.3456.$

$\therefore\xi$ 的概率分布为:

ξ	3	4	5
P	0.28	0.3744	0.3456

$\therefore\xi$ 的期望 $E\xi=3\times P(\xi=3)+4\times P(\xi=4)+5\times P(\xi=5)$

$=3\times0.28+4\times0.3744+5\times0.3456=4.0656.$

点评:本题可以利用对称思想进行解答,即对甲、乙两队中的任何一个进行详细分析,另一个队的情况也就清楚了. 所以 ξ 的每一个可能取值一定都对应两种情况.

例7 (2005·辽宁·理)某工厂生产甲、乙两种产品,每种产品都是经过第一和第二工序加工而成,两道工序的加工结果相互独立,每道工序的加工结果均有 A、B 两个等级. 对每种产品,两道工序的加工结果都为 A 级时,产品为一等品,其余均为二等品.

(1)已知甲、乙两种产品每一道工序的加工结果为 A 级的概率如表一所示,分别求生产出的甲、乙产品为一等品的概率 $P_甲$、$P_乙$;

(2)已知一件产品的利润如表二所示,用 ξ、η 分别表示一件甲、乙产品的利润,在(1)的条件下,求 ξ、η 的分布列及 $E\xi$、$E\eta$;

(3)已知生产一件产品需用的工人数和资金额如表三所示,该工厂有工人40名,可用资金60万元. 设 x、y 分别表示生产甲、乙产品的数量,在(2)的条件下,x、y 为何值时,$z=xE\xi+yE\eta$ 最大?最大值是多少?(解答时须给出图示)

表一

概率 工序 / 产品	第一工序	第二工序
甲	0.8	0.85
乙	0.75	0.8

表二

等级 / 利润 / 产品	一等	二等
甲	5(万元)	2.5(万元)
乙	2.5(万元)	1.5(万元)

表三

项目 / 用量 / 产品	工人(名)	资金(万元)
甲	8	5
乙	2	10

分析

(1)要想甲产品为一等品,则两道工序加工的结果必须均为 A 级. 对于乙产品也是这样.

(2)由(1)中所得的甲、乙产品为一等品的概率 $P_{甲}$、$P_{乙}$,即能列出随机变量分布列,求出数学期望.

(3)此问是线性规划问题,用图象法求解较好.

解:(1)$P_{甲}=0.8\times0.85=0.68$,$P_{乙}=0.75\times0.8=0.6$.

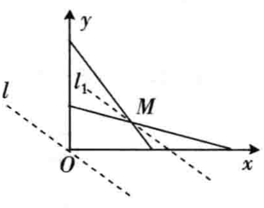
(2)随机变量 ξ、η 的分布列分别是

ξ	5	2.5
P	0.68	0.32

η	2.5	1.5
P	0.6	0.4

$E\xi=5\times0.68+2.5\times0.32=4.2$.

$E\eta=2.5\times0.6+1.5\times0.4=2.1$.



(3)由题设知 $\begin{cases}5x+10y\leqslant60,\\8x+2y\leqslant40,\\x\geqslant0,\\y\geqslant0.\end{cases}$

目标函数为:$z=xE\xi+yE\eta=4.2x+2.1y$

作出可行域(如右图):作直线 l:$4.2x+2.1y=0$,将 l 向右上方平移至 l_1 位置

时,直线经过可行域上的点 M 与原点距离最大,此时 $z=4.2x+2.1y$ 取最大值.

解方程组 $\begin{cases}5x+10y=60\\8x+2y=40\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=4,\\y=4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=4,\\y=4\end{cases}$ 时,z 取最大值,z 的最大值为 25.2.

点评:本题主要考查相互独立事件的概率,随机变量的分布列及期望,线性规划模型的建立与求解等基础知识,并且进一步考查建立简单的数学模型以解决实际问题的能力.

例 8 (2006·湖南八校联考)某地区有 A、B、C 三个不同规模的养殖场,该地区某市场的鸡都由这三家养殖场供应. 根据调查,A、B、C 三个养殖场的鸡在该市场占有量分别为 20%、30%、50%,且顾客购买时无法辨认出是哪一家养殖场的鸡. 张大婶从该市场上买回了三只鸡. 求

(1)买回的三只鸡分别属于三个不同养殖场的概率;

(2)买回的三只鸡中 C 养殖场的鸡的只数 ξ 的分布列、期望和方差.

分析

(1)三只鸡分别属于三个不同养殖场的情况共有 A_3^3 种,若求对应概率,则还需乘以各自的市场占有率;

(2)弄清 ξ 的可能取值即可求出 ξ 的分布列,而 $E\xi$ 利用公式可直接求出,$D\xi$ 可用 $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$ 求得.

解:(1)由互斥和独立事件得 $P=A_3^3\times20\%\times30\%\times50\%=0.18$.

(2)ξ 的可能取值分别为 0,1,2,3.

当 $\xi=0$ 时,表示买回的三只鸡中没有 C 养殖场的鸡,那么这三只鸡将可能全部来自 A 场,可能全部来自 B 场,也可能 2 只来自 A 场,1 只来自 B 场或 1 只来自 A 场,2 只来自 B 场.

$$\therefore P(\xi=0)=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{8}.$$

当 $\xi=1$ 时,表示买回的三只鸡中只有 1 只鸡来自 C 场,另两只鸡将可能全部来自 A 场,可能全部来自 B 场,也可能 1 只来自 A 场,另一只来自 B 场.

$$\therefore P(\xi=1)=C_3^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+C_3^1\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}+C_3^1\times\frac{1}{2}\times C_2^1\times\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}$$

$$=\frac{3}{8};$$

当 $\xi=2$ 时,表示买回的三只鸡中有两只来自 C 场,第三只鸡可能来自 A 场,可能来自 B 场.

$$\therefore P(\xi=2)=C_3^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+C_3^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{8};$$

当 $\xi=3$ 时，表示买回的三只鸡全都来自 C 场.

$\therefore P(\xi=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

$\therefore \xi$ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$\therefore E\xi=\frac{3}{2}, D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{3}{4}$.

点评：本题需注意两点：(1) 当 $\xi=1$ 时，表示买回的三只鸡中有一只鸡来自 C 场，由于不能确定是哪只鸡，所以要在 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$ 前面乘以 C_3^1，而 $\xi=2$ 时，对应在 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$ 前面乘以 C_3^2；(2) $D\xi$ 的求法还有一种，即

$$D\xi=(0-E\xi)^2\times\frac{1}{8}+(1-E\xi)^2\times\frac{3}{8}+(2-E\xi)^2\times\frac{3}{8}+(3-E\xi)^2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}.$$

此法较为麻烦，公式 $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$ 更常用一些.

例 9 （2007 · 全国Ⅰ · 理）某商场经销某商品，根据以往资料统计，顾客采用的付款期数 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	4	5
P	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1

商场经销一件该商品，采用 1 期付款，其利润为 200 元；分 2 期或 3 期付款，其利润为 250 元；分 4 期或 5 期付款，其利润为 300 元；η 表示经销一件该商品的利润，(1) 求事件 A："购买该商品的 3 位顾客中，至少有 1 位采用 1 期付款"的概率 $P(A)$；(2) 求 η 的分布列及期望 $E\eta$.

分析

对于事件 A：购买该商品的 3 位顾客中，至少有 1 位采用 1 期付款的可能情况为：3 位顾客中，有 1 位或 2 位或 3 位采用 1 期付款，情况较繁杂，故考虑先求事件 A 的对立事件的概率，较为简便.

解：(1) 由题意可知每一位顾客不采用 1 期付款的概率为 0.6，记 A 的对立事件购买该商品的 3 位顾客中，都不采用 1 期付款为 $\overline{A}$，则

$p(\overline{A})=0.6^3=0.216$

$\therefore P(A)=1-P(\overline{A})=0.784$

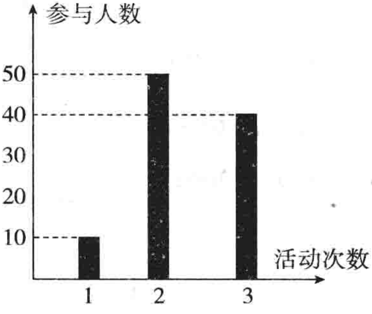
(2)由题意可知 η 可以取200,250,300,分布列如下

η	200	250	300
P	0.4	0.4	0.2

$\therefore E\eta=200\times0.4+250\times0.4+300\times0.2=240$

点评:本大题主要考查对立事件概率性质以及利用概率知识解决实际问题的能力,此题难度不大,属中低档题目.

例10 (2007·北京·理)某中学号召学生在今年春节期间至少参加一次社会公益活动(以下简称活动),该校合唱团共有100名学生,他们参加活动的次数统计如图所示.



(1)求合唱团学生参加活动的人均次数;

(2)从合唱团中任选两名学生,求他们参加活动次数恰好相等的概率;

(3)从合唱团中任选两名学生,用 ξ 表示这两人参加活动次数之差的绝对值,求随机变量 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

分析

(1)参加活动的人均次数 $=\dfrac{\text{参加活动的总次数}}{\text{学生总人数}}$.

(2)若要任选两名学生,他们参加活动次数恰好相等,则必须从参加相同次数活动的总人数中任取两名,即从参加一次活动的10人中任选两名有 C_{10}^2 种选法,从参加两次活动的50人中任选两名有 C_{50}^2 种选法,从参加三次活动的40人中任选两名有 C_{40}^2 种选法,故共以 $C_{10}^2+C_{50}^2+C_{40}^2$ 种选法,而从100人中任选两名有 C_{100}^2 种选法,这样对应概率即可求得.

(3)本小题要弄清 ξ 的可能取值,分别为0,1,2,$\xi=1$ 时,表示两人参加次数相同;$\xi=2$ 时,表示1人参加1次,另1人参加2次或1人参加2次,另1人参加3次;$\xi=3$ 时,表示1人参加1次,另1人参加3次.再求出对应概率后,即可求 ξ 的数学期望.

解:由图可知,参加活动1次、2次和3次的学生人数分别为10、50和40.

(1)该合唱团学生参加活动的人均次数为

$$\frac{1\times10+2\times50+3\times40}{100}=\frac{230}{100}=2.3$$