前　言

为了提高我系教学质量，我们特别邀请中国科学院数学研究所副研究员王联同志及副研究员王慕秋同志为我系编写了这一本讲义，作为我系常微分方程选修课的教材．它是在两位同志在中国科学院研究生院的教学工作以及在其它院校的讲学内容上形成的．特点是选材精炼，注意阐明基本思考方法，论证严整而又重视直观形象，同时还介绍了一些较新的成果，其中不少是两位同志新近的工作．正因为这本讲义有这些特点，它就不失为常微定性论及稳定性理论的一本入门好书．对于王联同志及王慕秋同志对我们工作的支持，在此表示深深的感谢！

黄启昌

1980．11．

目　录

（下 册）

第二章　运动稳定性理论基础

§1. 问题的提出

运动系统的稳定性研究是自然科学和工程技术中很受人们关心的问题．古典的例子是太阳系的稳定性及旋转星球所构成的星球的稳定性等等．

近年来，**运动稳定性理论**，在世界各国都引起了极大的兴趣．这个由著名学者 A.M. **李雅普诺夫**（Ляпунов，*Lyapunov*）在上一世纪九十年代所开创的理论，在物理科学和工程技术的各个部门，都获得了广泛的应用．

按李雅普诺夫意义下的运动稳定性理论，是研究干扰因素对于物质系统运动的影响．所谓干扰性因素应理解为那些在描述运动时，由于与基本力相比甚小而未曾加以考虑的力．这些力通常是不确切知道的．它们可以是瞬间的作用，因而引起物质系统的初始状态的微小变化。

众所周知，微小的干扰因素对于物质系统运动的影响，对于不同的运动是不一样的．对于一些运动，这种影响并不显著，因而受干扰的运动与不受干扰的运动相差很小．反之　对于另外一些运动，干扰的影响就可能很显著，以致于干扰的力无论多么小，受干扰的运动与不受干扰的运动随着时间的推移而可能相差得很大．简单的说，属于前者的运动就称为是稳定的，而属于后一类型的运动，则称为是不稳定的．

运动稳定性理论就是要建立一些准则，用以判断所考察的运动是稳定的或是不稳定的．因为在实际情况中，干扰因素总是不可避免地存在着的，所以运动稳定性的问题有很重要的理论意义与实际意义．这也正是近年来稳定性理论蓬勃发展的原因．

“稳定性”这个词起于源于力学．它刻划描述了一个刚体的运动的平衡状态．通常我们说某个刚体的平衡状态是稳定的，就是说这个刚体在受到干扰力的作用，并把它从原来的位置微微移动后，它仍然回到它原来的位置；反之，如果这物体不回到原来的位置，而趋于一个新的位置，我们就说这个平衡状态是不稳定的．最常见的一个例子就是单摆．它的一端固定于某一点，受到重力的作用．当固定点位于摆的重心之上时，单摆的平衡状态是稳定的（见图 1）；当固定点位于重心之下时，单摆的平衡状态就是不稳定的（图 2）．

对于上面所引进的平衡态的稳定性和不稳定性的概念，应注意两个基本要点．

1°．关于平衡态的稳定性或不稳定性，是根据在平衡位置附近所发生的运动之性质来判断的；

2°．对于稳定的平衡，必须是：只要适当地选取系统离开平衡位置的初始差值和初速度，就可以使这些差值在整个过程中总小于任意事先指定的小正数．当单摆的重心位于固定点的下方时，单摆的平衡态附近的运动就具有这种稳定的性质．而在图 2 所表示的

情况下，平衡态总是不稳定的．因为，只要摆偏离垂直位置，无论怎样选择它的初始条

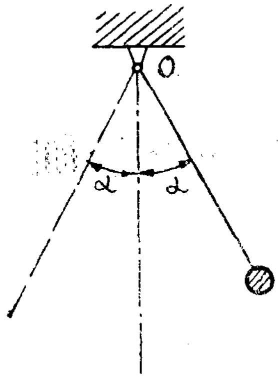

图 1

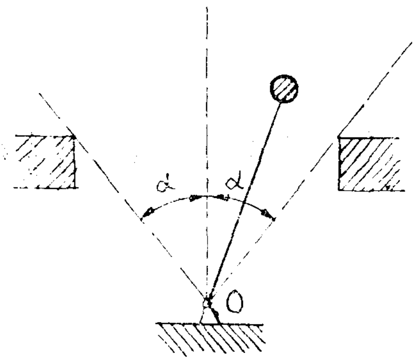

图 2

件，都不可能使单摆与平衡位置的差值小于某个予先给定的数值．

关于运动稳定性的概念，乃是平衡态稳定性的直接推广．

假如我们所考虑的动力系统可以用下列微分方程组来描述：

$$\frac{dy_i}{dt}=Y_i(t,y_1,\cdots\cdots,y_n)\qquad(i=1,2,\cdots,n),\tag{1.1}$$

其中 y_i 是某些与动动有关的参数，例如坐标和速度，或者一般地，它们是这些量的某些函数．

考虑这个系统的任何特殊运动．它对应于（1.1）的某个特解：$y_i=f_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$．我们称这个运动是**未受干扰的**，以区别于这个系统的其它的运动，后者，我们称为**受干扰的运动**．我们把受干扰的运动与未受干扰的运动关于量 y_i 的差值 $y_i(t)-f_i(t)$ 称为**扰动**或**干扰**．

定义．如果对于任意正数 ε，无论它多么小，总可以找到另一个正数 $\eta(\varepsilon)$，使得对于所有受干扰的运动 $y_i=y_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，只要在初始时刻 $t=t_0$ 满足不等式

$$|y_i(t_0)-f_i(t_0)|\leqslant\eta(\varepsilon)\qquad(i=1,2,\cdots,n),\tag{1.2}$$

就对于所有 $t\geqslant t_0$，满足不等式

$$|y_i(t)-f_i(t)|<\varepsilon\qquad(i=1,2,\cdots,n),\tag{1.3}$$

则称未受干扰的运动对量 y_i 是稳定的．

如果未受干扰的运动不是稳定的，则称为是不稳定的．

由此可知，如果存在某个固定的数 ε，对于无论多么小的数 η，即使只有一个受干扰的运动，它满足不等式（1.2），但在某一时刻，不等式（1.3）中即使只有一个变为等式，那么未被干扰的运动就是不稳定的．

但是也有这种情况，未被扰动的运动不但是稳定的，而且当初始扰动足够小时，随着时间 t 的无限增加，所有受干扰的运动都逐渐趋近于未受干扰的运动．这时，我们就说未被扰动的运动是**渐近稳定的**．

到目前为止，我们仅仅是把李雅普诺夫关于运动稳定性的基本概念和他的关于稳定、

不稳定以及渐近稳定的定义进行了陈述，但是还没有达到最终解决问题时所要求的那种定义形式．以上仅仅是问题的提出．

要对方程（1.1）来研究特解 $y_i=f_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 相对于量 y_i 的稳定性，一般说来比较困难．为此，我们对方程（1.1）进行坐标变换，令

$$x_i=y_i-f_i(t) \qquad (i=1,2,\cdots,n). \tag{1.4}$$

于是有

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt}&=\frac{dy_i}{dt}-\frac{df_i}{dt}\\&=Y_i(t,x_1(t)+f_1(t),\cdots,x_n(t)+f_n(t))\\&\quad-Y_i(t,f_1(t),\cdots,f_n(t)),\end{aligned}$$

即

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n). \tag{1.5}$$

这样一来，就可以将研究方程组的特解 $y_i(t)=f_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 的稳定性问题，化为研究系统（1.5）的平凡解 $x_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 的稳定性问题．于是就可以方便地运用现有的分析技巧来对（1.5）的平凡解 $x_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 的稳定性问题进行研究．

此时，不等式（1.2），（1.3）分别变成

$$|xi(t_0)|\leqslant\eta \tag{1.6}$$

及

$$|x_i(t)|<\varepsilon. \tag{1.7}$$

因而李雅普诺夫的稳定性定义可以由如下的方式进行表述：**如果对于任何正数 ε，无论它多么小，都可以选取另一正数 $\eta(\varepsilon)$，使得对于所有受干扰的运动，只要在初始时刻 t_0 时满足不等式**（1.6），**就在所有 $t>t_0$ 时满足不等式**（1.7），**则称**（1.5）**的未被扰动的运动 $x_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 是稳定的．反之，则称 $x_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 是不稳定的．**

如果未被扰动的运动 $x_i=0(i=1,2,\cdots,-n)$ 是稳定的，并且数 η 可选得如此之小，使得对于所有满足不等式（1.6）**的扰动运动，都满足条件**

$$\lim_{t\to+\infty}x_i(t)=0 \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

则称 $x_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是渐近稳定的．

从上述李雅普诺夫的稳定性定义中 可以看出它有下列几个特点：

1） 首先，李雅普诺夫稳定性概念是一个局部概念，它涉及到在被考虑的状态附近的特性，因此，初始扰动的范围较小，也就是 η 值较小．特别是对渐近稳定性而言，所要求的 η 值就更小；

2） 时间 t 的区间是无限长的〔t_0，$+\infty$〕；

3） 初始扰动的大小与初始时刻 t_0 的选取无关；

4） 在初始扰动之后无其它外界干扰；

5） 未被扰动运动与扰动运动服从于同一方程，而且对二者在同一时刻进行比较．

除了李雅普诺夫稳定性之外，还有其它形式的稳定性概念，读者可以参阅有关的书籍.

§2. 解决问题的方法

如果我们能够将所研究的扰动运动的微分方程的解求出来（即用积分的封闭形式表出），那么，对稳定性的研究也就没有困难了．但是，实际上大量工程和物理系统中所出现的微分方程，除了极个别的情况可积外，大部分都是不可积的．因此，A.M. 李雅普诺夫在他的著名论文"运动稳定性一般问题"中，提出了两种解决问题的方法，即所谓**第一方法**和**第二方法**.

第一方法就是大家所熟悉的幂级数展开法．为了详细了解,可参看秦元勋所著«运动稳定性问题讲义»一书[2]，或Γ.H.杜柏欣著的«运动稳定性的基本理论»一书[3].H.П. 叶鲁金[4]，总结了在1966年以前的有关李雅普诺夫第一方法的重要成果，并附有五十篇文献索引．我们在这里只着重讲述第二方法的基本内容，因为它已经发展成为今天解决常微分方程稳定性问题的基本方法.

李雅普诺夫第二方法，有时又称"**李雅诺夫直接法**"，它不需要寻求运动方程的特殊解．当把未被扰动运动的稳定性归结为平衡位置（即平凡解 $x_i=0$）的稳定性问题时，A. M. 李雅普诺夫将稳定性或者不稳定性与某些具有特殊性质的函数 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$（通常称为**李雅普诺夫函数**）的存在性联系起来．这个函数 V 的关于微分方程组的对时间的微商，具有某些确定的性质.

但是，李雅普诺夫函数的作用，决不局限于对稳定性或不稳定性的确定．李雅普诺夫函数方法还是研究自动调节系统的最有效的方法之一．对具体的非线性自动调节而言，适当地做出李雅普诺函数，就能解决一系列有重大实际意义的问题．例如，可以给出调节量变化的估计，调节度量的估计，过渡过程经过的时间（调节时间）的估计等. A.И. 鲁里叶及 A.M. 列托夫[5]的工作，有力地表明了应用李雅普诺夫直接法来解决自动调节理论中一些问题的显著成效．Φ.Γ. 甘特马赫及 B.A. 雅可柏维奇[6]对这一方面的工作作了进一步的总结．利用李雅普诺夫函数，可以估计经常作用的扰动的影响，可以解决大范围稳定性问题，即估计初始扰动的区域，使得随着时间的增加，其解不离开予先给定的区域．在某些情况下，用李雅普诺夫函数的方法可以用来解决在强迫振荡系统中有关周期解的存在性与唯一性，李雅普诺夫函数也可以用于最佳控制理论．总之，李雅普诺夫第二方法在科学的许多领域内都已经得到了很广泛的应用.

为了说明李雅普诺夫函数的思想实质，我们先看看下列的简单例题.

例1. 谐振动

设一物体M联结在两个弹簧中间，这两个弹簧是同样长的．在位置O处，物体处于平衡状态（图3(1)）．将物体M由平衡点向右方移过一个线段$x(>0)$，这时右方的弹簧被压缩，左方的的弹簧被拉长（图3(2)）．作用在这物体上的力f指向平衡点O．位移愈大，作用力也愈大．在这力的作用下，物体开始向平衡点方向运动，运动的速度逐渐增加．当它又回到平衡点时（图3(3)），作用力等于零，但物体M有一速度

$V_0(<0)$，使物体M通过平衡点继续向左运动．这时，左边的弹簧被压缩，右边的被拉长．于是，将有一个力$f(>0)$作用于M，它向右指向平衡点．当物体M未停止之前，这力将阻滞其运动．当物体M停止后，它立刻又开始向反方向，即指向平衡点附近振动．如果物体M开始时离开平衡位置很小，那么，物体M总在平衡点的很小近傍作周期性运动，所以平衡点是稳定的．以上是直观的描述．以下从理论上加以分析．设物体M的质量为m，于是由牛顿第二定律得出物体的运动方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=f=-kx$$

这里k是弹簧的弹性系数，m与k是二正数．引入符号

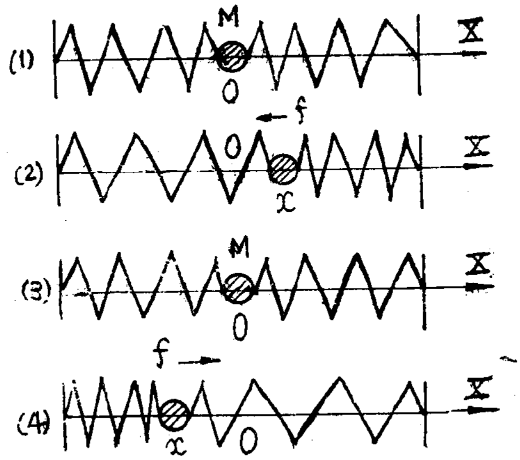

图 3

$$\omega^2=\frac{k}{m},$$

数ω称为物体振动的**圆频率**（亦称为角频率）．如果把圆频率标准化（即令$\omega^2=1$），上述的运动方程就简化为

$$\ddot{x}+x=0.$$

令$\dot{x}=y$，上述运动方程就化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-x.\end{cases}\tag{1.8}$$

这时，系统的总能量（的二倍）为

$$E(x,y)=(x^2+y^2).$$

因为

$$\frac{dE}{dt}=2x\dot{x}+2y\dot{y}=2xy-2xy=0,$$

这说明系统（1.8）是一个保守系统，而

$$E(x,y)=(x^2+y^2)=R^2\tag{1.9}$$

为其首次积分．

在相平面xy上，$E(x,y)=(x^2+y^2)=R^2$表示以原点为中心的同心圆族，其中R^2由初始位置x_0及初始速度$\dot{x}_0$决定，即$R^2=(x_0^2+\dot{x}_0^2)$．当初始位置与初始速度取得足够小时，运动总是在原点的足够小的邻域内，因此系统(1.8)的零解是稳定的．但是，显见它不是渐近稳定的．

我们可以取$V(x,y)=E(x,y)=(x^2+y^2)$．上面就是借助于这样的函数来研究

系统（1.8）的平凡解的稳定性问题的．我们指出，由于系统（1.8）极为简单，其积分曲线就是以原点为中心的一族同心圆，所以其稳定性问题可以直接得到．下面我们将举出例子说明，从系统本身不易直接得出稳定性的结论，而借助于一族闭曲线 $V(x,y)=C$ 来控制系统的相轨线的趋向，就可以非常巧妙地解决系统的稳定性问题．

例2．考虑动力系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-ax(x^2+y^2)\\ \dfrac{dy}{dt}=-x-ay(x^2+y^2),\end{cases}\qquad (a>0)\ . \tag{1.10}$$

此时取函数（1.9）作为李雅普诺夫函数，显然这时函数（1.9）对系统（1.10）而言，不一定再表示它的总能量．此时，求函数 $V(x,y)$ 沿（1.10）的相轨线关于时间 t 的全导数

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1.10)}&=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}\\&=2x[y-ax(x^2+y^2)]+2y[-x-ay(x^2+y^2)]\\&=-2a(x^2+y^2)^2=-2aV^2<0\,.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad -\frac{dV}{V^2}=2a\,dt\,,\quad \frac{1}{V}=2at+k_0\ \text{（任意常数）}$$

$$\therefore\quad V(x((t),y(t))=x^2(t)+y^2(t)=\frac{1}{2at+k_0}\,.$$

从而

$$\lim_{t\to+\infty}V(x(t),y(t))=0\,.$$

因为 $V(x,y)=x^2+y^2$，因此有

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=0\,,\quad \lim_{t\to+\infty}y(t)=0\,.$$

由 $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(1.10)}=-a(x^2+y^2)<0$，这说明封闭曲线族 $V(x,y)=x^2+y^2=c$ 沿着（1.10）的相轨线（按 t 增加的方向）在不断收缩，直至收缩到原点．换句话说，也就是（1.10）的相轨线随着 t 的增加由外向里地穿过每一条闭曲线 $V(x,y)=c$，最后趋于原点．实际上在我们这个问题中，函数（1.9）表示了在相平面上由（1.10）所描述的运动质点与原点之间的距离的平方．因此，$\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(1.10)}<0$ 就表示了这距离随着时间的增长在不断地缩小，并最后趋于零．

从以上两个例题可以看出：

1）当研究动力系统（由常微分方程组来描述）的稳定性时，可以不必去寻求它的特解与通解，而是构造一类具有特殊性质的函数，由这种函数来控制相轨线的动向，足以保证未被扰动运动的稳定性问题得到解决；

2）函数 V 有各种构造方法，一般说来应结合实际的物理背景来作出 V．我们今后称这类型的函数 V 为**李雅普诺夫函数**．

最后，我们对于解在整个t的正半轴上存在的问题，引进一些简单的讨论.

考虑自治系统

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(x_1,\cdots,x_n) \qquad (s=1,2,\cdots,n). \tag{1.11}$$

一般说来，总假定函数X_s在区域

$$|x_s|\leqslant h \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

内，关于$x_s(s=1,2,\cdots,n)$具有连续的一阶偏导数，且

$$X_s(0,0,\cdots,0)=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n).$$

这样就可以保证（1.11）有从任何初始时刻t和初始状态$x_{s0}(s=1,2,\cdots,n)$开始的唯一解. 实质上函数X_s关于变元x_s的李浦希兹条件就足以保证这一点. 不过，应当引起注意的是：局部的李浦希兹条件仅描述了解在点(t_0，x_{s0}）附近的性质，而由这一点并不能保证对任意大的t值，解都存在的结论.

例如考虑一阶微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(x)=x^2.$$

显见

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1+x_2|\cdot|x_1-x_2|\leqslant L(x_1,x_2)|x_1-x_2|.$$

因此，在初始状态的邻近可以找到一个常数，使李浦希兹条件成立. 但是要找到与x无关的常数却比较困难. 如果只就小范围来讨论，这时能保证在初始值（t_0,x_0）的邻近解的存在唯一性，但不能保证解在整个t的正半轴存在. 事实上，由分离变量法有

$$\frac{dx}{x^2}=dt, \quad \therefore \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x^2}=\int_{t_0}^{t}dt,$$

即

$$-\frac{1}{x(t,t_0,x_0)}+\frac{1}{x_0}=t-t_0.$$

从而

$$\lim_{t\to t_1}x(t,t_0,x_0)=\infty,$$

其中$t_1=t_0+\dfrac{1}{x_0}$. 由此看出，方程由初始点(t_0，x_0)（$t_0>0$，$x_0>0$）出发的解不可能在$[t_0,+\infty)$上延拓，除非状态$x(t_1,t_0,x_0)$有一个从$+\infty$到$-\infty$的“跳跃”，显见这不是动力系统工作的方式.

L.Markus[7] 对这种现象的看法是：微分方程的解在有限时间内要跑到无穷远处，说明了这个方程的解具有有限逸时（*finite escape time*）. 要避免这种现象的出现，我们只要假定方程的右端在所考虑的定义域上，一致地满足李浦希兹条件，即：

$$|X_s(x_1,\cdots,x_n)-X_s(y_1,\cdots,y_n)|\leqslant L\sum_{s=1}^{n}|x_s-y_s|,$$

其中L是与变量$x_s(s=1,2,\cdots,n)$无关的大于零的常数.

事实上，假定$x_s=\varphi_s(t;t_0,x_{s0})$（$s=1,2,\cdots,n$）是（1·11）的任一解，因此有

$$\varphi_s(t;t_0,x_0)=x_{s0}+\int_{t_0}^{t}X_s(\varphi_1(t;t_0,x_{s0}),\ \cdots,\ \varphi_n(t;t_0,x_{s0}))dt\ ,$$

$$\therefore\quad |\varphi_s(t;t_0,x_{s0})|\leqslant|x_{s0}|+\int_{t_0}^{t}|X_s(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)|\,dt$$

$$\leqslant|x_{s0}|+L\int_{t_0}^{t}\sum_{s=1}^{n}|\varphi_s(t;t_0,x_{s0})|\,dt.$$

$$\therefore\quad \sum_{s=1}^{n}|\varphi_s(t;t_0,x_{s0})|\leqslant\sum_{s=1}^{n}|x_{s0}|+nL\int_{t_0}^{t}\sum_{s=1}^{n}|\varphi_s(t;t_0,x_{s0})|\,dt.$$

根据 *Grownwall—Bellmam*[8] 不等式，就有

$$\sum_{s=1}^{n}|\varphi_s(t;x_{10},\cdots,x_{n0},t_0)|\leqslant\left(\sum_{s=1}^{n}|x_{s0}|\right)e\,x\,p\,nL(t-t_0).$$

从这里立即可以看出 $x_s=\varphi_s(t;t_0,x_{s0})$ 在任何有限时刻 t 都不会跑到无穷远处，也就是说在李浦希兹常数 L 与变量 $x_s(s=1,2,\cdots,n)$ 无关的假定下，就可保证方程之解不会出现“有限逸时”的现象.

§3. 基 本 定 义

1） 定号、常号、变号函数

下面我们将要考虑定义在坐标原点邻域内的连续函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$. 我们假定它是单值的，$V(0,0,\cdots,0)=0$，且有连续的偏导数.

定义1.1. 函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$ 称为是定号的（正定的或负定的），如果当

$$|x_s|\leqslant h\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{1.12}$$

（h 是足够小的正数）时，它只能取具有固定符号的值，且只在 $x_1=x_2=\cdots x_n=0$ 时，它才为零.

定义1.2. 函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$ 称为是常号的（正的或负的），如果它在区域(1.12)内只能取具有一定符号的值，但它可以在 $\sum_{s=1}^{n}x_s^2\neq 0$ 时取零值.

定义1.3. 函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$ 称为变号的，如果它既不是定号的，也不是常号的，也就是说，无论数 h 多么小，它在区域（1.12）内既可取到正的值，也可取到负的值.

例如在三维欧氏空间内，函数

$$V(x,y,z)=x^2+y^2+z^4$$

是正定的；

$$V(x,y,z)=2x^2+z^2$$

是常正的；

$$V(x,y,z)=x^2+5y^2-z^4$$

是变号的.

通常取二次型作为李雅普诺夫函数，这是用得最广泛的一种. 因此对怎样保证二次型是正定的（或负定的）一些判定准则，对我们来说是很重要的. 近年来，在文献上都爱用矩阵形式来表示二次型，因为用矩阵形式来表示有很显著的优点.

令 $$2V(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$
是一个二次型. 用x表示一个n行一列的矩阵，x'表示x的转置阵；$A=(a_{ij})$ 表示一个$n\times n$阶的方阵，A'表示A的转置阵. 这样一来，

$$2V(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=x'Ax.$$

因此我们就可以把二次型的定号性用方阵A来表示.

定义1.4. 方阵A称为正定的，如果二次型 $x'Ax$ 是正定的. 简单的用$A>0$来表示.

定义1.5. 方阵A的特征值就是多项式

$$det(A-\lambda I)=|A-\lambda I|=|a_{ij}-\delta_{ij}\lambda|$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}$$

的根，其中I是单位矩阵，而

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

是克朗涅克符号.

性质1. 正定矩阵总是可逆的.

证. 事实上存在无穷多个行列式不为零的线性变换

$$y_s=k_{s1}x_1+k_{s2}x_2\ \cdots+k_{sn}x_n \qquad (s=1,2,\cdots,n),$$

将V变换成

$$V(y_1,\cdots,y_n)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中$\lambda_i=\lambda_i(A)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 都大于零. 故特征方程没有零根，即 $det(A-\lambda I)|_{\lambda=0}=det\ A\neq 0$，故$A$可逆.

性质2. 当A与B都是对称矩阵时，则

$$\lambda_i(AB)=\lambda_i(BA).$$

证. $\because$ $A=A'$, $B=B'$, $\therefore$ $(AB)'=B'A'=BA$.

于是有

$$|AB-\lambda I|=|(AB)'-\lambda I|=|BA-\lambda I|,$$

即

$$\lambda_i(AB)=\lambda_i(BA).$$

定理3.1. 矩阵A是正定的，当且仅当以下三个条件之一成立即可：

(1) **存在一个非奇异的矩阵B，使得$B'B=A$；**

(2) **对一切i，有$\lambda_i(A)>0$** $(i=1,2,\cdots,n)$；

(3) A **的所有主要行列式都是正的.**

条件 (3) 就是著名的 *Sylvester* **定理.**

A是负定的充要条件，即A的所有主子式之正负号是依次相间，但第一个主子式总是负的. 本定理的详细证明可参阅Φ. P. 甘特马赫著《矩阵论》一书[9].

2) 定号函数的几何意义.

为了简单起见，我们考虑具有三个变量的正定函数 $V(x,y,z)$，对于 n 个变量的情形，同样可以证明. 我们考虑曲面

$$V(x,y,z)=c, \tag{1.13}$$

其中 $c>0$ 是常量. 在 $c=0$ 时，由于 $V(x,y,z)$ 的定号性，有 $x=y=z=0$，于是曲面就蜕化为坐标原点. 下面就来证明：当 c 是够小时，(1.13) 是一个围绕坐标原点的封闭曲面.

为此，我们来证明：由坐标原点出发到区域 (1.12) 的边界上任一点的任何连续曲线，一定和曲面 (1.13) 相交，只要数 c 不超过一个只与 h 有关的足够小的正数 l 的话（见图 4）.

事实上，设 l 是函数 V 在区域(1.12)的边界上之下确界，因而在这个边界上我们有

$$V(x,y,z)\Big|_{(1.12)\text{边界}}\geqslant l.$$

由于 $V(x,y,z)$ 的连续性，等号是能取到的. 数 l 显然不等于零，而且是正的. 现在我们考虑任意的连续曲线，它由坐标原点出发并引至区域 (1.12) 的边界，并沿着这条曲线来看函数 V 的变化. 在曲线的起点（即坐标原点）V 取零值，而在曲线的终点，V 取某个不小于 l 的数. 因为函数 V 沿着这条曲线是连续变化的，所以只要取 $0<c<l$，V 在这条曲线上的某一点就必然要取到数值 c. 换句话说，这条曲线必然要和曲面 (1.13) 相交. 因此，当 c 值足够小时，所有曲面 (1.13) 都是封闭的，并且包围坐标原点. 如果现在我们把 c 的值由零变化到某一足够小的数值，那么我们就得到一族封闭的、彼此不相交的（由于 V 的单值性）曲面，它们包围坐标原点. 当 $c=0$ 时，曲面蜕化成一个点，即坐标原点.

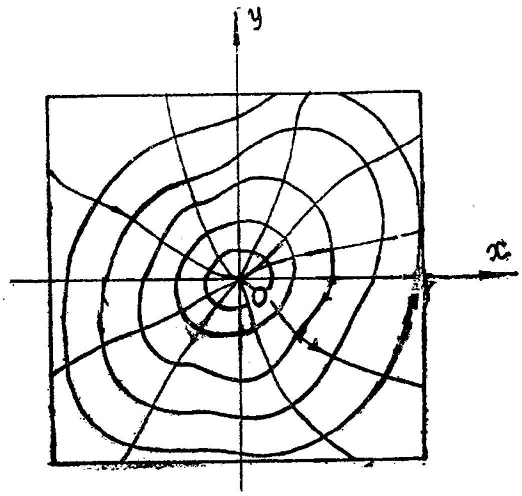

图 4

3) 稳定性、不稳定性、渐近稳定性定义.

在今后的讨论中，如果不做特殊的声明，我们都是针对 (1.11) 所描绘的动力系统而言的. 因此，总假定函数 $X_s(x_1,\cdots,x_n)$ 在区域

$$|x_s|\leqslant H \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{1.14}$$

内是连续的，且使得方程 (1.11) 对于每一组在区域 (1.14) 内的初始值 x_{s0}，有且只有唯一解 $x_s(t)$，且总假定 $X_s(0,0,\cdots,0)=0$ $(s=1,2,\cdots,n)$.

定义1.6. 如果对于任意正数 ε，无论它多么小，总可以找到另一个正数 $\eta(\varepsilon)$，使得对于所有受干扰的运动，当其在初始时刻 t_0 满足不等式

$$|x_s(t_0)|\leqslant\eta \tag{1.15}$$

时，就在所有的 $t>t_0$ 时满足不式

$$|x_s(t)|<\varepsilon, \tag{1.16}$$

则我们称未被扰动的运动 $x_s=0$ ($s=1,2,\cdots,n$) 是稳定的. 反之，则称未被扰动运动是不稳定的.

定义1.7. 如果未被扰动运动是稳定的，并且数 η 可以选得如此之小，使得对于所有满足不等式 (1.15) 的扰动运动 $x_s(t)$ ($s=1,2,\cdots,n$)，均满足条件

$$\lim_{t\to+\infty}x_s(t)=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n),$$

则称未被扰动的运动是渐近稳定的.

§4. 稳定性的基本定理

1) 关于稳定性的李雅普诺夫定理

在考虑函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$ 的同时，我们还考虑它对于时间 t 的全导数. 这些导数是基于下列假定作出的，即 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是时间的函数，它们满足 (1.11). 在这样的假定下，V 对于时间 t 的全导数为

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\frac{dx_s}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s(x_1,\cdots,x_n)$$
$$=W(x_1,\cdots,x_n). \tag{1.17}$$

因而 $\frac{dV}{dt}$ 也是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数，且在 $x_s=0$ ($s=1,\cdots,n$) 取零值.

定理4.1. 如果对于扰动运动的微分方程

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(x_1,\cdots,x_n), \tag{1.11}$$

可以找到一个定号函数 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，它关于时间 t 的，由这些方程所构成的全导数 (1.17) 是常号函数，且其正负号与 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 相反，或者恒等于零，则未被扰动的运动 $x_s=0$ ($s=1,2,\cdots,n$) 是稳定的.

证. 不妨假设 $V(x_1,\cdots x_n)$ 是正定的函数，因而在区域

$$|x_s|\leqslant h\leqslant H \tag{1.18}$$

的所有点，除了坐标原点外，V 只能取正值. 在同一个区域内，根据定理的条件，有不等式

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s(x_1,\cdots,x_n)\leqslant 0, \tag{1.19}$$

设 ε 是一个小于 h 的任意小的正数，以 x 表示数 $|x_s|$ ($s=1,2,\cdots,n$) 中之最大者，即令

$$x=max\{|x_1|,\cdots,|x_n|\}.$$

考虑由边长为 2ε 的 n 维正方体的表面所构成的点集

$$x = \varepsilon. \tag{1.20}$$

显然，这是一个闭集. 设 l 是函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 在此闭集上的下确界，因而在 $x=\varepsilon$ 上有 $V(x_1, \cdots, x_n) \geqslant l > 0$. 这是因为 V 是正定的和连续的，所以在闭集合 $x=\varepsilon$ 上可以达到下确界.

现考虑方程（1.11）的任一解 $x_s(t)$，设其初始值 $x_s(t_0)=x_{s0}$ 在区域

$$|x_{s0}| \leqslant \eta \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{1.21}$$

内，这里，我们假定 η 小于 ε，而且它是如此之小，使得

$$V(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0}) < l.$$

这样选取 η 当然是许可的，因为 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 是连续函数， $V(0,\cdots,0)=0$. 将解 $x_s(t)$ 代入函数 V 之中，得到一个依赖于时间 t 的函数，根据（1.19）式，只要 $x_s(t)$ 在区域（1.18）内时，它是不上升的. 因此，对于 $x_s(t)$ 尚在区域（1.18）内的所有时间 t，都有

$$V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \leqslant V(x_{10}, \cdots, x_{n0}) < l. \tag{1.22}$$

由此可以直接得出，对所有的 $t > t_0$，有不等式

$$|x_s(t)| < \varepsilon, \tag{1.23}$$

事实上，因为 $\eta < \varepsilon$，根据 $x_s(t)$ 的连续性，不等式（1.23）至少对足够接近于 t_0 的 t 值是成立的. 如果这些不等式在某时刻不成立了，那么必然有这样的时刻 $t=T$，此时量 $x_s(T)$ 中至少有一个在数值上达到 ε. 换句话说，必然存在这样的时刻 $t=T$，此时条件（1.20）被满足. 因而根据 l 是函数 V 在 $x=\varepsilon$ 上的下确界，就有

$$V(x_1(T), \cdots, x_n(T)) \geqslant l.$$

不过这是不可能的，因为 $\varepsilon < h$，集合（1.20）在区域（1.18）之内，因而在 $x=\varepsilon$ 上，必然要满足不等式

$$V(x_1(T), \cdots, x_n(T)) \leqslant V(x_{10}, \cdots, x_{n0}) < l.$$

因此，对于所有扰动运动微分方程的解，如果它们满足不等式（1.21），那么对所有的 $t > t_0$，也就满足不等式(1.23). 这就证明了未被扰动的运动 $x_s=0$ $(s=1,2,\cdots,n)$ 的稳定性.

上述证明的方法，也指出了给定 ε 后，如何来确定初始扰动范围 η 的方法：

(1) 给定数 ε，确定函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 在 $x=\varepsilon$ 上的下确界 $l(\varepsilon)$;

(2) 根据数 $l(\varepsilon)$ 决定 $\eta(\varepsilon)$，使得在满足 $|x_{s0}| \leqslant \eta(\varepsilon)$ 时，有

$$V(x_{10}, \cdots, x_{n0}) < l.$$

2) 关于渐近稳定性的李雅普诺夫定理.

定理4.2. 如果对于扰动运动的微分方程

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \cdots, x_n) \qquad (s=1,2,\cdots,n), \tag{1.11}$$

可以找到定号函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$，它对于时间 t 的由（1.11）构成的全导数也是定号函数，但是其正负号与 V 的正负号相反，则未被扰动运动 $x_s=0$ $(s=1,2,\cdots,n)$ 是渐近稳定的.

证．不失普遍性，仍假定 $V(x_1,\cdots,x_n)$ 是正定的，从而$\frac{dV}{dt}$是负定的．因此，在区域

$$|x_s|\leqslant h\leqslant H \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

内满足

$$V(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0,\ \frac{dV}{dt}\leqslant 0,$$

其中等号只在 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 时成立．

设 $0<\varepsilon<h$，根据前面定理4.1知未被扰动运动 $x_s=0$ $(s=1,2,\cdots,n)$ 是稳定的，所以任给 $\varepsilon>0$，可找到 $\eta=\eta(\varepsilon)$，使得对于（1.11）的任一解 $x_s(t)$ $(s=1,2,\cdots,n)$，只要在初始时刻 t_0 满足不等式

$$|x_{s0}|=|x_s(t_0)|<\eta(\varepsilon) \qquad (s=1,2,\cdots,n), \tag{1.24}$$

就对所有 $t>t_0$，满足不等式

$$|x_s(t)|<\varepsilon \qquad (s=1,2,\cdots,n).$$

现在要进一步证明

$$\lim_{t\to+\infty} x_s(t)=0 \qquad (s=1,2,\cdots,n). \tag{1.25}$$

只要证明了这一点，也就证明了未被扰动运动 $x_s=0\,(s=1,2,\cdots,n)$是渐近稳定的．

事实上，因为所讨论的解对所有的 $t>t_0$ 总在区域（1.18）内，于是，根据定理的条件可知，函数 $V(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$ 对于时间 t 的导数 $\frac{dV}{dt}$ 对所有时间 t 都取负值（不可能取零值）．这个结论是由于解 $x_s(t)$ $(s=1,2,\cdots,n)$ 对任何 t 值都不能同时变为零．因为，如果这种情况在某一时刻 $t=T$ 时发生，那末取 T 为初始时刻，我们就得到方程（1.11）的具有零初始条件的两个不同的解：即所讨论的解 $x_s(t)$ 和平凡解 $x_s=0$ $(s=1,2,\cdots,n)$．而这是不可能的，因为方程（1.11）在给定的初始条件下只能有一个解．

由于导数$\frac{dV}{dt}$对所有的时刻 t 总是取负值，故函数 $V(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 是单调减少的，而当 $t\to+\infty$时，它就必然趋近于某一个极限 α，而在所有的时刻 t，$V(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 都大于这一个极限值，即

$$V(x_1(t),\cdots,x_n(t))>\alpha. \tag{1.26}$$

下面我们来证明 $\alpha=0$．

用反证法．假定 $\alpha\neq 0$，于是根据 V 的正定性，有 $\alpha>0$．因为 V 是连续函数，由（1.26）得出

$$x(t)=max\{|x_1(t)|,\cdots,|x_n(t)|\}>\beta,$$

其中 β 是某个正数．但因为$\frac{dV}{dt}$是负定的函数，于是在闭集 $\beta\leqslant x\leqslant h$ 上，函数 $\frac{dV}{dt}$ 可取到其上确界，即

$$\frac{dV}{dt}\leqslant -b,$$

其中 b 也是一个正数. 所以，对所有的 $t>t_0$，我们有不等式

$$V(x_1(t),\cdots,x_n(t))=V(x_1(t_0),\cdots,x_n(t_0))+\int_{t_0}^{t}\frac{dV}{dt}dt,$$

$$\leqslant(x_1(t_0),\cdots,x_n(t_0))-b(t-t_0). \qquad (1.27)$$

但显然这是不可能的，因为对足够大的 t 值，这个不等式的右端是负的. 这就违反了 $V(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 是正定的条件. 因此我们得到结论

$$\lim_{t\to+\infty}V(x_1(t),\cdots,x_n(t))=0.$$

再根据 V 的定号性，就得到（1.25），定理证毕.

注：对于方程（1.11）的满足条件（1.25）. 的解，其初始值 $x_{s0}(s=1,2,\cdots,n)$ 的最大区域称为**渐近稳定性的区域**或**吸引域**.

3） 基本定理的几何解释.

上述两个基本定理有着简单的几何解释. 这种解释不仅阐明了定理的基本内容，而且在解决许多工程技术问题时，有其广泛的应用.

先考虑李雅普诺夫的第一定理（即定理4.1）.假设存在定号函数 $V(x_1,\cdots,x_n)$（为了简单起见，我们在这里假设 $n=3$），其导数 $\frac{dV}{dt}\leqslant 0$. 作出曲面族

$$V(x_1,x_2,x_3)=c, \qquad (1.28)$$

其中 c 是一个正的参数，在从零到某一足够小的值之间变化. 正如我们在前面已指出的那样，曲面族（1.28）是封闭的，它们包围坐标原点，并在 $c=0$ 时收缩到原点. 如果 $c_1<c_2$，那么曲面 $V=c_1$ 完全位于曲面 $V=c_2$ 之内.

考虑方程（1.11）的任一积分曲线，它在初始时刻由坐标原点附近的任一点出发，这条相轨线在 t 增长时，无论在什么时刻都不会由里向外通过曲面族（1.28）事实上，如果在某一点发生了这样的情况，那么在这一点，函数 $V(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))$ 必然具有正的导数. 因为，由（1.28）中的任一曲面过渡到另一曲面，且当后着包围前着时，函数 $V=(x_1,x_2,x_3)$ 是增加的. 因此，如果任一积分曲线在初始时刻是在(1.28)的某一曲面内，那么在后来的所有时刻，它也一定在该曲面之内. 但当 c 足够小时，曲面（1.28）包含着足够小的坐标原点的邻域，由此可直接得出未被扰动运动的稳定的结论.

根据上面简单的几何解释，可以给出根据数 ε 来确定 $\eta(\varepsilon)$ 的方法. 为此，我们考虑完全位于边长为 2ε 的立方体内的曲面族（1.28）中的最大曲面. 设这个曲面是 $V=l$. 这里 l 是函数 V 在 $x=max\{|x_1|,|x_2|,|x_3|\}=\varepsilon$ 上的下确界. 再作边长为 2η 的立方体，使它完全位于上述曲面之内. 于是任何由这立方体内起始的连续的积分曲线，也就是初始值满足

$$|x_{s0}|\leqslant\eta \qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

的相轨线，将永远在曲面 $V=l$ 之内. 因而也总在边长为 2ε 的立方体之内. 这就具体地给出了如何根据给定的 ε 值来确定 η 值的方法.