连续运算诺模图原理

高　竞

哈尔滨建筑工程学院

一九八〇年十一月

前　　言

在工程设计和各专业的计算过程中，经常重复地使用一些公式。而且这些公式中又常常含有许多变量和参变量。复杂的计算涉及到一系列链锁公式，其参、变量多者有时达数十个。有时夹杂着限制条件和经验公式，甚至需要分析和判别。用传统的方法编制的诺模图，常常是需要许多张图，而且计算线往复穿梭，既不便于使用，又易混淆致误。与使用计算尺和计算器比较起来，一般情况下不易显示出诺模图的优越性。有鉴于此，本书在《单向等距线列图算原理》一文的基础上，对连续运算进一步深入和扩展了它的内容。这样，公式应用范围变宽，适用性灵活。许多有关联的公式、经验公式，查表、限制条件、分析和判别等，都可以通过图算理论的加工编制在一张诺模图上。只要把已知的数据，点在相应的刻度线上，向一个方向一连线，就读出答案。计算所需时间就是画点和连线的时间。如某设计中计算项目用两个公式和查两次表，用计算尺和计算器计算，需时二十分钟左右。用本法只需时一分钟左右。再如一项具有几十个参变量（包括限制条件和查表等）的计算，用计算尺和计算器，需时半天；用本法制成的图表计算时，只需十分钟左右。虽然目前电子计算机在飞速发展，但是连续运算式诺模图仍然具有其独特的实用价值。

另外，计算精确度也是可以满足工程的要求。计算具有两个变量的函数的诺模图，据前人统计，误差小于１％。若用本书的连续计算原理计算具有三十个参、变量的函数的诺模图时，按出现同号误差（事实上不可能完全出现同号误差），其累计误差也只有1.32％。假如扩大一倍误差，按２％误差计算，其累计误差也只有3.48％。因此满足工程容许误差是没有问题的。计算线的走向和刻度线的配置，按单向等距原理处理以后，既能做到连续运算，又能方便绘制图表——可以省略计算刻度系数和刻度座标的过程，直接在”运算方案”的基础上编制图表。其所以便于使用，就是制出的图算表，“机械性”很强——取点，画线，出答案。

对含有多变量的函数进行单方向连续运算的诺模图，从使用效果方面来说，其所代表的方程式，实为因变量和自变量可以置换的一组方程式。即：

$$f(x_1、x_2、x_3\cdots\cdots x_n)=x_{n+1};$$
$$f(x_2、x_3、x_4\cdots\cdots x_{n+1})=x_1;$$
$$f(x_3、x_4、x_5\cdots\cdots x_1)=x_2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$
$$f(x_{n+1}、x_1、x_2\cdots\cdots x_{n-1})=x_n;$$

由于构成闭合运算回路”，上列各式说明，任一量均可充做式中函数。因而可以实现一图多用，且对现场核对和修改设计以及优选设计等等也是方便的。

这本讲义是为我院三系专业开选修课结合科研课题撰写的。由于本人水平所限，谬误之处在所难免，敬希指正。

高　竞　　1980年11月15日

目　　录

第一章 图算基本知识

§1. 点列的射影特性

开始先复习一下射影几何基本概念

1. 点列的一般射影

如图1—1所示，点列A_x、B_x、C_x和D_x从属于直线x；点列A_y、B_y、C_y和D_y从属于直线y；S为射影中心。二点列成透视对应。

二点列具有如下性质：

(1) 点列I_y对应点列I_x——点列中的各点一一对应；

(2) $x \supset I_x$及$y \supset I_y$——点线从属性不变；

(3) 点列的直线性不变；

(4) $\because I_x \,\overline{\wedge}\, I_y$,

$\therefore x(A_xB_xC_xD_x) = y(A_yB_yC_yD_y)$——复比不变。 (1—1)

2. 点列的平行射影

如图1—2所示，点的一一对应、点线从属性和直线性同前面第1种情况。惟(4)点不同：

$\because x \parallel y$,

又$\Delta SA_xB_x \backsim \Delta SA_yB_y$。

$\therefore (A_yB_yC_y) = (A_xB_xC_x)$——简比相等， (1—2)

及 $\alpha\overline{A_xB_x} = \overline{A_yB_y}$——此时$\alpha < 1$。

3. 具有非固有元素在平行射影中的特殊情况——非固有直线平行于已知线列

如图1—3所示，除前面讲过的前三点相同外，惟(4)点又有所不同。根据$V.Staudt$命题，二点列形成重合——$(A_{y2}B_{y2}C_{y2}D_{y2}) \equiv (B_{y1}C_{y1}D_{y1}E_{y1})$。 (1—3)

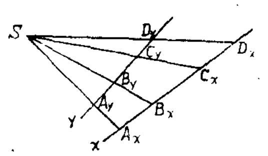

图 1—1

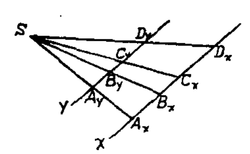

图 1—2

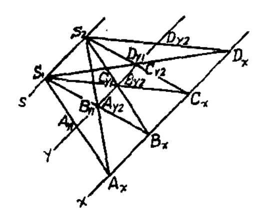

图 1—3

§2. 点列平行透视的等差特性

1. 区格的平行透视

从射影空间的观点来看图1—4时，S为非固有点且位于“无穷远”处，同时$O_xA_x = A_xB_x = B_xC_x = C_xD_x = O_yA_y = A_yB_y = B_yC_y = C_yD_y$。

若从欧几里得空间来看，

$$Sx = m,$$
$$Sy = l。$$

不管从以上两个空间中的哪个空间来看，x和y都是平行的。

现在从欧几里得观点讨论图形在平面上的间隙等距性。

平行透视的图形具有相似性。

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{l}$$

$$a = \frac{m}{l} b \qquad (1—4)$$

$$m = \frac{a}{b} l \qquad (1—5)$$

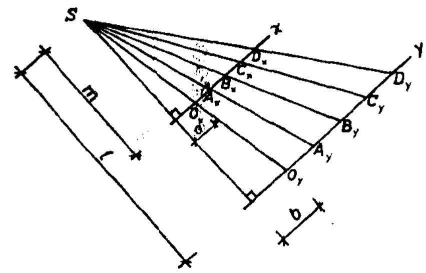

图 1—4

2. 非固有点列形成的非固有直线平行于直线x和直线y，及点列数字化

S为非固有直线，其上的为非固有点。我们把图1—5仍按分析图1—4的方法进行。

当 $m = \frac{l}{2}$时，则公式(1—4)变为

$$a = \frac{b}{2} \qquad (1—6)$$

此时利用区格的平行透视中的间隙等距性则有

$$i_s + i_y = i_x \qquad (1—7)$$

（因图1—5中数字取用小写1、2、3……等序代号未写I，而写i。）

如$4_s + 8_y = 12_x$（见图1—5中4_s同8_y连线，交直线x于12_x。）

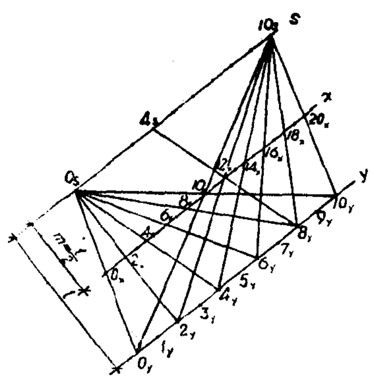

图 1—5

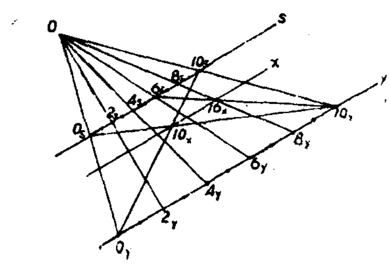

图 1—6

3. 平行透视中的区格的相似性和数字的显实性

如图1—6所示，以O点为射影中心，s、x和y三者互相平行，$i_s \barwedge i_y$。

已知点列i_s平行i_y，求其“和点列”。

$$O_y 10_s \times O_s 10_y = 10_x,$$

过10_x引线平行s或y即“和点列”所属的直线x——答案线。

例如6_x和10_y连线交于x，得16_x。

假如将s均匀拉长，令

$$O_s 10_s = O_y 10_y,$$

则图1—6即变成图1—5的样式，x直线将移至s与y的正中间。此时O在几里得空间趋向无穷远（纸上不复出现）。

§3. 线列间距和刻度的间隔

如图1—7所示，加法的两个因子分别位于p和q上。和位于r上。

线列间距和刻度间隔的推导于下。

1. 和居线列中间的图形

（1）求r线位置∵ $\frac{x}{a}=\frac{l}{a+b}$,

$$\therefore \quad x=\frac{al}{a+b}。 \qquad (1—8)$$

x确定r线的位置。

（2）再求r线刻度的间隔y。

$$\because \quad \frac{1}{y}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

$$\therefore \quad y=\frac{ab}{a+b}。 \qquad (1—9)$$

（3）从公式(1—8)可以看出：b越大则x越小——靠近p线；a越大则x越大——靠近q线。

（4）从公式(1—9)可以看出，当$a=b$时，$y=\frac{b}{2}$，说明r线比p或q线的刻度间隔密一倍。

（5）从公式(1—8)可以看出，当$a=b$时，则$x=\frac{l}{2}$，即r位于p和q的正中间。

例1—1如图1—7所示，设$a=5mm$，$b=10mm$，$l=45mm$。

① 求r线的位置：

$$x=\frac{al}{a+b}=\frac{5\cdot 45}{5+10}15mm。$$

② 求r线的刻度间隔：

$$y=\frac{ab}{a+b}=\frac{5\cdot 10}{5+10}\approx 3.3mm。$$

2. 和居线列一侧的图形（图1—8）

（1）求r线的位置

$$\because \quad \frac{l+x}{x}=\frac{a}{b},$$

$$\therefore \quad x=\frac{bl}{a-b}。 \qquad (1—10)$$

从公式(1—10)可以看出，当$a=2b$时则$x=l$，即q线居中。

（2）求r线的刻度间隔y

$$\because \quad \frac{l+x}{l}=\frac{y}{b},$$

$$\therefore \quad y=\frac{ab}{a-b}。 \qquad (1—11)$$

当$a=2b$时，则$y=2b$，此时即

$$a=y。$$

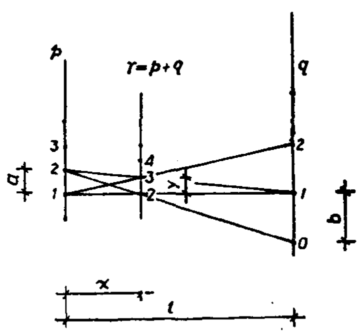

图 1—7

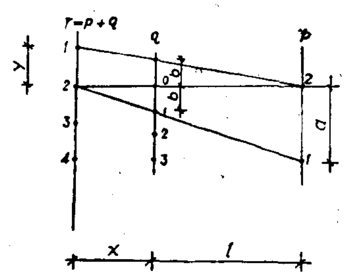

图 1—8

3． 差居线列中间的图形（图1—9）

（1）求r线的位置

$$\because \quad \frac{x}{a}=\frac{l}{a+b},$$

$$\therefore \quad x=\frac{al}{a+b} \qquad (1—12)$$

（2）求r线的刻度间隔y

$$\because \quad \frac{y}{a}=\frac{l-x}{l},$$

$$\therefore \quad y=\frac{ab}{a+b} \qquad (1—13)$$

4． 差居线列左侧的图形（图1—10）

（1）求r线的位置

$$\because \quad \frac{x}{b}=\frac{x+l}{a},$$

$$\therefore \quad x=\frac{bl}{a-b} \tag{1—14}$$

（2）求r线的刻度间隔y

$$\because \quad \frac{y}{x+l}=\frac{b}{l},$$

$$\therefore \quad y=\frac{ab}{a-b} \tag{1—15}$$

5．差居线列左侧的另一种图形（图1—11）

推理及公式同图1—10、公式(1—14)和公式(1—15)。

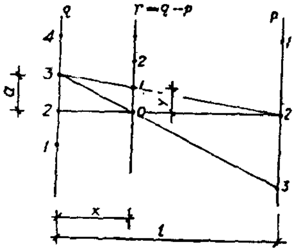

图 1—9

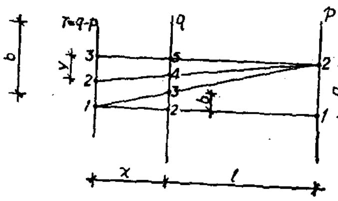

图 1—10

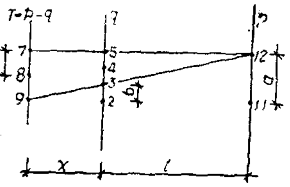

图 1—11

§4. 区格和差在积商中的应用推广

1．和化积的形式

$$lgi_s+lgi_y=lgi_x \tag{1—16}$$

例如　　$5_s\times 2_y=10_x$，

即线s上5点与线y上2点连线，交x于10点（答案）。

2．差化商的形式

$$lgi_x-lgi_y=lgi_s \tag{1—17a}$$

例如　　$10_x\div 2_y=5_s$，

即线s上10点与线y上的2点连线延长交于线s上5点（答案）。

另外　　$$lgi_x-lgi_s=lgi_y \tag{1—17b}$$

例如　　$10_x\div 5_s=2_y$

即线s上5点与线x上10点连线延长，交于线y上2点（答案）。

参看图1—12。

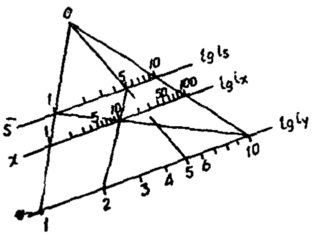

图 1—12

§5. 刻 度 系 数

设有函数$f(x)$。x变量的区间为：由x_{min}到x_{max}。设区间内的任意变量值为x_i。

x_{max}为变量最大值；x_{min}为变量最小值。

函数值$f(x_{max})$称为刻度线上的上限函数值。函数值$f(x_{min})$称为刻度线上的下限函数值。

如令l为刻度线的长度时，则刻度线上关系到刻度间隔的刻度系数s，可以按照下面公式求出：

$$S=\frac{l}{f(x_{max})-f(x_{min})} \tag{1—18}$$

上面公式移项后，即刻度线两端的间隔：

$$l=S[f(x_{max})-f(x_{mim})] \tag{1—19}$$

当求刻度线内的具体刻度时，则应按下面公式计算：

$$l_i=S[f(x_i)-f(x_{min})] \tag{1—20}$$

其中x_i为$\geqslant x_{min}$和$\leqslant x_{max}$之间的任意值。而l_i则表示$x=x_i$时的函数值刻度点到x_{min}间的距离。

l_i可称做刻度的座标。x_{min}可看做座标值的起点。

定义：两条刻度线上的两对相同数值的间隔相等，称两条刻度线具有相同的刻度系数。

例1—2

已知 $f(x)=\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$；$l_x=12cm$；$x_i=4$、6、8、10、12。试作刻度线。

解：

1. 求函数值的数列。

$f(x_{min})=\left(\frac{4}{2}-1\right)^2=1$；$f(6)=\left(\frac{6}{2}-1\right)^2=4$；$f(8)=\left(\frac{8}{2}-1\right)^2=9$；$f(10)=\left(\frac{10}{2}-1\right)^2=16$；$f(x_{max})=\left(\frac{12}{2}-1\right)^2=25$。

2. 求刻度间隔的刻度系数。

$$S=\frac{12}{25-1}=0.5$$

3. 求各x_i间的间隔（求x_i的座标值）

$$l_4=0.5\cdot 0=0;$$

$$l_6=0.5\left[\left(\frac{6}{2}-1\right)^2-\left(\frac{4}{2}-1\right)^2\right]=1.5cm;$$

$$l_8=0.5\left[\left(\frac{8}{2}-1\right)^2-\left(\frac{4}{2}-1\right)^2\right]=4cm;$$

$$l_{10}=0.5\left[\left(\frac{10}{2}-1\right)^2-\left(\frac{4}{2}-1\right)^2\right]=7.5cm;$$

$$l_{12}=0.5\left[\left(\frac{12}{2}-1\right)^2-\left(\frac{4}{2}-1\right)^2\right]=12cm。$$

4. 如图1—13所示作图，首先按间隔值l_{xi}在刻度线上截取线段，也就是相应函数值$f(x_i)$的位置，但作图时标写的刻度值应为相应的x_i值。

§6. 单线计算图

设有方程

$$y = x + a$$

或为

$$V = bu。$$

对于前者是用匀刻度进行计算。刻度线的一侧按x值标注，在另一侧的同一位置为$x+a$，a为常量。见图1—14($a=4$)。

对于后者是采用对数刻度，一侧按u的数值标注，同时另一侧向减值方向错位b值大小的距离，并划出相同刻度系数的对数刻度，注写相应的数值。见图1—15($b=1.5$)。b为常量。

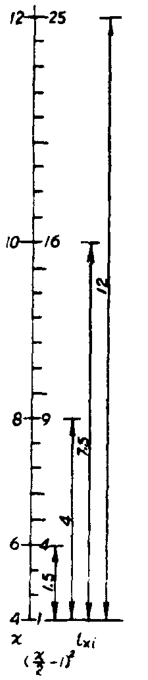

图 1—13

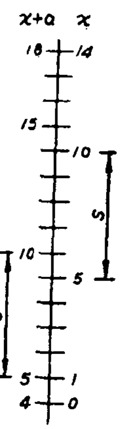

图 1—14

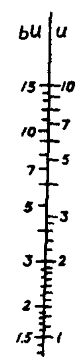

图 1—15

§7. 对数刻度线的刻度系数

设有方程式

$$y = 2x。$$

现在从图算的观点分析$2x$和x的关系。"$2x$"是随着"x"的变化而改变其值的。因此把"$2x$"和"x"分别看成两个场的变量，同时它们之间又是一一对应的

$$2x \leftrightarrows x。$$

于是，可以把“$2x$”和“x”分别画成两条刻度线并且在计算上对应起来。这样的方程式可以绘制成单线计算图。左侧是x刻度值，右侧是$2x$刻度值。这种计算图的特点是具有相同的刻度系数S'。参看图1—16。

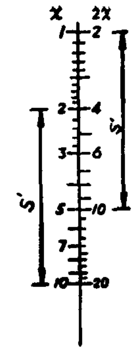

图 1—16

§8 行列式的基本性质

性质1 行列互换，行列式不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1—21)$$

性质2 一行的公因子可以提出去，或者说以一数乘行列式的一行就相当于用此数乘此行列式。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1}^{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1—22)$$

如果行列式中一行为零，则行列式为零。

性质3 若某一行i是两组数的和，则此行列式就等于两个行列式的和，而两行列式的i行之外，均与原来行列式的对应行相等。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_1 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1—23)$$

性质4 若行列式中有两行相同，则行列式为零。

所谓两行相同，就是说两行的对应元素相等。如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{1—24}$$

性质5　如果行列式中两行成比例，则行列式为零。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{1—25}$$

性质6　把一行的倍数加到另一行，行列式不变。

设有行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把上式中k行的b倍加到i行中去，则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ba_{k1} & a_{i2}+ba_{k2} & \cdots\cdots & a_{in}+ba_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ba_{k1} & ba_{k2} & \cdots & ba_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \tag{1—26}
$$

性质7　对换行列式两行的位置，行列式反号。

设有行列式

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \tag{1—27}
$$

将k行元素加到i行中去

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots\cdots & a_{in}+a_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots\cdots & a_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

将i行乘以（－1），加到k行中去

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots\cdots & a_{in}+a_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{i1} & -a_{i2} & \cdots\cdots & -a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

将k行元素加到i行中去

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

将k行的公因子（－1）提出来，则有

$$
-\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

推论：由“性质1”知，各“性质”中所谈“行”，适用于“列”。

第二章 "川"字型诺模图原理

§1. 三点共线的条件

在U、V直角座标系中，有三条函数曲线 $f(x)$、$f(y)$和$f(z)$。在各函数曲线上各取一点$x_i(U_1、V_1)$、$y_i(U_2、V_2)$和$z_i(U_3、V_3)$。参看图2—1a。

三角形$x_iy_iz_i$围成的面积为

$$S=\frac{1}{2}\Big[(U_3-U_1)(V_1+V_3)+(U_2-U_3)(V_3+V_2)-(U_2-U_1)(V_1+V_2)\Big]$$

如果利用行列式表示时，则有

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} U_1 & V_1 & 1 \\ U_2 & V_2 & 1 \\ U_3 & V_3 & 1 \end{vmatrix}$$

如果x_i、y_i、z_i三点位于一条直线上，则其三角形围成的面积

$$S=0\quad,$$

即

$$\begin{vmatrix} U_1 & V_1 & 1 \\ U_2 & V_2 & 1 \\ U_3 & V_3 & 1 \end{vmatrix}=0。$$

因为$x_i(U_1、V_2)$是$f(x)$曲线（或直线）上的动点，$y_i(U_2、V_2)$是$f(y)$上的动点，z $(U_3、V_3)$是$f(z)$上的动点，所以行列式中的元素符号可以改写如下

$$\begin{vmatrix} U_x & V_x & 1 \\ U_y & V_y & 1 \\ U_z & V_z & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (2—1)$$

现在回过头来再看一下动点及其座标：

$$x_i\ (U_x、V_x)\ ;$$
$$y_i\ (U_y、V_y)\ ;$$
$$z_i\ (U_z、V_z)\ 。$$

x、y、z三座标依序居行于列式的第一、二、三行；U、V依序居于第一、二列 。座标恰好同行列式的阵容相对应。只是第三列均设数值 1 。

图2—1b是说明三点围成面积的示意图。

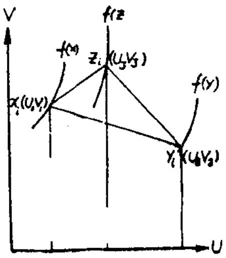

图　2—1a

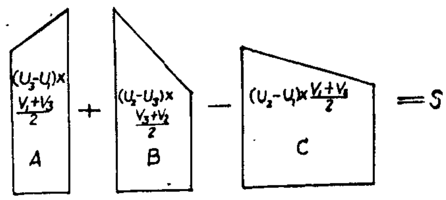

图　2—1b

例2—1

已知方程式

$$x+y=z\ , \tag{2—2}$$

试列出与其相对应的行列式。

解：

要能列出3×3行列式，必须配与一定数量的元素。为此令

$$x=U\ ;$$
$$y=V\ 。$$

则有联立方程组

$$\begin{cases} U-x=0 \\ V-y=0 \\ U+V-z=0 \end{cases}$$

以U、V为“变量”的元素，按列序就位，把x、y、z看做是自由项，

$$\begin{cases} U \qquad -x=0 \\ \quad V \quad -y=0 \\ U+V \quad -z=0 \end{cases}$$

提取“变量”U和V的系数，以x、y和z，列出行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 1 & 1 & -z \end{vmatrix}=0$$

用第二列值加入第1列

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ 1 & 1 & -x \\ 2 & 1 & -z \end{vmatrix}=0$$

用2去除第3行

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ 1 & 1 & -y \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{z}{2} \end{vmatrix}=0$$

用－1乘第3列