萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

自然哲學之數學原理

(三)

牛頓著

鄭太朴譯

商務印書館發行

自然哲學之數學原理

（三）

牛　頓　著

鄭太朴譯

漢譯世界名著

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者
王雲五

商務印書館發行

目　　次

第二册

第三册

第四册

第五册

第六册

第七册

第八册

第九册

第十册

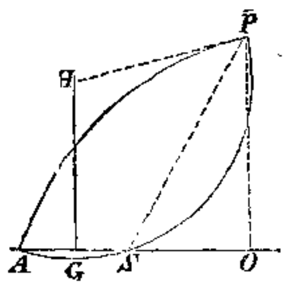
第六章　求已知軌道內運動之法

§68. 問題．　一物體在一已知拋物線內運動，今求其一定時間時之所在．

今設 S 爲焦點，H 爲主要之頂點，其扇形 APS 之面積

$$=4AS\cdot M;$$

此項面積爲方向半徑 SP 於出離頂點後或達到頂點時所作成者．由



第六十九圖

與之相比的時間，可以求得此面積．

今將 AS 於 G 平分之，作垂線 GH，並使其

$$=3M,$$

如是則以H爲中心，HS 爲半徑所作之圓，與拋物

線相交於所求之點 P.

今由 P 作垂線 PO, 則

$$HG^2+GS^2=HS^2=HP^2=GO^2+(PO-HG)^2$$

$$=GO^2+PO^2-2PO\cdot HG+HG^2 \quad (1)$$

或 $$2HG\cdot PO=GO^2+PO^2-GS^2$$

$$=(GO+GS)(GO-GS)+PO^2,$$

$$2HG\cdot PO=AO^2-2AG\cdot AO+PO^2 \quad (2).$$

按抛物線之方程

$$PO^2=4AS\cdot AO$$

$$=8AG\cdot AO \quad (3),$$

故 $$AO=\frac{PO^2}{4AS},$$

因而按(2)

$$2HG\cdot PO=AO\cdot\frac{PO^2}{4AS}-\tfrac{1}{4}PO^2+PO^2$$

$$=AO\cdot\frac{PO^2}{4AS}+\tfrac{3}{4}PO^2,$$

而 $$8GH\cdot AS=AO\cdot PO+3PO\cdot AS \quad (4)$$

或 $$\tfrac{4}{3}GH\cdot AS=\frac{AO+3AS}{6}\cdot PO \quad (5).$$

因 $$GH=3M,$$

$$AO+3AS=AO+3(AO-OS)$$

$$=4AO-3OS,$$

故按(5)

$$4\cdot AS\cdot M=\frac{4AO-3OS}{6}\cdot PO,$$

或　$$4AS\cdot M=\tfrac{2}{3}AO\cdot PO-\tfrac{1}{2}OS\cdot PO \quad (6)$$

但　$\tfrac{2}{3}AO\cdot PO=$ 拋物線形的面積

$$AOPA,$$

$$\tfrac{1}{2}OS\cdot PO=\triangle SOP,$$

故最後可得

$$APS=4\cdot AS\cdot M \quad (7)$$

此即所欲證者。

系 1. 所以　$GH:AS$

等於物體作成 AP 弧之時間，與由 A 至屬於 S 的縱坐標之點所用時間相比。

系 2. 因 ASP 圓恆經過運動的物體，故 G 之速度與物體在頂點時之速度相比，如

$$3:8.$$

GH 與 AP 線之比亦如是；於此，AP 表物體由

A 至 P 之時間內以頂點之速度所可作之直線.

系 3. 反之，我們亦可求得一物體作一已知弧 AP 所需之時間。

我們可作 AP 線，於其中點作一垂線，與 GH 相交於 H.

§ 69. 補題。 橢圓形之面積，不能用任意的直線分割，廣之，不能用項數次數有限的方程以得之.

在橢圓形之內取其任何一點，即以之爲極作一直線恆等速的旋轉。於此線上由極點出發有一點運動，其速度與圓內線長之平方相比.如是，該點即畫出一盤旋線，其匝數無定。

倘該線所分割的圓面，可用一有限的方程表出，則該點與極點之距離，與此面相比者，亦可用此方程表出。於是盤旋線之每一點可用此項有限方程得之，而每一位置已定的直線與該曲線之交點，亦可如是得之.但每一無限的直線與盤線相交之點無限，而用以決定任何二線交點之方程，均須根數與交點數相同而後可，故此方程必須有如是

高之次數.

二圓相交點之數爲二,故欲求其一交點時,須用二次的方程,而此方程同時並指出其他一交點.

二圓錐曲線之交點可有四,故就普通而論,須用四次方程以求得其一交點,但同時其他三交點亦卽可得之.蓋如分開的各求其交點,則因其所須定律及條件每次相同,故各次之運算無異.所以同一的運算法同時可得其一切交點.圓錐曲線與一三次曲線之交點共有六,故可一次用一六次方程得之;但二三次曲線之交點,則須用九次的方程以求之.倘不必定是如此,則空間內一切問題,均可析爲平面內之問題了.我這裏祇須提出某項曲線,其方程之次數不能析之使其低者.倘方程可使其析爲較低之次,則此曲線卽非爲單純,而由數曲線所合成者,其交點於是可分開各各求之.

同樣的理由,可知一直線與一圓錐曲線之二交點,須自一二次方程求之;一直線與一三次不可降低的曲線之三交點,須自一三次方程求之,與四

次不可降低的曲線之四交點則須自四次方程求之，等等．所以一直線與一盤旋線之無限多的交點，因此曲線係一單純而非複合者，故必須由無限次的方程求之．

今由極點作一垂線至該線，將此垂線并其相交線以極點爲中心旋轉之，則盤旋線之交點即相互易地，而其原來之第一點最近點經一轉後即成爲第二點，經二轉後即成爲第三點，等等．

方程之變，以割線所由以決定的量之變爲度．因該項量經旋轉後能回至原位，故方程亦即會復其原狀．所以一切交點均已包含在方程內，而其根之數無限多．從可知一直線與一盤旋線之交點，普通不能用有限的方程以求得之，故亦不能有此項橢圓形，其由一定線所界之面可用此種方程以表出之者．

假如極點與盤旋線上點間之距離，與所割的橢圓形之周相比，則可知周之長亦不能以有限方程表出之．我此處所指之橢圓形，係不與其觀的，

伸入無窮的圖形相切者.

系. 所以由焦點至運動點的方向半徑以作之橢圓,其面積不能由已知時間用有限的方程表出,故不能用幾何上有理的圖形之作法以求之. 我之所謂幾何上有理的圖形者, 係指其一切點均可用方程所決定的長, 即用長之複合關係, 以決定之者.其不能如是者(如螺旋線),我名之為幾何上無理的. 蓋長之相比能如一數目與他數目之相比或不如是者,即為算術上的有理或無理.所以與時間相比的橢圓之面, 我用一幾何上無理的曲線分割之,其法如下:

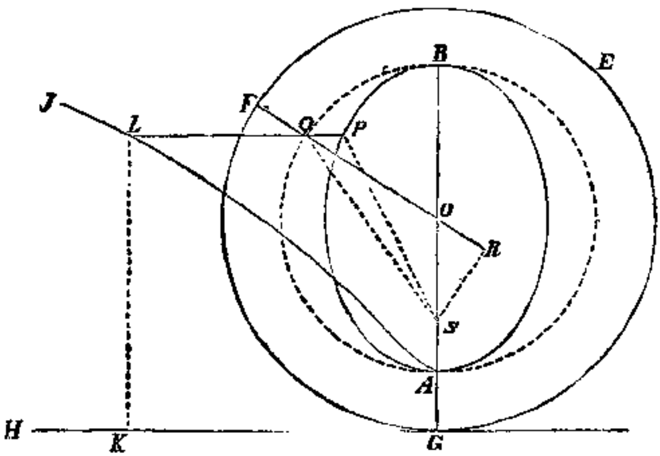
§70. 問題. 一物體於一橢圓上運動, 今求其一定時間時之所在.

設 APB 為此橢圓, A 為其主要頂點, S 為焦點, O 為中心點, P 則為所求的物體之所在.今將 OA 引長至 G, 使

$$OG:OA=OA:OS \quad (1),$$

並作 GH 與 AG 垂直,以 O 為中心, OG 為半

徑作圓 EFG. 今使 EFG 圓以 GH 爲底線於其上旋轉前進,則 A 點所作曲線爲 *Trochoide* ALJ. 取 GK 長,使其與 $GEFG$ 圓周之比,如物體經過 AP 橢圓弧所用之時間與環繞全橢圓之時間相



第　七　十　圖

比.今再作 KL 垂線,與 ALJ 相交於 L, 並引

LP與GK相平行,

則第一線與橢圓之交點 P, 即爲所求之點.

蓋如以 O 爲中心, OA 爲半徑作一半圓 AQB, 使其與 LP 相交於 Q, 並作 SQ 與 OQ 線,後者與

EFG 圓相交於 F，且作 SR 與 OQ 垂直，則橢圓之 APS 扇形與圓之扇形 AQS 相比.

但 $$AQS = OQA - OQS,$$

$$AQS = \tfrac{1}{2}OQ \cdot QA = \tfrac{1}{2}OQ \cdot RS \quad (2),$$

而因 $\tfrac{1}{2}OQ$ 爲已知兼爲常數，故 APS 之面積與

$$QA - RS \quad \text{相比}.$$

又因 $$SR : \sin AQ = OS : OQ = OS : OA$$

$$= OA : OG = AQ : GF \quad (3),$$

故亦 $$AQ - SR : GF - \sin AQ = AQ : GF$$

$$= OS : OA \quad (4)$$

以及 $$QA - SR = \frac{OS}{AO}(GF - \sin AQ),$$

而 AQS 與 $GF - \sin AQ$ 相比.

此即所欲明者.

§ 71. 附註. 因該曲線之不易畫出，故在實用上用其他作法爲便，此項作法與眞理甚相接近.

先作一角 B，使其

$$B : 57°,29578 = SH : AB \quad (1).$$

又作一線 L，使其與半徑相比，如