

庆祝建校十五周年！

大庆职工大学

论文选集

大庆职工大学

DAQING ZHIGONG DAXUE
LUNWEN XUANJI

1995. 9

谨以此书献给

大庆油田开发建设三十五周年！

大庆油田五千万吨稳产二十周年！

大庆职工大学建校十五周年！

大庆职工大学单独办学十周年！

《大庆职工大学论文选集》

编辑委员会成员名单

主 编：李向久

副主编：邝世恩 胡长俊 李延成

编 委：(按姓氏笔划为序)

王贵才 邝世恩 孙宝和 许惠民

李向久 李延成 张家禄 陈福康

胡长俊 赵忠俊 钱桂荣

编者的话

大庆职工大学于一九八〇年建校至今已十五年了。建校初期学校由大庆石油学校管理并组织教学工作。经大庆石油管理局批准,大庆职工大学于一九八五年在现在的校址建设新校园而单独办学,至今已渡过了十个年头。为庆祝建校十五周年,为庆祝单独办学十周年,我们编辑出版了这本小小的论文集,做为学校十年来建设、发展与改革工作总结的一部分,奉献给那些关心、支持、指导及直接参与学校建设的各位领导和全体教职员工及全体同学们,让我们继续共同努力工作,在过去工作的基础上,培育更多的德智体全面发展的为石油工业的繁荣昌盛而努力工作的劳动者。在大庆油田开发建设三十五周年和五千万吨稳产二十周年的喜庆时刻,大庆职工大学做为企业教育事业的一部分,我们把这本小小的论文集做为一份礼物,献给我们的可爱的油田,献给可敬的大庆人!

大庆职工大学十五年来始终坚持正确的办学方向,按国家教委、省教委和石油天然气总公司关于成人高等教育、高等职业技术教育、岗位培训和继续工程教育的方针政策和工作原则,在大庆石油管理局的直接领导下,结合大庆油田企业教育综合改革的实际,开展了符合企业改革与发展实际的成人高等教育、高等职业技术教育、岗位培训和各种继续工程教育工作,学校以教学为中心的各项工作取得了一定的成果。为了真正地搞好高等职业技术教育和岗位培训工作,学校不断地完善以教学为中心的教学、科研、生产三结合的工作体制和工作机制。为不断地提高教学质量,我们加强了教学管理与研究工作,加强了自然科学与应用技术的科研工作,加强了社会科学的科研工作,积极努力地建设一支政治素质、业务素质 and 学术水平比较高的教师队伍,以适应教学、科研、生产艰巨的工作任务。本书体现了学校教职工的政治、业务、科研与学术水平在不断地提高。这本论文集中编入的 58 篇论文,是从现在在学校工作的教职员工十年来(截止至 1995 年 6 月 10 日)在国内外期刊、我校学报及国内外学术会议上发表、交流的近 500 篇论文中,经过认真地编选而成。论文集的后边附录了《论文题目集锦》,辑录了我校部分教职工的一部分科研成果。

本书的各位编委及林桂森、周广厚、冯平、杨连刚、陈秉龙、孙素梅、李瑞等同志和大庆石油学院印刷厂的同志们为本书的出版付出了辛勤而可贵的劳动,在此深表谢意!

由于学校建校时间很短,教师队伍比较年轻,研究水平比较低,论文中错误或不当之处在所难免,敬希同行及读者不吝指正。

《大庆职工大学论文选集》编辑委员会

一九九五年九月

目 录

· 自然科学 ·

- 大参数积分的渐近估值..... 王学孔 胡长俊(1)
- 关于“互斥”与“独立”的比较..... 伊晓东(8)
- 稳恒电流场中的磁能公式..... 袁庆林(9)
- 对利萨如图形的讨论..... 冀旺年(13)
- 利用表面波测量液体的表面张力系数..... 刘剑波 马科峰(16)
- 汽油中低分子量醇的测定..... 于振波 高晓丽 朱国先(18)
- 钼/二氧化钛光催化还原二氧化碳为甲酸盐的研究..... 徐用军 朱明阳(22)
- M-40/酚醛环氧复合材料界面改性的研究..... 徐用军 顾 辉(27)
- 亚硝酸离子的测定与消除..... 陈新萍(33)
- 混合二羟基二氯化锡与 2-羟基-1-萘醛缩苯胺类 Schiff 碱配合物的合成和表征
..... 孙振刚(38)
- 多元光度分析的数据处理..... 李 荣(44)
- 粘度法研究 PAM 与 $R_{12}SO_3Na$ 之间的相互作用
..... 徐桂英 顾影慧 曾利容 竺和平 毛宏志(50)
- 垂直地震剖面法的应用前景..... 刘立春(55)
- 石门寨地区早古生代沉积古地理环境研究..... 吴德民(59)
- 阿拉新气藏天然气成因类型及定量计算..... 吴井新 刘炳勤 方祖康(68)
- 均质储层中灌注模型的解及应用实例..... 李淑华(77)
- 均质无穷大 N 层油藏灌注试井模型精确解..... 伊晓东(84)
- 识别试井解释模型的压力导数方法..... 王学孔 袁愈玖 李延成 孙 战 孙 智(90)
- 广义 IPR 方程的修正及实例验证..... 周广厚(96)
- 广义 Weng 旋回模型及其在油田可采储量预测中的应用..... 李发印(102)
- 水力压裂过程中裂缝内液体温度分布的数值计算方法..... 张宏方(106)
- AN EQUIVALENT MECHANISM METHOD FOR ANALYZING FORCES IN
THE MOVABLE SLEEVE-TOOTH TRANSMISSION WITH SMALL TOOTH
DIFFERENCE..... Li Mingshan, Li Xiangjiu(112)
- 活齿少齿差行星齿轮传动啮合效率的动力学分析法..... 李明山(120)
- 旋转机械故障诊断的模糊数学原理及权重集隶属度函数的确定
..... 孔繁森 孙忠清 于艳红(125)
- 平面薄片弹簧联轴器的齿销齿形研究..... 孔繁森 李向久 张明深(134)
- JS70 型蛇簧联轴器及其静载试验..... 张明深(139)
- 对抽油机二次平衡的认识..... 辛绍杰(144)
- 并联机器人误差辨识研究..... 辛绍杰 苏恩衡(152)

常规游梁式抽油机杆件尺寸的优化设计.....	周广厚(158)
空气冷却器优化设计.....	董海生(165)
柴油机喷油滞后的电液模拟解释.....	周全江(172)
微机在抽油机平衡调节及能耗计算中的应用.....	陈丽艳(177)
MS DOS 目录树的嫁接	王敬山(183)
石油机械零件编码系统——SLBM-1 的研究	姚玉昉 肖明云 高云芳(187)
供暖管网的腐蚀与缓蚀初探.....	刘四吉(197)

· 社会科学 ·

浅谈新形势下加强党员党性修养问题.....	邝世恩(201)
对石油工业全行业亏损的剖析.....	欧阳超(205)
再论原油成本中储量费用的性质.....	欧阳超 刘 滨(212)
浅谈价值分析.....	王政荣(217)
试论企业的技术创新机制.....	刘喜和 夏一鸣(220)
日本能源结构变化趋势与能源供需展望.....	苏中启(223)
“双分”教学法及创造思维别议.....	李重华(228)
谈谈企业领导干部用才意识.....	孙宝和(230)
论个性的差异与管理.....	陈福康(232)
简论人的需要和激励——谈谈企业职工积极性的调动.....	赵忠俊(235)
谈成人高校学员的理想教育——大庆职工大学学员思想调查及思考.....	王继舜(239)
市场经济呼唤人文精神.....	赵桂英(248)
试论人权的阶级性、民族性和国际性	徐永德 李 成 韩建鹏(254)
大庆地区图书馆事业布局和体制探讨.....	李玉珠(257)

· 教学研究 ·

试谈我国学制结构和职业技术教育问题.....	李向久(261)
高等职业技术教育培养目标的确定.....	梁觉民(266)
制定岗前培训教学计划的原则.....	张家禄(269)
企业转换经营机制以后岗位培训如何改革.....	梁觉民(271)
在化学实验教学中实施素质教育的理论与实践.....	朱国先(274)
类比对照 分析归纳 注释.....	卜铁山(283)
论成人高校外语教学的 QC	赵赴越(285)
浅谈课堂教学的艺术性.....	马天尊(293)
三维结构在体育教学设计中的应用.....	李书平(295)
附录:论文题目集锦(1985.9—1995.6)	(297)

大参数积分的渐近估值

王学孔 胡长俊*

摘要 本文依据 Polya 阐明的“heuristic”与“plausible 推理”对大系数积分渐近估值的证明进行探讨。

引言

对含有大参数的积分进行估值,最重要的方法之一是“局部化”方法(或称为“ δ -函数法”、“广义函数法”)。这是数学分析领域中带有原则性的一种方法,而且掌握它又比较困难,因此,它既是重点又是难点的课题。

Polya 在他的经典著作^[1]中,对“heuristic”与“plausible 推理”的两个要点做了精辟的论述。第一个要点是:要通过简单的例子来阐明抽象一般的方法;第二个要点是:为了了解严格的形式证明,先要了解粗糙的直观“证明”。下面我们依据这些论述对大参数积分的渐近估值做些探讨。

1 应用“局部化”方法的简单例子

例 1. 证明:若函数 $u = u(x, y, z)$ 在由光滑曲面 Σ 所围成的区域 r 和 Σ 上具有直到二阶的连续偏导数。且

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

则

$$u = u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\cos(\vec{r} \cdot \vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

其中 \vec{r} 是从域 V 里面的点 (x, y, z) 向曲面 Σ 上的动点 (ξ, η, ζ) 所引的矢径,

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

\vec{n} 是曲面 Σ 在点 (ξ, η, ζ) 处单位外法向量。

$$\text{设 } V(x, y, z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}}$$

除点 (ξ, η, ζ) 之外,有

$$\Delta^2 V = \Delta^2 \frac{1}{r} = 0$$

(1)

事实上

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-\xi)^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-\eta)^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-\zeta)^2}{r^5}$$

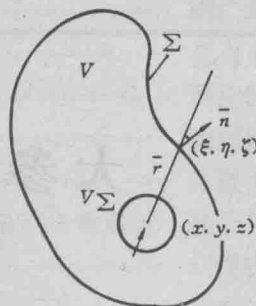


图 1

把三式加起来则得出(1)式。

设体 V 边界面为 Σ , $\Delta V=0$, $V=\frac{1}{r}$, 以 (x, y, z)

为中心, ϵ 为半径做一小球 V_ϵ , 球面为 Σ_ϵ , 在 $V-V_\epsilon$ 上应用 Green 第二公式。

则有

$$0 = \iiint_{V-V_\epsilon} \begin{vmatrix} \nabla^2 u & \nabla^2 \frac{1}{r} \\ u & \frac{1}{r} \end{vmatrix} dV = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \\ u & \frac{1}{r} \end{vmatrix} dS - \iint_{\Sigma_\epsilon} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \\ u & \frac{1}{r} \end{vmatrix} dS$$

则

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \\ u & \frac{1}{r} \end{vmatrix} dS = \iint_{\Sigma_\epsilon} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \\ u & \frac{1}{r} \end{vmatrix} dS \quad (2)$$

在 Σ_ϵ 上有

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{\epsilon^2}$$

而 u 与 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 皆在 Σ_ϵ 上有界, 因之当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Sigma_\epsilon} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \\ u & \frac{1}{r} \end{vmatrix} dS &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Sigma_\epsilon} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} + u \frac{1}{\epsilon^2} \right) dS \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \iint_{\Sigma_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\Sigma_\epsilon} u dS = 4\pi u(x, y, z) \end{aligned}$$

这儿用到了:

$$\iint_{\Sigma_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0(\epsilon^2)$$

$$\iint_{\Sigma_\epsilon} u dS = u(x', y', z') \iint_{\Sigma_\epsilon} dS = 4\pi \epsilon^2 u(x', y', z')$$

$(x', y', z') \rightarrow (x, y, z)$ 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时

由(2)式. 有

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right] dS \quad (3)$$

但是

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \right) \cos \gamma \\ &= -\frac{1}{r^3} [(\xi - x) \cos \alpha + (\eta - y) \cos \beta + (\zeta - z) \cos \gamma] \\ &= -\frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{n} \\ &= -\frac{1}{r^2} \cos(\vec{r}, \vec{n}) \end{aligned}$$

代入(3)式. 则得

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{r^2} \cos(\vec{r}, \vec{n}) \right] dS$$

例2 设:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(z)}{y^2 + (x - y)^2} dz \quad (4)$$

其中 $f(x)$ 为有界连续函数, 求证:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = \pi f(x)$$

证明: 把(4)式改写为

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{+\infty} \right\} \frac{y f(z)}{y^2 + (x - z)^2} dz$$

先考虑中间的积分

对于任何 $\delta > 0$, 都有 $x - \delta < \xi < x + \delta$ 使

$$\begin{aligned} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{y f(z)}{y^2 + (x - z)^2} dz &= - \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f(z)}{1 + \left(\frac{x - z}{y} \right)^2} d \frac{x - z}{y} \\ &= - f(\xi) \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{1}{1 + \left(\frac{x - z}{y} \right)^2} d \frac{x - z}{y} \\ &= f(\xi) \operatorname{arctg} \frac{x - z}{y} \Big|_{x+\delta}^{x-\delta} \\ &= 2f(\xi) \operatorname{arctg} \frac{\delta}{y} \end{aligned}$$

于是有

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{y f(x)}{y^2 + (x - z)^2} dz = \pi f(\xi)$$

但是, 对于任意 $\delta > 0$ 都有 $x - \delta < \xi < x + \delta$, 如果 $\xi \neq x$, 则取 δ 比 $|x - \xi|$ 还小, 就会出现矛盾, 因之有 $\xi = x$.

另外显然有

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{x-\delta} \frac{y f(z)}{y^2 + (x - z)^2} dz = \lim_{y \rightarrow 0} \int_{x+\delta}^{+\infty} \frac{y f(z)}{y^2 + (x - z)^2} dz = 0$$

最后得到

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = \pi f(x)$$

例 3:

试证 $I(\alpha) = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x^2} dx$ 在 $[0, \infty]$ 上一致收敛 (我们已知 $\int_0^{\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx$ 不一致收敛)

考虑 $\sqrt{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-(\sqrt{\alpha}x)^2} d\sqrt{\alpha}x = \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$ 要估计 $I(\alpha, A) = |\sqrt{\alpha} \int_{\sqrt{\alpha}A}^{\infty} e^{-u^2} du| < \varepsilon$ 会不会关于 α 一致成立。只要 A 充分大, 先看 $[0, M]$, M 是任一正数。选取 $\delta > 0$, 使

$$\sqrt{\delta} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\delta} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} < \varepsilon, \delta < \frac{4\varepsilon^2}{\pi},$$

当 $\alpha < \delta$ 时, 有 $I(\alpha, A) = \sqrt{\alpha} \int_{\sqrt{\alpha}A}^{\infty} e^{-u^2} du < \varepsilon$, 对于任何 A 都成立。在 $[\delta, M]$ 内, 有 $I(\alpha, A) =$

$\sqrt{\alpha} \int_{\sqrt{\alpha}A}^{\infty} e^{-u^2} du < \sqrt{M} \int_{\sqrt{\delta}}^{\infty} e^{-u^2} du < \varepsilon$ 只要 A 充分大就行。所以在 $[0, M]$ 内只要 A 充分大

就有 $\sqrt{\alpha} \int_{\sqrt{\alpha}A}^{\infty} e^{-u^2} du < \varepsilon$, 即 $I(\alpha)$ 在 $[0, M]$ 上一致收敛。其次考虑 $[M, \infty)$,

这时有

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt{\alpha} \int_{\sqrt{\alpha}A}^{\infty} e^{-u^2} du &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\int_{\sqrt{\alpha}A}^{\infty} e^{-u^2} du}{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{-e^{-\alpha A^2} A (\sqrt{\alpha})^1}{(\alpha^{-\frac{1}{2}})^1} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha A e^{-\alpha A^2} = 0 \end{aligned}$$

取 $N > M$, 当 $\alpha > N$ 时使 $I(\alpha, A) < \varepsilon$ (对一切 A 均成立)。在 $[M, N]$ 内取 A

$$I(\alpha, A) < \sqrt{N} \int_{\sqrt{N}A}^{\infty} e^{-u^2} du < \varepsilon$$

成立, 这个 A 使 $I(\alpha, A) < \varepsilon$ 对于 $[M, \infty)$ 内的一切 α 均成立。

2 要证明的问题

设 $f(x)$, $\varphi(x) = e^{\lambda(x)}$ 及 $f(x)[\varphi(x)]^n$ ($n \geq 0$) 都是 (a, b) 上的绝对可积函数并满足条件:

(i) 函数 $h(x)$ 在内点 ξ ($a < \xi < b$) 达到唯一最大值。即对一切 $x \neq \xi$ 都有 $h(x) < h(\xi)$;

(ii) 函数 $h(x)$ 在 ξ 的一个小邻域内有连续的二阶导数, 且 $h''(\xi) < 0$;

(iii) 函数 $f(x)$ 在 ξ 处连续并且 $f(\xi) \neq 0$; 那么当实参数 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 Laplace 渐近积分公

式

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)[\varphi(x)]^n dx &\sim f(\xi)[\varphi(\xi)]^n \left[\frac{-2\pi}{nh''(\xi)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= f(\xi)[\varphi(\xi)]^n \left[\frac{-2\pi\varphi(\xi)}{n\varphi''(\xi)} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5)$$

3 粗糙的证明

Laplace 方法:

考虑积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{nh(x)} dx \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[\varphi(x)]^n dx \sim f(\xi)[\varphi(\xi)]^n \left[\frac{-2\pi\varphi(\xi)}{n\varphi''(\xi)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= f(\xi)[\varphi(\xi)]^n \left[\frac{-2\pi}{nh''(\xi)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

当 n 很大时成立。其中

$$\varphi(x) = e^{h(x)}, \varphi'(x) = e^{h(x)}[h'(x)]^2 + e^{h(x)}h''(x),$$

$$\varphi'(\xi) = e^{h(\xi)}h''(\xi), h''(\xi) = \frac{\varphi''(\xi)}{\varphi(\xi)}$$

证明: 积分(6)可以写成

$$I = e^{nh(\xi)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{n[h'(x)-h(\xi)]} dx$$

由条件(i)有

$$h(x) - h(\xi) < 0, x \neq \xi$$

因此,除点 $x = \xi$ 之外,

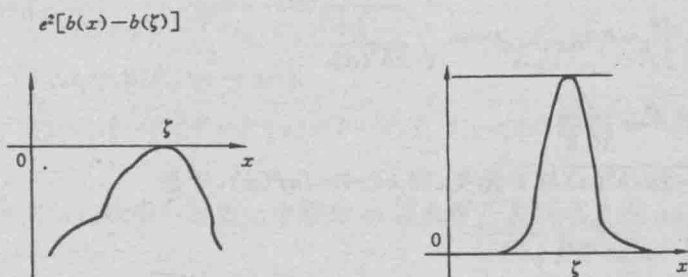


图 2

当 n 充分大时处处非常接近于零。于是,仅在 ξ 附近很小的区间内的积分就可以确定 I 的值,但是,在这个小区间内,有

$$f(x) \simeq f(\xi)$$

$$h(x) - h(\xi) \simeq \frac{1}{2}h''(\xi)(x - \xi)^2$$

所以有

$$I \sim e^{nh(\xi)} f(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}nh''(\xi)(x-\xi)^2} dx$$

而最后这个积分是概率积分,为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}nh''(\xi)(x-\xi)^2} dx = \left[\frac{-2}{nh''(\xi)} \right]^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \left[\frac{-2\pi}{nh''(\xi)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

因之(7)式获证。

《附注》由上面证明容易看出,若 $f(\xi)$ 在 $x = \xi$ 处有跳跃间断,则(7)式仍成立,只要在右端把 $f(\xi)$ 换为 $\frac{1}{2}[f(\xi^+) + f(\xi^-)]$ 即可。还可以看出,由于仅在 $x = \xi$ 附近的被积函数的值起主要作用,积分区间为有限或半无限(ξ 点要在其内部)。(7)仍然成立。当 ξ 与端点之一重合时,(7)式右端要除以 2。

例 1 当 n 很大时,可以利用(7)来近似确定 $n!$ 的值。由 $p(n+1) = n!$ 。

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

令 $x = ny$,

$$n! = n^{n+1} \int_0^{\infty} y^n e^{-ny} dy = n^{n+1} \int_0^{\infty} (e^{-y+\ln y})^n dy$$

与(7)比较, $f(x)=1, h(x)=-x+\ln x$. 因为

$$h'(x) = -1 + \frac{1}{x}$$

所以 $\xi=1, h(\xi)=-1, h''(\xi)=-1$.

由(7)得到

$$n! \sim n^{n+1} e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

这就是 Stirling 公式

例2 利用(7)证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_c^d |f(x)|^k dx \right]^{1/k} = |f|_{\max}$$

其中 $|f|_{\max} = |f(a)|$ 是 $|f(x)|$ 在区间 (c, d) 上的极大值. 在 $x=a$ 时的斜率为零. 当 a 为区间的端点时只要 $f'(a)=0$, 上述结论仍对. 我们可以假定 $f(x) \geq 0$. 由(7)有

$$\begin{aligned} \int_c^d f^k(x) dx &= \int_c^d e^{k \ln f(x)} dx \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} e^{k \ln f(a)} \sqrt{\frac{-2\pi}{k h''(a)}} \\ &= f_{\max}^k \frac{A}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

其中常数 $A = \sqrt{-2\pi/h''(a)}$ 与 k 无关, 而 $h(x) = \ln f(x)$, 于是

$$\left[\int_c^d f^k(x) dx \right]^{1/k} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} f_{\max} \left(\frac{A}{\sqrt{k}} \right)^{1/k}$$

易见 $\lim_{k \rightarrow \infty} (A \sqrt{k})^{1/k} = 1$, 从而得出欲证之结果. 若 a 等于 c 或 d , 常数 A 要除 2 但极限值不受影响.

4 严格的证明

先证一个预备估计式, 设 k 与 s 是任意给定的正数, 又 ξ 是 (a, b) 内的一个点, $a < \xi < b$, 那么有下列渐近式

$$\int_a^b e^{-nk(x-\xi)^2} dx = \left(\frac{\pi}{nk} \right)^{\frac{1}{2}} [1 + o(n^{-s})] \quad (n \rightarrow \infty) \quad (9)$$

特别, 如果 (a, b) 是 $(-\infty, +\infty)$, 则余项 $o(n^{-s})$ 可以略去.

事实上, 作变换 $t = \sqrt{nk}(x-\xi)$, 则

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-nk(x-\xi)^2} dx &= \int_{\sqrt{nk}(a-\xi)}^{\sqrt{nk}(b-\xi)} e^{-t^2} dt \frac{1}{\sqrt{nk}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{nk}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^{\sqrt{nk}(a-\xi)} e^{-t^2} dt - \int_{\sqrt{nk}(b-\xi)}^{\infty} e^{-t^2} dt \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{nk}} \left[\sqrt{\pi} - \int_{-\infty}^{\sqrt{nk}(a-\xi)} e^{-t^2} dt - \int_{\sqrt{nk}(b-\xi)}^{\infty} e^{-t^2} dt \right] \end{aligned}$$

如 b 为有限数, 则 $d = b - \xi < \infty$, 注意当 t 充分大时, $e^{-t^2} < t^{-2s-2}$, 故

$$\begin{aligned} 0 &< \sqrt{\frac{1}{nk}} \int_{\sqrt{nk}d}^{\infty} e^{-t^2} dt < \sqrt{\frac{1}{nk}} \int_{\sqrt{nk}d}^{\infty} e^{-2t^{2s+2}} dt \\ &= \sqrt{\frac{1}{nk}} \left(\frac{1}{2s+1} t^{-2s-1} \right) t - \sqrt{nk}d = o(n_{(a \rightarrow \infty)}^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

所以在(9)式的右端括号内有余项 $O(n^{-1})$ 。

现在我们利用局部化方法来证明公式(5)。以下恒假定 $x \in (a, b)$, 根据假设条件(ii)及(iii), 对于任给 $\varepsilon > 0$, 总可选取 $\delta > 0$ 如此之小, 使得 $a < \xi \pm \delta < b$, 并且当 $|x - \xi| < \delta$ 时有

$$\begin{aligned} f(\xi) - \varepsilon &< f(x) < f(\xi) + \varepsilon \\ h''(\xi) - \varepsilon &< h''(x) < h''(\xi) + \varepsilon \end{aligned} \quad (10)$$

还不妨假定预先给定的 ε 合乎条件 $h''(\xi) + \varepsilon < 0$ 。

因为 $h(x)$ 在 $x = \xi$ 时达到唯一最大值。所以

$$a = \sup_{|x-\xi|>0} [h(x) - h(\xi)] < 0, 0 < \theta = e^a < 1$$

现在我们来估计 $f(x) \left[\frac{\varphi(x)}{\varphi(\xi)} \right]^n = f(x) e^{n[h(x) - h(\xi)]}$ 在区间 $(a, \xi - \delta)$ 上与 $(\xi + \delta, b)$ 上的两段积分:

$$\left| \left(\int_a^{\xi-\delta} + \int_{\xi+\delta}^b \right) f(x) e^{n[h(x) - h(\xi)]} dx \right| \leq e^{na} \int_a^b |f(x)| dx = O(\theta^n) (n \rightarrow \infty)$$

注意 ξ 是极点, $h'(\xi) = 0$, 故应用 Taylor 公式及第一中值定理可以写出

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) e^{n[h(x) - h(\xi)]} dx &= \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(x) e^{n[h(x) - h(\xi)]} dx + O(\theta^n) \\ &= \mu \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} e^{\frac{1}{2}n(x-\xi)^2 h''(\xi)} dx + O(\theta^n) (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (11)$$

这里 $f(\xi) - \varepsilon \leq \mu \leq f(\xi) + \varepsilon$, $\xi - \delta < \xi' = \xi'(x) < \xi + \delta$, 又 $\theta (0 < \theta < 1)$ 是一个只和 ε 有关而与参数 n 无关的正数。

显然由(10)式可知(11)式中的最后一个积分 m 值介于下列两者之间:

$$\begin{aligned} [f(\xi) - \varepsilon] \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} e^{\frac{1}{2}n(x-\xi)^2 [h''(\xi) - \varepsilon]} dx \\ [f(\xi) + \varepsilon] \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} e^{\frac{1}{2}n(x-\xi)^2 [h''(\xi) + \varepsilon]} dx \end{aligned}$$

根据(9)式可知当 $n \rightarrow \infty$ 时上述两积分以分别渐近等价于

$$[f(\xi) - \varepsilon] \left[\frac{-2\pi}{n(h''(\xi) - \varepsilon)} \right]^{\frac{1}{2}} [f(\xi) + \varepsilon] \left[\frac{-2\pi}{n(h''(\xi) + \varepsilon)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

注意 $\theta^n = e^{na} = O\left(\frac{1}{n}\right) (n \rightarrow \infty)$, 又 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 故

$$\int_a^b f(x) \left[\frac{\varphi(x)}{\varphi(\xi)} \right]^n dx \sim f(\xi) \left[\frac{-2\pi}{nh''(\xi)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

(5)式获证。

5 结论

通过各例证明得出大参数积分渐近估值的证明, 可用“局部化”方法更方便的获得结果。

参 考 文 献

- 1 G. polya: "Mathematics and plausible Reasoning", 1954
- 2 吉林大学数学系: 数学分析(上、中、下)

作者简介 胡长俊 男, 1941年出生。1960年毕业于重庆师范学院数学系。现任大庆职工大学副校长。副教授。本文曾在《大庆职工大学学报》上发表。

关于“互斥”与“独立”的比较

伊晓东

前言

概率中有许多难于理解的概念。比如“互斥”与“独立”两个概念，它们之间有许多模糊之处，很多教材都没有把二者的区别说清楚。本文试图从几个方面阐述一下二者的区别，使得“互斥”与“独立”两上概念严格区分开来。

1 从“互斥”与“独立”的关系上区分

命题1 若两个事件 A, B ，满足 $P(A) > 0$ ， $P(B) > 0$ ，且 A, B 互斥，则 A, B 不能独立。

证明：用反证法。若 A, B 互相独立，则

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$\because P(A) > 0, P(B) > 0, \therefore P(AB) > 0$$

又 $\because A, B$ 互斥， $\therefore AB = \emptyset$ ， $\therefore P(AB) = 0$ ，矛盾。故 A, B 不能独立。

推论1 若两个事件 A, B ，满足 $P(A) > 0$ ， $P(B) > 0$ ，且 A, B 独立，则 A, B 不互斥。此即为命题1的逆否命题。

2 从“互斥”与“独立”各自的性质上区分

命题2 若两个事件 A, B ，满足 $P(A) > 0$ ， $P(B) > 0$ ，且 A, B 独立，则 A, B 必相交。

证明：用反证法。若 A, B 不相交，即 $AB = \emptyset$ ， $\therefore A, B$ 必互斥，由命题1知 A, B 不能独立。矛盾，故 A, B 必相交。

前面的阐述说明二者不相容，但当条件改变时两者也能相容起来，这就是矛盾的统一。

3 “互斥”与“独立”的统一性

命题3 若两个事件 A, B 至少有一个为不可能事件时，则 A, B 互斥与独立同时面立。

证明：不妨设 $A = \emptyset$ ，则 $AB = \emptyset$ ，即 A, B 互斥；同时又有 $P(AB) = 0$ 。而 $P(A) = 0$ ， $\therefore P(A)P(B) = 0$ 。

$\because P(AB) = P(A)P(B)$ ，即 $\therefore A, B$ 独立，证毕。

综上所述：若两个事件 A, B ，满足 $P(A) > 0$ ， $P(B) > 0$ ，则有

(下转 17 页)

稳恒电流场中的磁能公式

袁庆林

1 摘要

在稳恒电流的磁场中,磁场的能量

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{\infty} H^2(\vec{x}) d^3x \quad (1)$$

可由载流体的电流密度 \vec{J} 的分布,沿载流体的体积分

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{(V)} \vec{A} \cdot \vec{J} dV \quad (2)$$

求得。其中的 \vec{A} , \vec{H} 分别为电流的矢势和磁场强度, \vec{x} 为场点的位矢, V 和 dV 为载流体的体积和体积微元, \int_{∞} 和 $\int_{(V)}$ 表示对场空间积分和对载流体的体积分。(2)式在单一载流体的情况下,具有明确的物理意义,对于载流系的情况,物理意义不够明确。笔者从载流系的普遍情况出发,根据 \vec{H} 的可加性导出(2)式,使(2)式在普遍情况下,具有明确的物理意义,以加深对磁能的理解。

2 推导

设电流系由 n 个载流体组成。各载流体的电流密度为 $\vec{J}_1, \vec{J}_2, \dots, \vec{J}_n$, 体积为 V_1, V_2, \dots, V_n 。由 \vec{H} 的可加性知:电流系产生的磁场强度为: $\vec{H} = \sum_{i=1}^n \vec{H}_i$, 因而 $H^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{H}_i \cdot \vec{H}_j$, 把 H^2 代入(1)式得:

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \sum_{i=1}^n \int_{\infty} H_i^2 d^3x + \frac{1}{2} \mu_0 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\infty} \vec{H}_i \cdot \vec{H}_j d^3x, (i \neq j) \quad (3)$$

(3)式中的 \vec{H}_i, \vec{H}_j 分别为载流体 i, j 单独在 d^3 处激发的磁场强度。利用公式 $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$ 并注意到 $\nabla \times \vec{H}_i = \vec{J}_i$, 则(3)式右方第一项可以写成

$$\begin{aligned} W_{m1} &= \frac{1}{2} \mu_0 \sum_{i=1}^n \int_{\infty} H_i^2 \cdot d^3x \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 \sum_{i=1}^n \int_{\infty} \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{A}_i \cdot \vec{H}_i) d^3x + \frac{1}{2} \mu_0 \sum_{i=1}^n \int_{\infty} \frac{1}{\mu_0} \vec{A}_i \cdot (\nabla \times \vec{H}_i) d^3x \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式中的第一项等于零。因为

$\int_{\infty} \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{A}_i \cdot \vec{H}_j) d^3x = \oint_{(s)} \vec{A}_i \times \vec{H}_j \cdot d\vec{S}$ 而 H 随 $\frac{1}{x^2}$ 变化, A 随 $\frac{1}{x}$ 变化, S 随 x^2 变化, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 闭合曲面的积分等于零。于是, (3) 式中的第一项为

$$\begin{aligned} W_{m1} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\infty} \vec{A}_i \cdot (\nabla \times \vec{H}_i) d^3x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{(V_i)} \vec{A}_i \cdot \vec{J}_i \cdot dV_i \end{aligned} \quad (5)$$

$\frac{1}{2} \int_{(V_i)} \vec{A}_i \cdot \vec{J}_i \cdot dV_i$ 是 i 载流体的电流由零到稳恒电流的变化过程中, 电源为克服自感而做的功。

称为自感磁能, 已由文献[3]指明。所以 W_{m1} 是 n 个载流体各自的自感磁能的总和。

由于 i, j 载流体单独产生的磁场强度为

$$\begin{aligned} \vec{H}_i &= \frac{1}{4\pi} \int_{(V_i)} \frac{\vec{J}_i \times (\vec{x} - \vec{x}_i)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3} dV_i \\ \vec{H}_j &= \frac{1}{4\pi} \int_{(V_j)} \frac{\vec{J}_j \times (\vec{x} - \vec{x}_j)}{|\vec{x} - \vec{x}_j|^3} dV_j \end{aligned}$$

于是(3)式的第二项可写成

$$W_{m2} = \frac{\mu_0}{32\pi^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{(V_i)(V_j)} \frac{\vec{J}_i dV_i \times (\vec{x} - \vec{x}_i) \vec{J}_j \cdot dV_j \times (\vec{x} - \vec{x}_j)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^2 |\vec{x} - \vec{x}_j|^3} \cdot d^3x \quad (6)$$

式中 \vec{x}_i, \vec{x}_j 分别为 i, j 载流体的体微元 dV_i, dV_j 的位矢, 利用

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

(6)可把式中的空间积分写成

$$\begin{aligned} &\int_{\infty} \frac{\vec{J}_i dV_i \times (\vec{x} - \vec{x}_i) \cdot \vec{J}_j dV_j \times (\vec{x} - \vec{x}_j)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3 |\vec{x} - \vec{x}_j|^3} \cdot d^3x \\ &= \vec{J}_i dV_i \cdot \vec{J}_j dV_j \int_{\infty} \frac{(\vec{x} - \vec{x}_i) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_j)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3 |\vec{x} - \vec{x}_j|^3} \cdot d^3x \\ &\quad - \int_{\infty} \frac{\vec{J}_i dV_i \cdot (\vec{x} - \vec{x}_j) \vec{J}_j dV_j \cdot (\vec{x} - \vec{x}_i)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3 |\vec{x} - \vec{x}_j|^3} \cdot d^3x \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式中的第一项积分

$$\vec{J}_i dV_i \cdot \vec{J}_j dV_j \int_{\infty} \frac{(\vec{x} - \vec{x}_i) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_j)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3 |\vec{x} - \vec{x}_j|^3} \cdot d^3x = \frac{4\pi}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|} \vec{J}_i dV_i \cdot \vec{J}_j dV_j \quad (8)$$

把(7)和(8)式代入(6)式得:

$$\begin{aligned} W_{m2} &= \frac{\mu_0}{32\pi^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{(V_i)(V_j)} \frac{4\pi \vec{J}_i \cdot \vec{J}_j dV_i dV_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|} \\ &\quad - \frac{\mu_0}{32\pi^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\infty} d^3x \int_{(V_i)} \frac{\vec{J}_i \cdot (\vec{x} - \vec{x}_i) dV_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3} \int_{(V_j)} \frac{\vec{J}_j \cdot (\vec{x} - \vec{x}_j) dV_j}{|\vec{x} - \vec{x}_j|^3} \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式中的第二项等于零, 因为:

$$\begin{aligned} \int_{(V_i)} \frac{(\vec{x} - \vec{x}_i) \cdot \vec{J}_i dV_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3} &= \int_{(V_i)} \nabla \cdot \frac{\vec{J}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} dV_i - \int_{(V_i)} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \nabla \cdot \vec{J}_i dV_i \\ &= \oint_{(S_i)} \frac{\vec{J}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \cdot d\vec{S}_i - \int_{(V_i)} \frac{\nabla \cdot \vec{J}_i dV_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \end{aligned} \quad (10)$$

在 V_i 的界面 S_i 上, \vec{J}_i 无法向分量, 上式中的第一项积分等于零。又因为在稳恒条件下 $\nabla \cdot \vec{J} = 0$, 上式的第二项等于零, 因此, (9)式变为

$$\begin{aligned} W_{m2} &= \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{(V_i)} \int_{(V_j)} \frac{\vec{J}_i dV_i \cdot \vec{J}_j dV_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{(V_i)} \vec{A}_j \cdot \vec{J}_i dV_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{(V_i)} \vec{A}_i \cdot \vec{J}_j dV_j \quad i \neq j \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\vec{A}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V_i)} \frac{\vec{J}_i dV_i}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|}$$

$$\vec{A}_j = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V_j)} \frac{\vec{J}_j dV_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|}$$

分别为载流体 i, j 的矢量势, 而

$$W_{ij} = \int_{(V_i)} \vec{A}_i \cdot \vec{J}_j dV_j$$

是载流 j 在载流体 i 的磁场中的互作用能。它等于载流体 i 在载流体 j 的磁场中的互作用能。

是载流体 i, j 由无穷远先后移向所在位置的过程中, 电源为克服互感做的功, 利用 (3)、(5)、(11)、(12)式, 可把 (2)式写成

$$\begin{aligned} W_m &= \int_{(V)} \vec{A} \cdot \vec{J} dV \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{(V_i)} \vec{A} \cdot \vec{J}_i dV_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{(V_i)} \vec{A}_j \cdot \vec{J}_j dV_j \\ &= W_{m1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{ij} = W_{m1} + W_{m2} \quad i \neq j \end{aligned} \quad (13)$$

3 结论

(13)式表明: 在稳电流系的普遍情况下, 由 (2)式计算的磁能, 是体系中各载流体的自感磁能与不重复配对的载流体间互感磁能的总和。自感磁能 W_{m1} 是各载流体的电流形成过程中, 电源做的功; 互感磁能 W_{m2} 是各载流体为克服互感, 电源做的功。这就是在稳恒电流系的普遍情况下, 计算磁能的公式 (2) 的物理意义。