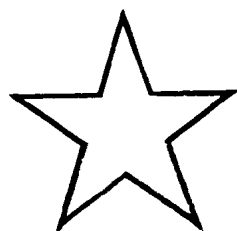


幾何三角



中國人民解放軍軍事學院

1952

幾何三角

江苏工业学院图书馆
藏书章

中國人民解放軍軍事學院文化外語教授會編

幾何三角編輯大意

(一) 基本方針：

本課本針對學員的水平和學習現代化正規化軍事科學的需要；并根據速成的聯系部隊實際的正規的總方針，進行編寫。

(二) 基本原則：

- (1) 例題和習題，都選用有關軍事和現實生活的題材。并以陸軍需要為主，海空軍需要為輔。
- (2) 爲了教懂教通能使學員運用，因之說明原理和證明原理，都先從分析實例着手。由具體到抽象同時結合實物教學，爲編寫的努力方向。
- (3) 材料質量，掌握少而精的原則，並以深入淺出，語文通俗爲編寫的必要條件。每節課規定一習題，即一小時講授，一小時作習題，當堂總結，不使學員有課外負擔。

(三) 內容中心重點

(1) 簡易幾何方面：

- (a) 幾種簡單幾何圖形的作圖法。
- (b) 相似三角形。

(2) 三角方面：

- (a) 用正切，餘切，餘弦，正弦法解直角三角形，主要在求高度，距離和角值。
- (b) 對數表檢查法。
- (c) 用坐標方法，求任何一個未知點的位置。
- (d) 用正弦定律解前方交會法，測地三角網，及已知二點間的距離和方向測高。
- (e) 用正切定律解三點法。
- (f) 用半角定律求砲目高低角。

(四) 特點：

- (1) 幾何專列成章，凡三角上須用的作圖，定理，和密位公式等，都詳細

寫出來，能結合三角須要。

(2) 幾何講解，全部用實物教學。

(3) 三角部份全用蘇聯60—00制（密位寫法照蘇聯制「一」寫在百位數與十位數之間）。合乎現在器材的需要，至於各制（蘇聯，英，美，和日本制）間的換算法，也介紹出來。

(4) 用坐標方法，解任意三角形，求出任何一個未知點的坐標，結合地圖講解，與軍事有聯系，且又實用。

(5) 習題中加演標準例題，以資示範和提示。又習題中有研究題，教員可視具體情況，擇題選作；可照顧程度高的學員。

(6) 本課本疑難問題，都有附註，幫助教員進一步了解。

(7) 本課本得砲兵和海軍教授會幫助很多。

（五）本課本的教學時間：

(1) 幾何部份，講授時間42小時，複習考試共4小時。

(2) 三角部份，講授時間136小時，複習考試共8小時。

最後，本課本編輯準備工作約一個月，編寫工作約一個月，因時間匆促，聯系近代化聯合兵種作戰情況的算題還嫌不夠，希望大家隨時提供意見，以備今後修正。

簡易幾何目錄

第一章 簡單的幾何圖形和作圖法

§ 1. 幾何學的概念	(1)
§ 2. 直線	(1)
§ 3. 角	(2)
§ 4. 角的種類	(2)
§ 5. 圓與圓周率	(4)
§ 6. 角的單位	(5)
§ 7. 不同制度的單位換算	(8)
§ 8. 作圖法(一)	(10)

第二章 直線形和角用弧度量

§ 9. 三角形	(15)
§ 10. 三角形有關的幾個定理	(16)
§ 11. 不等線和不等邊	(18)
§ 12. 相似三角形	(19)
§ 13. 利用相似三角形測量高度和距離	(23)
§ 14. 密位公式	(27)
§ 15. 作圖法(二)	(30)
§ 16. 多邊形	(33)
§ 17. 角用弧度量	(34)

第三章 面積和體積

§ 18. 面積的意義和單位	(38)
§ 19. 矩形面積的計算	(38)

§ 20. 平行四邊形面積的計算	(39)
§ 21. 三角形面積的計算	(39)
§ 22. 梯形面積的計算	(40)
§ 23. 商高定理	(41)
§ 24. 圓面積的計算	(43)
§ 25. 扇形面積的計算	(44)
§ 26. 體積的單位	(44)
§ 27. 正方體和長方體體積的計算	(45)
§ 28. 圓柱體體積的計算	(47)
§ 29. 圓錐體體積的計算	(48)
§ 30. 球體積的計算	(48)

三角學目錄

第一章 銳角三角函數

§ 1. 間接量度法	(51)
§ 2. 正切	(52)
§ 3. 正弦和餘弦	(54)
§ 4. 銳角三角函數	(56)
§ 5. 諸函數間的基本關係	(58)
§ 6. 特別角的三角函數	(62)
§ 7. 密位三角函數本值表的檢查法	(66)
§ 8. 角度三角函數真數表的檢查法	(69)
§ 9. 測量問題中幾個術語的說明	(71)
§ 10. 三角函數的應用	(73)

第二章 對 數

§ 11. 對數的意義	(79)
§ 12. 對數的性質	(80)
§ 13. 常用對數	(83)
§ 14. 定位部和定值部	(84)
§ 15. 定位部求法的法則	(85)
§ 16. 自然數(常用)對數表的檢查法	(87)
§ 17. 對數的應用	(89)
§ 18. 密位三角函數對數表的檢查法	(91)
§ 19. 角度三角函數對數表的檢查法	(95)
§ 20. 直角三角形的對數解法	(98)

第三章 坐標和任意角三角函數

§ 21. 坐標的概念	(103)
§ 22. 象限	(104)
§ 23. 定點	(105)
§ 24. 點的坐標看讀法	(106)
§ 25. 坐標差	(107)
§ 26. 方位角	(108)
§ 27. 任意角三角函數	(110)
§ 28. 化任意角三角函數爲銳角三角函數	(113)
§ 29. 任意角三角函數的對數	(116)
§ 30. 負角的三角函數	(117)
§ 31. 求方位數和距離	(118)
§ 32. 已知方位數, 距離和一點, 求未知點的坐標	(121)
§ 33. 導線法	(124)

第四章 任意三角形解法

§ 34. 正弦定律	(131)
§ 35. 正弦定律的應用	(132)
§ 36. 二角和的函數	(150)
§ 37. 二角差的函數	(155)
§ 38. 倍角函數和半角函數	(157)
§ 39. 正切定律	(159)
§ 40. 正切定律的應用	(161)
§ 41. 半角定律	(178)
§ 42. 半角定律的應用	(180)
§ 43. 餘弦定律的應用	(184)

簡易幾何學

第一章 簡單的幾何圖形和作圖法

§ 1. 幾何學的概念：

體：物品，如書等，在空間都佔有一定的部份，這有限的部份叫做體或立體。

面：物體表面與空氣接觸的部份叫做面。

平坦的面，如書的上下前後左右六個面，叫做平面，如 $ABEF$ ， $ACDB$ 等。面有長短，寬窄，而沒有厚薄。

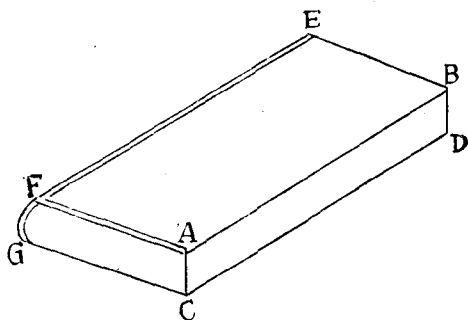
線：面與面的交界叫做線，如書的邊 AB ，

CD 等。線只有長短，而沒有寬窄和厚薄。

點：線與線的交界或線的盡頭叫做點，如書的角尖 A 點， B 點等。點只有位置，而沒有長短，寬窄和厚薄。

點、線、面、體，或其中任意幾種集合而成的圖形叫做幾何圖形。

研究幾何圖形的性質的科學，就叫幾何學。



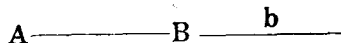
(圖 1)

§ 2. 直線

拉緊的繩子，平面與平面的交界，直尺的邊緣都可看做直線，定長直線的兩端，常用大寫英文字母標示如

AB ，但亦可用小寫英文字母標示如

“ b ”，它的長叫做 A 與 B 間的距離。



(圖 2)

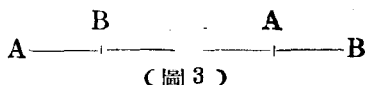
幾 何 三 角

直線可以任意延長，假使說延長 AB，就是從 B 點起向外延長；延長 BA，就是從 A 點起向外延長。

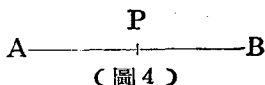
直線的長度為量的一種，故可以加減如：

$$AP + PB = AB$$

$$AB - PB = AP$$



(圖 3)



(圖 4)

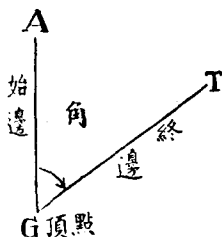
§ 3. 角：

設砲位在點 G，砲口對向原點 A，成 GA 直線，而後砲口漸漸轉動，對準目標 T，成 GT 直線，這樣所成的圖形叫做角。(如圖 5)

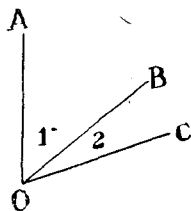
GA 和 GT 叫做角的邊；GA 為開始旋轉時所在的位置，叫做始邊，GT 為 GA 旋轉終止時的位置，叫做終邊。邊繞以旋轉的 G 點，叫做頂點。

角的記號是 $\angle$ ，圖中的角可以記成 $\angle AGT$ 或 $\angle TGA$ ，把頂點的一個字母放在中間。單獨的一個角，亦可以祇記頂點的文字，如 $\angle G$ 。但是如圖 6 中的 $\angle AOB$ 和 $\angle BOC$ ，不能記作 $\angle O$ ，如要求簡略，可在角的裏面記一小數字，如 $\angle 1$ 同 $\angle 2$ 。若單記 $\angle O$ ，通常是指以 O 做頂點的最大角，即 $\angle AOC$ 。

角的大小，由直線所轉的量而定，同邊的長短無關。



(圖 5)



(圖 6)



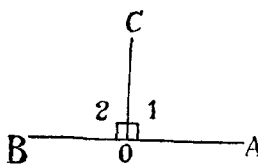
(圖 7)

§ 4. 角的種類：

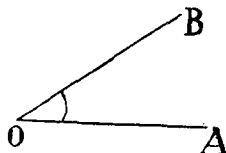
依角的大小不同，角區分為下面幾種：

第一章 簡單的幾何圖形和作圖法

- (1) 平角：一角的終邊，旋轉停止于其始邊反對的方向，即成一條直線時，這角叫做平角，如 $\angle AOB$ 。(圖7)
- (2) 直角：等於半個平角的角，叫做直角，如 $\angle 1, \angle 2, \angle POQ$ 。(圖8)
- (3) 銳角：小於直角的角，叫做銳角，如 $\angle AOB$ 。(圖9)
- (4) 鈍角：大於直角而小於平角的角，叫做鈍角。如 $\angle COD$ (圖10)

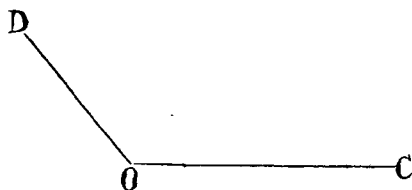


(圖8)

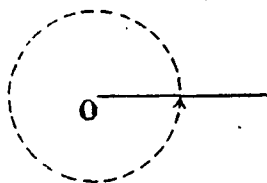


(圖9)

- (5) 周角：角的終邊，旋轉一週和始邊重合一起所成的角，叫做周角，如 $\angle O$ 。(圖11)

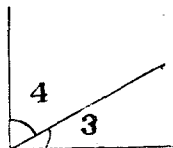


(圖10)

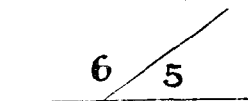


(圖11)

- (6) 餘角：兩角的和等於一直角時，這兩角互為餘角，如圖12， $\angle 3$ 是 $\angle 4$ 的餘角； $\angle 4$ 是 $\angle 3$ 的餘角。



(圖12)

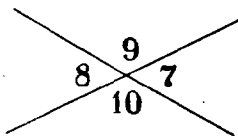


(圖13)

- (7) 補角：兩角的和等於一平角時，這兩角互為補角，如圖13， $\angle 5$ 是 $\angle 6$ 的補角； $\angle 6$ 是 $\angle 5$ 的補角。

- (8) 對頂角：兩直線相交所成的四個角中，相對的兩個角，叫對頂角，如圖14， $\angle 7$ 同 $\angle 8$ 是對頂角， $\angle 9$ 同 $\angle 10$ 是對頂角。

用量角器試量，是否 $\angle 7 = \angle 8$ ， $\angle 9 = \angle 10$ 。



(圖14)

習題

1. 什麼是幾何圖形？
2. 舉出一些常見物品的名稱來，其表面是平面的。
3. 從常見的物品中，舉出幾個直線的例子。
4. 什麼樣的圖形叫做角？角的什麼部份叫做頂點？叫做邊？
5. 角的大小根據什麼來決定？和邊的長短有沒有關係？
6. 畫出下面各角：

$\angle AOB$ 為銳角， $\angle POQ$ 為鈍角， $\angle O$ 為直角。

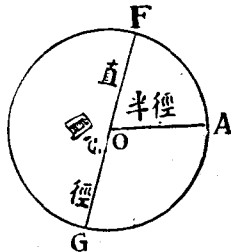
7. 研究下面敘述對不對：

- (i) 相鄰二角若互為餘角，則二角的和為一直角。
- (ii) 如相鄰二角的外邊成一直線，則此二角互補。
- (iii) 如二相鄰的角互補，則其外邊成一直線。

8. 對頂角是否相等？

§ 5. 圓與圓周率：

圓：取線段 OA ，固定 O 點，使 OA 繞 O 點旋轉一週而成的平面形叫做圓，圍成一圓的曲線叫做圓周，但通常圓周也可以稱做圓。其固定的一點 O 叫做圓的中心，或簡稱圓心。圓心同圓周上任意一點的距離叫做半徑；一圓中所有半徑都相等。通過圓心而兩端各到圓周為止的直線叫做直徑，如 FOG ；一圓所有的直徑都相等。



(圖15)

弧：圓周的任意一部份叫做弧。弧的

記號是“ $\frown$ ”，弧 AB 記作 $\widehat{AB}$ 。

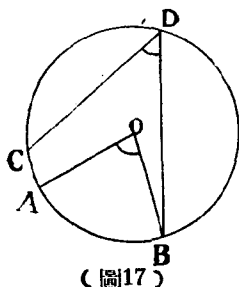
弦：連接圓上任何兩點的直線叫做弦，如 AB。

割線：交圓周於兩點的直線，叫做割線，如 CD。

切線：同圓周相遇於一點的直線，叫做切線，如圖中的 EF。這唯一的相遇點，叫做切點，如圖中的 G。

圓心角：頂點在圓心上，兩半徑為邊的角，叫做圓心角，如圖 17 中的 $\angle AOB$ 。

圓周角：頂點在圓周上的一點，兩弦為邊的角叫做圓周角，如圖 17 中的 $\angle CDB$ 。



(圖17)

圓周率：我們把任何圓形的物品，如面盆，砲口，茶杯等的圓周和直徑量出來，就知道圓周與直徑的比，比值是一個定數，近似 3.1416，即圓周是直徑的 3.1416 倍。這個固定的比值，叫做圓周率，常以“ π ”表示，如設圓周為 C，直徑為 d，半徑為 r，則

$$\pi = \frac{\text{圓周的長}}{\text{直徑的長}} = \frac{C}{d} = 3.1416。$$

$$C(\text{圓周長}) = \pi d = 2\pi r$$

【例】高射砲在 3000 公尺高的有效射擊圈，其半徑為 1500 公尺，問圓周長是多少？

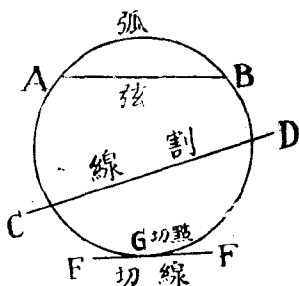
【解】 $C = 2\pi r = 2 \times 3.1416 \times 1500 = 9424.8$ (公尺)

答：有效射擊圈周長是 9424.8 公尺

§ 6. 角的單位：

量角的單位有下面幾種制度：

(1) 六十分制：把圓周分為三百六十等分，每等分所對的圓心角，如圖 18 中的 $\angle AOB$ ，定為量角的單位，叫做 1 度，所以 1 周角等於 360



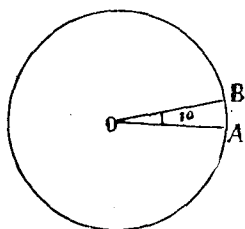
(圖16)

幾 何 三 角

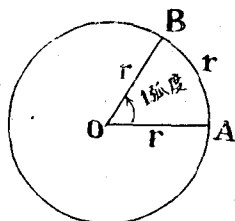
度，1平角等於180度，1直角等於90度。又1度等於60分，1分等於60秒（度，分，秒的記號分別爲“°”，“′”，“″”）。

如 $\angle A$ 等於105度32分42秒可寫成： $\angle A = 105^\circ 32' 42''$ 。*

(2) 弧度制：從圓上截取一弧，使其長等於半徑，則此弧所對的圓心角，



(圖18)



(圖19)

定爲量角的單位，叫做弧度。如圖19中， $\widehat{AB}$ 的長等於圓半徑 r ，則 $\angle AOB = 1$ 弧度。

$$\therefore C = 2\pi r$$

$$\therefore 1 \text{ 周角} = \frac{C}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ 弧度。}$$

$$1 \text{ 平角} = \pi \text{ 弧度}$$

$$1 \text{ 直角} = \frac{\pi}{2} \text{ 弧度}$$

【例】 $45^\circ = \frac{\pi}{2} \div 2 = \frac{\pi}{4} \text{ 弧度。}$

(3) 密位制：在砲兵技術中，都用密位制，是用1弧度的千分之一做量角的單位，叫做密位，這樣，周角 $= 2\pi \times 1000 = 2000\pi = 6283$ 密位，但爲了實用起見，取整數6000。所以，1密位的角爲分圓周爲6000個相等的小弧，每一段小弧所對的圓心角。

〔註〕* 習慣上，分和秒在10以下時，常以0補足成兩位，如 $3^\circ 05' 09''$ ，又度數沒有時，也常記零，如 $0^\circ 38' 30''$ 。

第一章 簡單的幾何圖形和作圖法

密位的記號爲一短橫“.”*，如平角爲30-00，直角爲15-00， $\angle 1 = 15-03$ 等。

習 題 二

1. 什麼樣的幾何圖形叫做圓？什麼是圓心、半徑、圓周和弧？
2. 弦和割線有什麼不同？切線和割線又有什麼不同？
3. 圓心角與圓周角的區別在那裏？
4. 什麼叫圓周率？如果可能，可找幾個圓形物品，量其圓周和直徑的長，算出其比值來。（應在3.14左右）
5. 照明彈的照明區域爲一圓，其直徑約爲300公尺，求周長多少公尺？
6. 殺傷彈的殺傷面積假定是一圓，其半徑爲8公尺，求殺傷周界多少長？
7. 1平角和1直角在6000和6400的密位制中各等於多少密位？在六十分制中各等於多少度？
8. 設A角和B角互爲餘角，當A角等於 50° 時，B角等於多少度？
9. 設C角和D角互爲補角，當C角等於12-58時，D角等於多少密位？（指6000制而言）

〔註〕*（一）爲了配合器材方便，密位記號記在百位與十位間，如32-58 4-00和0-32等。

（二）蘇聯的軍用器材是用6000密位，英美的用6400密位。

（三）角度制的制度很多，常用者爲六十分制和密位制，關於其他制度介紹在下面以供參考：

（a）百分制：分直角爲100度，每度100分，每分100秒，度、分、秒的符號分別爲“°”“′”“″”，如 $21^\circ 16' 25''$ ，這種制度在法國有用。

（b）十六分制度：把六十分制的1度，分爲十六份，每份的大小定做量角的單位，叫做十六分度，用“ $\frac{1}{16}$ 度”表示，如5760十六分度，記成 $5760 \frac{1}{16}$ 度，在一三式山砲的高低角上採用它。

§ 7. 不同制度的單位換算：

(1) 蘇聯密位制與英美密位的互換 *：

$$\therefore 1 \text{ 周角} = 60.00 \text{ (蘇制)} = 6400 \text{ (英製)}$$

$$\therefore 1 \text{ 密位 (蘇制)} \left(= \frac{6400}{6000} = \frac{16}{15} \right) = 1.0667 \text{ 密位 (英製)}$$

$$1 \text{ 密位 (英製)} \left(= \frac{6000}{6400} = \frac{15}{16} \right) = 0.9375 \text{ 密位 (蘇制)}$$

【例一】用蘇式器材測得直視分割為 14.00，問在英美器材上應是多少密位？

【解】 $1400 \times \frac{16}{15} = 1498 \text{ (英製密位數)}$

答：蘇聯制 14.00 合英製 1498。

【例二】用英美器材測得原點與目標的夾角為 840'，問合蘇聯制多少密位？

【解】 $840 \times \frac{15}{16} = 787.5 \text{ (蘇聯制密位數)}$

答：英製 840' 合蘇聯制 787.5。

(2) 六十分制與蘇聯密位制的互換：

$$\therefore 1 \text{ 周角} = 60.00 = 360^\circ$$

$$\therefore 1 \text{ 度} = \frac{6000}{360} = \frac{50}{3} = 16.667 \text{ 密位 (蘇)} \text{ 但在砲兵的應用上爲了方便起見，規定爲：}$$

$$1^\circ = 0.17$$

$$2^\circ = 0.33$$

$$3^\circ = 0.50$$

熟記這些基本的規定後，任何度數都可變爲 3° 的倍數同 2° 或 1° 的

〔註〕* 蘇聯密位制，英美密位制，6300密位制和十六分度制都可用同樣的道理來互換。

和，而後換算為密位數*。

$$1 \text{ 密位(蘇)} = \frac{360}{6000} = \frac{3}{50} = 0.06^\circ = 3.6'$$

【例一】 用經緯儀測得敵人砲兵陣地與原點夾角為 $22^\circ 5'$ ，問合蘇制多少密位？

【解】 $22^\circ = 3^\circ \times 7 + 1^\circ = 0.50 \times 7 + 0.17 = 3.0 + 0.17 = 3.17$

【例】 用蘇式器材，測得直視分割為 14.00，問合多少度？

【解】 $0.06^\circ \times 1400 = 84^\circ$

答：蘇聯制 14.00 合 84°

$$1 \text{ 密位(蘇制)} = \frac{16}{15} \text{ 密位(英美制)} = 1.0667 \text{ 密位(英美制)}$$

$$1 \text{ 密位(英美制)} = \frac{15}{16} \text{ 密位(蘇聯制)} = 0.9375 \text{ 密位(蘇聯制)}$$

$$1^\circ = 0 \quad 17, \quad 2^\circ = 0-33, \quad 3^\circ = 0-50$$

$$0-01 = 0.06^\circ = 3.6'$$

習 題 三

1. 把下列各蘇聯制密位數換算為英美制密位數：

(i) 0-45 (ii) 0-28.5 (iii) 8.85 (iv) 19-50

(v) 32-58

2. 把下列各蘇聯制密位數換算為六十分制的度數：

(i) 3-00 (ii) 8-56 (iii) 23-42 (iv) 30-00

(v) 27-46

〔註〕* 凡度數在 3 以上者，都應先扣除 3° 的倍數，若有多餘再依次用 2° 和 1° 。這樣換算結果就比較準確。如 $4^\circ = 3^\circ + 1^\circ$ (不用 $2^\circ \times 2$)， $14^\circ = 3^\circ \times 4 + 2^\circ$ 。

☆ 如果一角有度分秒，如 $22^\circ 30' 20''$ 者，可先將分秒化成度數，得 $22^\circ 30' 20'' = 22^\circ + 30 \div 60 + 20 \div 60 + 60 \div 60 = 22.5056^\circ$ ，為 3° 的 7.5018 倍，再換算為密位數： $0.50 \times 75018 = 3.75.09$