高　等　数　学

第一册

吴德佺编著

一九八一年七月

高　等　数　学

第一册

吴德佺编著

一九八一年七月

序　言

本讲义是根据本人在北京大学高等数学教研室二十年的教学实践与改革经验而编写成的。讲义曾在北京工业大学二分校试用，效果较好。

本讲义分三册印刷。第一册讲一元微积分；第二册主要讲多元微积分，包括空间解析几何、场论初步、无穷级数、反常积分与参量积分；第三册主要讲微分方程，包括富氏级数。全书将另配习题集。

物理类的高等数学是一门基础课，也是工具课；教学重点在于微积分的基本概念与计算。它不同于数学系的数学分析的地方在于逻辑推理的训练可以少些，抽象思维的要求可以低些。因此应尽量避免繁琐庞杂，力求简明扼要，充分利用形象直观。编者根据多年的教学实践与改革经验，并吸取其它教材的优点，对高等数学的內容与教学进行了一些改革与实验。在编写本教材的过程中注意到删除旧教材中一些不重要的甚至无用的內容，力求突出基本，突出重点，加强几何直观；还力求写得通俗易懂、简明扼要，以便于学生课前自学，而有一些需要进一步深入理解的问题，则列为思考题或习题，让读者自己思考、解决，以培养学生自学的习惯和分析问题、解决问题的能力。

本讲义写成的前后，承蒙我的老战友——北京大学冷生明教授的全力支持与帮助，他详细地提出了修改意见。另外，在北京大学的老同事邵士敏、戴中维、文丽、邵玉芳、蒋定华、范培华、庄大蔚、叶抗生、李树芳和清华大学范景媛等同志们也提供了宝贵的修改意见，蒋定华同志还热情细心地为本讲义作了插图，编者在此一并表示由衷的感谢。

由于仓促完稿，肯定存在不少问题，希望同志们指出。

吴德佺

1981年 4 月

目　录

第一章 函　　数

数学是研究现实世界的空间形式与数量关系的一门科学，它是研究自然科学与许多技术科学的基础。初等数学研究的量主要是常量；而高等数学则主要研究变量，是变量的数学。

微积分或数学分析是研究变量变化的一门科学，它所研究的对象是反映事物运动、变化过程中变量间相互依赖关系的函数。由于函数是微积分研究的对象，所以在学习微积分时，首先要复习函数这个概念，并结合函数图形了解各种初等函数的一些基本性质，并进一步掌握简单初等函数的作图法，这对今后学习与加强数形结合都很有益。

§1 绝　　对　　值

在本课程中，如无特别声明，数都是指的实数。大家知道，实数分有理数和无理数两大类。有理数包括所有的正、负分数和零。除有理数外其余实数都是无理数，如$\sqrt{2}$，$1+\sqrt{2}$，圆周率 π 等。另外，有理数可以用有限小数或循环小数表示，反之也对，如$\frac{1}{2}=0.5$，$\frac{1}{3}=0.\dot{3}$，而无理数只能用无限的非循环小数表示，如 $\pi=3.14159\cdots$，$\sqrt{2}=1.414\cdots$。

我们知道实数可以用数轴上的点来表示。满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x，称为以a、b 为端点的闭区间，记为$[a,b]$，或 $x\in[a,b]$，"$\in$"读作"属于"，它们在数轴上表示一段直线。满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x，称为以 a、b 为端点的开区间记为 (a,b)。左闭右开区间$[a,b)$表示满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的所有实数 x，$(a,b]$类似定义。$(-\infty,a]$、$(-\infty,a)$ 分别表示满足不等式

$$-\infty<x\leqslant a$$

与

$$-\infty<x<a$$

的所有实数 x，$[a,+\infty)$等类似定义。$(-\infty,+\infty)$ 表示全体实数。

练习题 用不等式表示下列区间（口答）：

$$(-1,2),(-5,6],[3,5),[1,+\infty),(-\infty,0)。$$

一个实数 a 的绝对值，记为$|a|$。根据绝对值的定义

$$|a|=\begin{cases}a & \text{当}a\geqslant 0\text{时}\\ -a & \text{当}a<0\text{时}\end{cases}$$

知$|a|\geqslant 0$。绝对值还有性质：

1） $|ab|=|a|\,|b|$。

2） $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$。

3） $|a|\geqslant\pm a$，即$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$。

4）若$|a|<r$，则$-r<a<r$。反过来也对。

若$|a|>r\ (r\geqslant 0)$，则 $a>r$ 或 $a<-r$。反过来也对。

5）若$|x-a|<r$，则 x 满足不等式

$a-r<x<a+r$。反过来也对。

若$|x-a|>r\ (r\geqslant 0)$，则 x 满足不等式

$x>a+r$ 或 $x<a-r$。反过来也对。

6）$|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$（三角不等式）。

性质 1）—3）是中学代数中已经学过的。性质 4）由定义易证，性质 5）可由 4）推出，请读者自己证明，在这里，我们只讲讲从几何上怎样来理解 4）与 5）。我们知道，$|a|$ 在数轴上表示坐标为 a 的点 A 到原点的距离（如图 1.1），$|a-b|$ 则表示坐标分别为 a、b 的点 A、B 间的距离（图1.2）。由此，从几何上来看性质4）5）是很容易理解的，如 $|a|<r$ 表示坐标为 a 的点 A 到原点的距离小于 r，那未在数轴上，点 A 必落在坐标为 $-r$ 与 r 的两点之间，由此，显然有 $-r<a<r$，反过来也对。性质 6 从几何上看也是可以的(请读者自己看)，

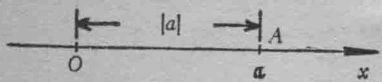


图 1.1

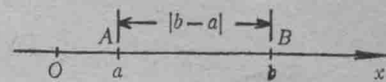


图 1.2

但我们用推理证明之：

证明 由性质 3）知

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,$$
$$-|b|\leqslant b\leqslant|b|。$$

两不等式相加得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|,$$

再由 4）得

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

又

$$|a-b|=|a+(-b)|\leqslant|a|+|-b|=|a|+|b|.$$

故

$$|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

思考题

证明 $|a\pm b|\geqslant|a|-|b|$.

§2 函　　数

1. 常量与变量

在生产或科学实验过程中，总会涉及各种不同的量，如长度、面积、体积、重量、压力、温度、电压、电流等等。这些量在所考虑的问题的过程中，有一些量大小不变，这种量称为常量；有一些量大小变化，这种可取不同值的变化的量，称为变量。常量与变量的概念或例子大家是熟知的，这里不多说了。但是，需要强调和提请大家注意的是：一个量是常量还是变量，必须根据具体问题与具体条件来分析，而且要辩证地看，即变是绝对的，不变是相对的、有条件的、暂时的。例如火车行驶时的速度，在开始阶段或刹车阶段，是变化的，因而

在该过程中是变量；在正常行驶阶段，变化很小，其速度相对地可看作为不变，因而是常量。又如重力加速度 g，严格说来，在离地心距离不同的地点是不同的，因而 g 应该是变量；但当精确度要求不高时，或离地心的距离变化甚小时，在地面附近的重力加速度可看作一样大（9.8米/秒^2），即相对地可看成常量；又如直流电压 $V=2$ 伏，它不随时间变化，因而是常量，但是，实际中直流电压也是随时间变化的，只是变化相对很小，可以忽略不计。由此看出，一个量是常量还是变量，总是与所考虑的具体问题、具体条件有关，它们不是绝对的。总之，变是绝对的，不变是相对的，常量是变量的特殊情形。

在数学上，常抽去量的物理意义，只考虑其数值，常量、变量在数学上的反映就是常数、变数。在给定的问题中，取不同数値的数，叫变数，否则叫常数。在数学中，一般用前面的英文字母 a、b、c 等表示常数，用末尾的字母 s、t、u、v、w、x、y、z 等表示变数。

初等数学主要研究常量，高等数学主要研究变量，因此，恩格斯把高等数学称之为变量数学。

2. 函数的概念

“每一事物的运动都和它的周围其它事物互相联系着和互相影响着。”这个客观规律反映在数量关系上，就是同一过程中各个变量之间的互相联系和互相依赖，函数关系就是这种关系中最常见的、最基本的一种。函数概念在中学里虽然学过，但还需要进一步加深与提高。为此，我们先看一些例子：

例 1 半径为 r 的圆，其面积 s 与半径 r 的关系为

$$s=\pi r^2,$$

按照此公式可以计算出各种半径的圆的面积。

例 2 在重力作用下，某自由落体从离地面高 H 米处落下，其下落距离（即落程）s 与时间 t 满足下面的公式：

$$s=\frac{1}{2}gt^2, \tag{2}$$

其中 $g=9.8$米/秒^2 是重力加速度。

例 3 圆内接正 n 边形的面积

$$s_n=\frac{1}{2}nr^2\sin\frac{2\pi}{n}, \tag{3}$$

其中 r 是圆的半径，n 是内接正多边形的边数。

例 4 有一块边长为 a 的正方形铁板，把四个角都截去一个正方形，可做成一个无盖的盒子。设截去的小正方形边长为 x，那么盒子的高为 x，底面的边长为 $a-2x$，盒子的体积就是

$$V=x(a-2x)^2 \tag{4}$$

截去的小正方形的边长 x 不同，盒子的体积也不同。

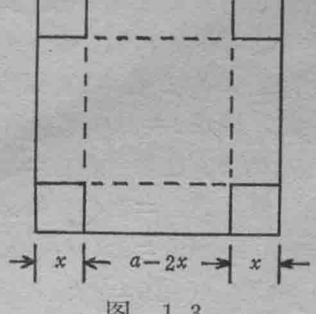


图 1.3

这样的例子是很多的，这些例子中尽管实际内容很不一样，但有两点是共同的：

（1）这些问题中都有两个变数，如（1）中的 s、r，（2）中的 s、t，（3）中的 s_n、n，（4）中的 V、x。

（2）这两个变数间存在依赖关系：一个变数随另一个

变数按一定的规律变化，而且当一个变数取定一个值时，另一个变数就按一定规律随之取一个对应的值。

把这种变数之间的关系抽象化，就得到了函数的概念。变数的取值的范围叫变域。

定义 设在一个过程中有两个量 x 与 y，其中 y 的值随 x 的值而变化，因而对于 x 的变域 D 中的每一个值，都按照一定的规律对应着 y 的一个确定的值，则称变量 y 是变量 x 的一个（单值）函数。若以 f 表示这个对应规律，则记为

$$y=f(x)$$

并称 x 为自变量，y 为因变量。称自变量的变域 D 为函数的定义域，称因变量的变域为函数的值域。

为了深刻理解函数概念与符号 $f(x)$，我们强调几点：

1）$f(x)$ 是函数的一个记号，不能误解为 $f\cdot x$，这正如 $\sin x$ 不能理解为 $\sin$ 乘以 x 一样。$f(a)$ 或 $y|_{x=a}$ 表示函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 时，对应的函数值。如例 2 中，$f(t)=\frac{1}{2}gt^2$，$f(1)=\frac{1}{2}g, f(2)=2g$。

2）函数概念中有二要素：函数关系与定义域。$f(x)$ 中的 f 代表 x 到 y 的对应关系，称为函数关系，两个函数中函数关系与定义域二者有一不同、就表示函数不同，如 $f(x)==\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $\varphi(x)=x+1$，前者在 $x\neq1$ 时有定义，且 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$，但后者定义域为 $(-\infty,+\infty)$，因此，定义域不同，函数也不同，又如 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 与 $y=\sin x$ 也一样。在同时出现几个函数时，不同的函数应该用不同的记号，如 $y=f(x)$，$y=g(x)$，…。

确定函数的定义域的原则一般是：

（1）实际问题根据问题的实际意义具体确定。如例 1，定义域 $D=(0,+\infty)$；例 2 中，定义域 $D=\left[0,\sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$；例 3 中，$D$ 为大于等于 3 的所有正数组成的集合。

（2）函数由分析式给出时，定义域为使式子有意义的一切数。如 $y=\sqrt{x+1}$，其定义域 $D=[-1,+\infty)$；$y=\frac{1}{x-1}$，$D=(-\infty,1)$ 与 $(1,+\infty)$；$y=\frac{1}{1+2\sin x}$，其定义域为 $x\neq n\pi+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}$（$n$ 为任意整数）。

3）在函数的定义中，要注意理解"一个确定"的含意，它与"唯一确定"含意相同，而与"确定"含意不同，前者强调 y 的对应值只有一个，而后者允许多个甚至无穷个。在函数的定义中，我们与许多书一样，采取前一种定义，个别书采用后者，这两种函数的定义是不同的必须注意。按对应值个数的不同，函数分为单值函数与多值函数，我们今后如无特别声明，函数 $y=f(x)$ 都指单值函数，请注意！

例 5 已知 $f(x)=2x^2-3x+1$，求 $f(1)$，$f(0)$，$f(-2)$，$f(a)$，$f(a+1)$ 与 $f(a)+1$。

解 $f(1)=2\times1^2-3\times1+1=0$；

$f(0)=2\times0^2-3\times0+1=1$；

$f(-2)=2\times(-2)^2-3\times(-2)+1=15$；

$f(a)=2a^2-3a+1$；

$f(a+1)=2\times(a+1)^2-3(a+1)+1=2(a^2+2a+1)-3a-3+1=2a^2+a$；

$f(a)+1=(2a^2-3a+1)+1=2a^2-3a+2$。

例 6 已知 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(2)$, $f(a)$, $f(a+h)$, $f(a^2)$, $f(2a)$, $f(x+h)-f(x)$。

解 $f(2)=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$；

$$f(a)=\frac{1}{a^2};$$

$$f(a+h)=\frac{1}{(a+h)^2};$$

$$f(a^2)=\frac{1}{(a^2)^2}=\frac{1}{a^4};$$

$$f(2a)=\frac{1}{(2a)^2}=\frac{1}{4a^2};$$

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}$$

$$=\frac{x^2-(x^2+2hx+h^2)}{x^2(x+h)^2}=-\frac{2hx+h^2}{x^2(x+h)^2}。$$

以上讲的函数只有一个自变数，叫做一元函数。自变量多于一个时，是多元函数，其定义以后再讲。作为思考题，二元函数 $z=f(x,y)$ 怎么定义，读者可以想一想。

3. 函数的表示法

一般说来，函数的表示法有三种：

1. 表格法：表格法就是用表格来表示自变量与因变量的关系，如大家熟知的对数表、三角函数表等。在实验与生产、生活实际中常用表格法，在实用上很方便，可以不通过计算一眼就知道函数在某点的值。

2. 解析法：

两个变量之间的函数关系用数学式子来表示，如例 1—例 4。用解析法表示函数的优点是便于理论上作定量的分析研究和运算，因此，在理论上用得很多。

3. 图示法：

在生产、实验或理论上，经常用图象来表示两个变量的函数关系，这种方法称图示法，如生产进度、实验结果画成图表。由于图示法有鲜明的直观性，因此，在实际和理论上都经常用它来作定性分析或帮助理解、记忆。

如果已知函数 $y=f(x)$，将自变量 x 看作横坐标，对应的因变量 $y(=f(x))$ 为纵坐标，当 x 取定时，就可以在坐标平面上确定一点 (x,y)。当 x 变化时，动点 (x,y) 的轨迹一般是一

条曲线（图1.4），这条曲线称为函数 $y=f(x)$ 的图形。从解析几何观点看，这曲线的方程就是 $y=f(x)$，函数 $y=f(x)$ 与其图形（曲线）的关系也就是曲线的方程与方程的图形之间的关系。

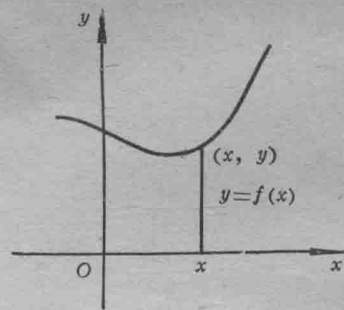


图 1.4

需要大家注意的是：不要将函数的记号 $f(x)$ 与解析式相混，函数 $y=f(x)$ 可以是公式，也可能是表格、图象表示的。即使用式子表示，也可以不是一个简单式子，而是一个分段表示的或用复杂的式子表示的。如

$$y=|x|=\begin{cases} x & \text{当} x\geqslant 0 \text{时} \\ -x & \text{当} x<0 \text{时}, \end{cases}$$

$$y=\begin{cases} 1 & \text{当 } x>0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x=0 \text{ 时} \\ -1 & \text{当 } x<0 \text{ 时}, \end{cases}$$

后者叫符号函数，记为 $y=sgnx$。这两个函数都是分段表示的函数，叫分段函数。大家决不要把分段函数误解为几个函数！

§3 几　类　函　数

1. 单调函数

有些函数如 $y=x$，$y=x^3$ 等，函数值随自变量增大而增大，而有的函数则相反，这种特性就是函数的增减性。一般有

定义 1 若对任意的 x_1、$x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，就有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)).$$

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内为增（或减）函数（图1.5，1.6）

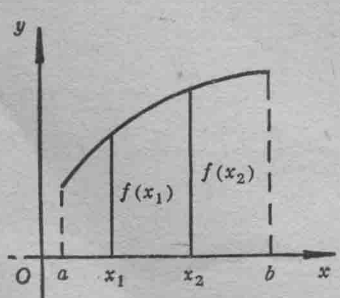


图1.5　增函数

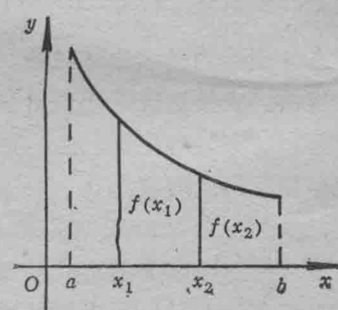


图1.6　减函数

若对任意的 x_1、$x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，就有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\qquad(\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2))。$$

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内为非减（或非增）函数。

非减函数与非增函数统称单调函数，增函数与减函数也称为严格单调函数。

显然，严格单调函数必是单调函数。

从函数的图形看，增函数的图形沿 x 轴正向是上升的（图1.5），而减函数的图形沿 x 轴正向是下降的（图1.6）。

例 1 讨论 $y=x^2$ 的单调性

解 由函数的图形易知，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调下降，在 $(0,+\infty)$ 内单调上升，但在 $(-\infty,+\infty)$ 内不单调。

2. 奇偶函数

函数 $y=x^2$，$y=x^4$，…的共性是图形对 y 轴对称，函数在 $-x$ 与 x 两点的函数值相等。而函数 $y=x$，$y=x^3$，…的共性是图形对原点对称，函数在 $-x$ 点的函数值与在 x 点的函数值只相差一符号。对一般函数，有

定义 2 若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数（图 1.7）。

若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数（图1.8）。

显然，偶函数的图形对称于 y 轴，而奇函数的图形对称于原点。

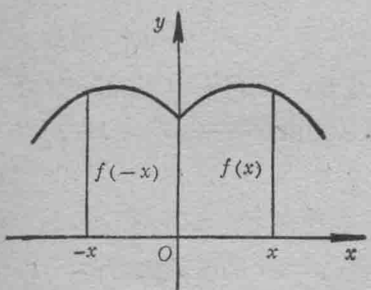


图 1.7

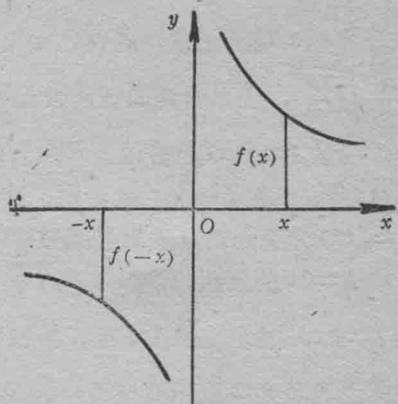


图 1.8

例 2 $y=\cos x$ 是偶函数

解 $\because \cos(-x)=\cos x$，$\therefore$ 由定义知 $y=\cos x$ 是偶函数。

例 3 $y=x\cos x$ 是奇函数

解 $\because f(-x)=(-x)\cos(-x)=-x\cos x=-f(x)$

$\therefore$ 由定义知 $y=x\cos x$ 是奇函数。

根据定义，读者可以证明：

1）奇函数与奇函数的乘积为偶函数。

2）奇函数与偶函数的乘积为奇函数。

3. 有界函数

我们知道 $y=\sin x$、$y=\cos x$ 的绝对值不超过 1，而 $y=\mathrm{tg}\,x$、$y=\mathrm{ctg}\,x$ 的绝对值可以在 $[0,+\infty)$ 内变化。为区别函数这种性态的不同，我们定义有界函数与无界函数如下：

定义 3 设 I 为某区间或数的集合。若存在一正数 M，使得对一切 $x\in I$，有

$$|f(x)| \leqslant M.$$

则称 $f(x)$ 在 I 内有界。否则，称 $f(x)$ 在 I 内是无界的。

$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，而函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，但在 $[\delta,1)\ (\delta>0)$ 内有界。因此，函数是否有界，不仅与函数有关，而且还与区间有关。

思考题

有界函数与无界函数在函数图形上看有何不同？

§4 反　函　数

1. 反函数概念

在研究函数关系时，谁是自变量，谁是因变量，不是绝对的，而是相对的，这要依研究的具体问题而定。如自由落体运动中，路程 s 与时间的关系是 $s=\frac{1}{2}gt^2$，当已知时间求路程时，t 是自变量，s 是因变量，而在已知路程求时间的问题中，把 s 看成自变量较方便，这时因变量 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$，这样得到的新函数就叫原来函数的反函数。反函数的一般定义如下：

定义　设函数 $y=f(x)$ 的值域为 R，若将 y 看成自变量，对于 R 中的每一 y 的值，由 $y=f(x)$ 都可以唯一确定一个 x 值，则称这个在 R 上定义的函数 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，而称 $y=f(x)$ 为正函数（或直接函数）。

例 1　求 $y=2x$ 的反函数

解　由 $y=2x$，把 y 看成自变量，解得 $x=\frac{1}{2}y$，所以 $y=2x$ 的反函数为 $x=\frac{1}{2}y$。

因为习惯上总是用 x 表示自变量，因此 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$。如 $y=2x$ 的反函数 $x=\frac{1}{2}y$ 就改写成 $y=\frac{1}{2}x$。

从几何上看，设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R，$y=f(x)$ 的图形如图1.9。其反函数 $x=\varphi(y)$ 是这样确定的，对于 R 中的任意一个值 y，从纵坐标轴上的点 $(0,y)$ 作 x 轴的平行线，交曲线 $x=f(x)$ 于 P，P 点的横坐标 x 就是 $\varphi(y)$。但是，习惯上总是用横轴表示自变量，对反函数 $x=\varphi(y)$ 来说，就需要把 y 轴放倒成水平轴，把 x 轴竖成纵轴，这就相当于把 $x-y$ 平面沿对角线 $y=x$ 旋转 $180°$。这样一转，反函数 $x=\varphi(y)$ 的图象将变成什么样呢？请大家思考。

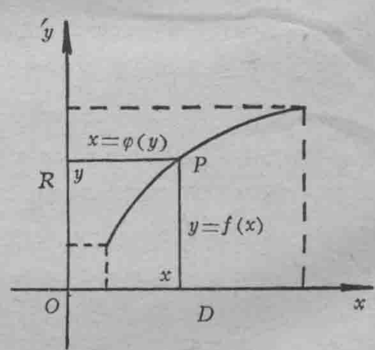


图　1.9

2. 正、反函数间的关系

从反函数的定义可以知道正函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=\varphi(x)$ 间有以下关系：

1）$f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的定义域与值域正好互换；

2）正函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形对直线 $y=x$ 对称。

1）是显然的，2）正是上段要大家思考的。为了说明 2)，我们以函数 $y=2x$ 为例，从几何上加以说明。反函数 $x=\frac{1}{2}y$ 与 $y=2x$ 的图形在 $x-y$ 平面上是一样的，由于反函数中的 y 是自变量，如照前段末尾那样，将 y 轴放倒成水平轴，只要将图 1.10 中正 函数 $y=2x$ 的图

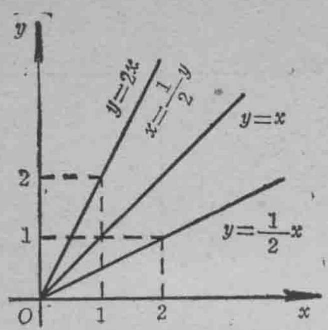


图 1.10

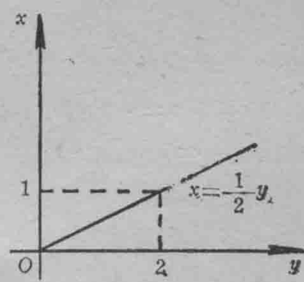


图 1.11

形沿 $y=x$ 旋转 180°，即得反函数 $x=\frac{1}{2}y$ 在 $y-x$ 平面上的图形（图1.11），再将自变量 y、因变量 x 的字母按习惯法分别换为 x、y，则得反函数 $y=\frac{1}{2}x$ 的图形（图1.10）。由此易见，反函数 $y=\frac{1}{2}x$ 与正函数 $y=2x$ 的图形对直线 $y=x$ 是对称的（如图 1.10）。对一般情形，道理是一样的。

因为对数函数 $y=\lg x$ 是指数函数 $y=10^x$ 的反函数，因此，根据正、反函数的图形的关系易知它们对直线 $y=x$ 对称。

思考题

1. 正函数 $y=f(x)$ 与反函数 $x=\varphi(y)$ 的图形与函数关系各有何关系？
2. $y=\varphi(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 的图形与函数关系各有何关系？

§5 基 本 初 等 函 数

在生产斗争和科学实验中，人们遇到了大量反映客观世界物质运动的函数关系，其中最基本、最简单的是初等数学里已经学过的五类函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，它们叫基本初等函数。熟练掌握它们的图形与性质，对今后学习、工作都很有好处。为此，我们在这里复习一下它们的图形与性质。

1. 幂函数 $y=x^a$（a 为常数）

常用的是 $a=0、1、2、3、\frac{1}{2}、-1、-2$ 的情形。$a=0$ 时，幂函数为 $y=1$，是常数函数，自变量

x 沒有出现，它是一条平行于 x 轴的直线，这在解析几何中大家是熟悉的，但是把 $y=1$ 看成 x 的函数，有人不理解，主要是沒有把 $y=1$ 看成过程，看成 x 变化时 y 恒等于1的过程。$y=x^2$，$y=x^3$ 的图形大家是熟悉的。

$\alpha=\frac{1}{2}$，-1、-2时的图形，见图 1.12。

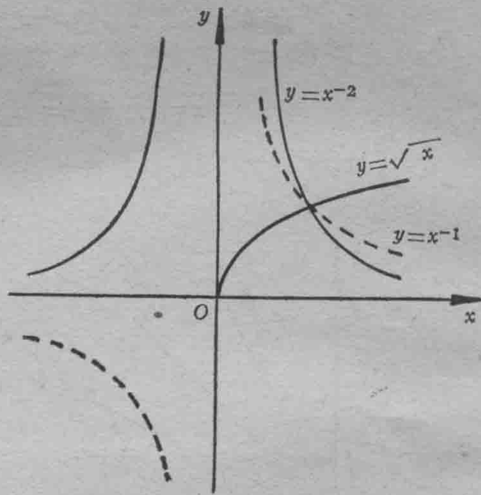


图 1.12

幂函数的定义域与 α 有关，如 $\alpha=\frac{1}{2}$时，定义域为 $[0,+\infty)$，$\alpha=-1$ 时，定义域为 $(-\infty, 0)$ 与 $(0,+\infty)$。

幂函数有以下性质：

（1）偶次方为偶函数，奇次方为奇函数；

（2）在右半平面的图形，当 $\alpha>0$ 时，图形上升；当 $\alpha<0$ 时，图形下降。

2. 指数函数 $y=a^x\ (a>0)$

常用情形为 $a=10$、e、e^{-1}

性质：

（1）所有指数函数的图形都在上半平面，且经过（0，1）点，

（2）当 $a>1$ 时，图形上升；当 $a<1$ 时，图形下降，

（3）当 x 沿正半轴无限增大时，即 $x\to+\infty$ 时，$e^{-x}\to0$，$e^x\to+\infty$；而当 x 沿负向绝对值无限变大时，即 $x\to-\infty$ 时，结果相反，即 $e^{-x}\to+\infty$，$e^x\to0$。

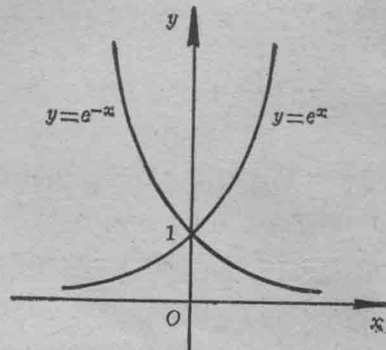


图 1.13

3. 对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0$ 且 $a\neq1$）

$a=10$ 时，为常用对数，记为 $y=\lg x$，$a=e$ 时，为自然对数，记为 $y=\ln x$。

因为对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，所以对数函数的图形与指数函数的图形对直线 $y=x$ 对称，$y=\ln x$ 的图形与 $y=e^x$ 的图形对 $y=x$ 对称，其图形如图 1.14。由对数函数与指数函数图形间的关系及指数函数的性质，易知对数函数的图形有性质：

（1）图形在右半平面，经过（1，0）点；

（2）当 $a>1$ 时，图形上升；当 $a<1$ 时，图形下降。

4. 三角函数

在中学数学中，大家已学过三角函数，其图形也已熟悉，请读者自己画一画。现将其有关性质复习如下：

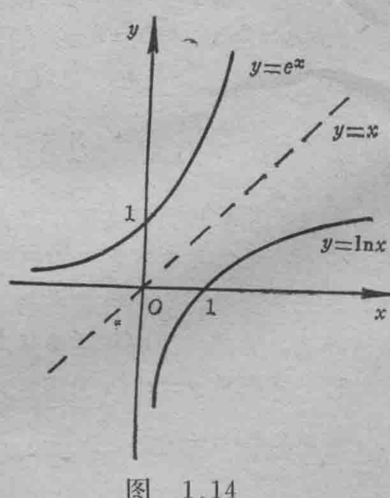
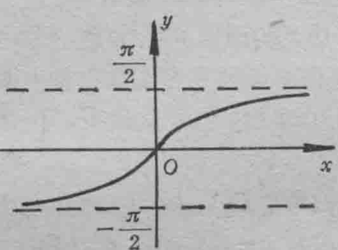
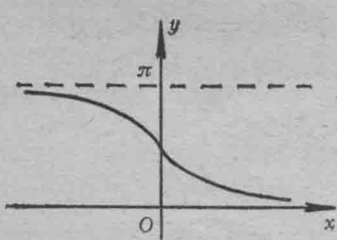


图 1.14

函数 性质	$y=\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
图　形	（自己画上）			
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$	$x \neq k\pi$ （k 整数）
值　域	$[-1,\ 1]$	$[-1,\ 1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
周　期	2π	2π	π	π
一单调区间	$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\ \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\ \pi)$
零　点	$x=k\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$x=k\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

5. 反三角函数

前段所指出的单调区间上的三角函数的反函数，称为反三角函数的主值函数，分别记为 $y=\arcsin x$、$\arccos x$、$\operatorname{arc\,tg} x$、$\operatorname{arc\,ctg} x$，它们皆为单值函数。如 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$的反函数为 $x=\arcsin y$，换字母得反正弦函数为 $y=\arcsin x$。注意，$y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$的定义域为$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，其图形只是正弦曲线 $y=\sin x$ 的一部分，函数 $y=\arcsin x$ 与 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$互为反函数。从反正弦函数的定义，容易知道作为 x 与 y 的对

性质 函数	图　形	定　义　域	值　　域
$\arcsin x$	略	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos x$	略	$[-1,1]$	$[0,\ \pi]$
$\operatorname{arc\,tg} x$		$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{arc\,ctg} x$		$(-\infty,\ +\infty)$	$(0,\ \pi)$

应关系（或方程），以下两式是一样（或等价）的，等价有记号$\Longleftrightarrow$，故

$$y=\arcsin x\Longleftrightarrow x=\sin y\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

或

$$y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\Longleftrightarrow x=\arcsin y.$$

注意，x与y的对应关系一样，不等于函数关系一样，函数关系是指自变量与因变量的对应关系。以上等价关系正如指数函数与对数函数间有下述等价关系一样：

$$y=10^x\Longleftrightarrow x=\lg y,$$

$$y=\lg x\Longleftrightarrow x=10^y.$$

由正、反函数的关系与三角函数的图形、性质，易知反三角函数有性质（见上表）。

§6　复合函数与初等函数

1. 复合函数

在实际问题中，所遇到的函数是千变万化的，比基本初等函数往往要复杂得多。但是万变不离其宗，大量的函数可以由基本初等函数组合而成，这正象各式各样的机器都可以由一些基本的零件构成一样。研究一个复杂的事物，往往要把它分解或解剖成简单的事物来研究，在微积分的计算中，也需要把比较复杂的函数分解成基本初等函数或简单的函数。为了掌握分解的本领，必须先掌握复合函数概念。

什么是复合函数？先看几个例。如

$y=\sin\omega t$ 是由 $y=\sin u$，$u=\omega t$ 复合而成。

$y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\sin x$ 复合而成。

在这些例子中，y是中间变量u的函数，而u又是自变量t或x的函数，由这两个较简单的函数经过复合而成较复杂的函数 $y=\sin\omega t$ 与 $y=\sin^2 x$。一般有

定义 1　设y是u的函数$y=f(u)$，而u又是x的函数$u=\varphi(x)$，则$y=f[\varphi(x)]$是x的函数，称此函数为由函数$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，称u为中间变量。设$f[\varphi(x)]=g(x)$，复合函数$g(x)$的定义域D_g由$u=\varphi(x)$的定义域D_φ中那些使$\varphi(x)$落在$y=f(u)$的定义域D_f的x组成，用符号可记为

$$D_g=\{x\mid x\in D_\varphi，\text{且 }\varphi(x)\in D_f\}$$

例 1　简谐振动 $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ 是由简单函数 $y=A\sin u$、$u=\omega t+\varphi$ 复合而成的。

例 2　$y=\ln(1+\cos^2 x)$ 是由 $y=\ln u$、$u=1+z^2$、$z=\cos x$ 三者复合而成的。

以后应用上需要的是掌握将复杂的函数分解为简单的基本初等函数。

练　习

分解下列函数成基本初等函数：

（1）$y=\ln\sin x$；　　　　（2）$y=\sqrt{1-x^2}$