

圖書館
藏書三萬冊
實用研究
完全

文庫
一千種
手稿

自然哲學之數學原理

(三)

牛頓著
鄭太朴譯

華東車站圖書館
第一版

商務印書館發行

1.6
48.3

自然哲學之數學原理

(三)

牛頓著
鄭太朴譯

漢譯世界名著

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者

王雲五

商務印書館發行

目 次

原序

第二版序言

第三版序言

第一冊

說明.....	1
運動之基本定理或定律.....	21
第一編 第一章 論首末比之方法用此可 證明以後之理者.....	45
第二章 論向心力之求法.....	64

第二冊

第三章 論圓錐曲線上物體之運 動.....	1
第四章 論一個焦點已知時求圓 錐曲線的軌道之法.....	23

第五章 論焦點均未知時求軌道 之法.....	39
---------------------------	----

第三冊

第六章 求已知軌道內運動之 法.....	1
-------------------------	---

第七章 論物體之直線的上昇及 下墜.....	15
---------------------------	----

第八章 論物體受向心力之推動 而運行時求其軌道之 法.....	34
---------------------------------------	----

第九章 論動的軌道內物體之運 動以及回歸點之運動.....	44
----------------------------------	----

第十章 論物體在已知面上之運 動及擺錘運動.....	70
-------------------------------	----

第四冊

第十一章 論球形物體之運動其間 有向心力互相吸引.....	1
----------------------------------	---

第十二章	論球形物體之吸引力	46
第十三章	論非球形物體之吸引 力	84

第五冊

第十四章	論傾向大物體的向心力 所推動的小物體之運 動	1
第二編 第一章	論某項物體之運動此項 物體受一種與速度相比 的抵抗力者	17
第二章	論某項物體之運動此項 物體所受之抵抗力與速 度之平方相比	35
第三章	論物體在抵抗力下之速 動此抵抗力之一部分與 速度相比一部分則與其 平方相比	92

第六册

- 第四章 論物體在中介物內之循環運動 1
 第五章 論流體之密度及壓榨以及流體靜力學 14
 第六章 論擺錘之運動及抵抗 39

第七册

- 第七章 論流體之運動及拋出的物體之抵抗力 1
 第八章 論流體內之傳達運動 68

第八册

- 第九章 論流體之圓形運動 1
 第三編 論宇宙系統 21
 研究自然之規律 22
 現象 26
 第一章 論宇宙系統之原因 36

第九册

第二章 論月球差失之大小……	1
第三章 論海潮之大小…………	65
第四章 論歲差…………………	80

第 十 册

第五章 論彗星…………………	1
----------------	---

第六章 求已 知軌道內運動之法

§ 68. 問題。 一物體在一已知拋物線內運動，今求其一定時間時之所在。

今設 S 為焦點， H 為主要之頂點，其扇形

APS 之面積

$$= 4AS \cdot M;$$

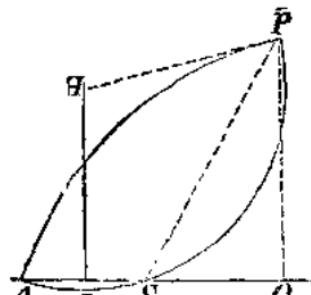
此項面積為方向半徑 SP 於出離頂點後或達到頂點時所作成者。由

與之相比的時間，可以求得此面積。

今將 AS 於 G 平分之，作垂線 GH ，並使其

$$= 8M,$$

如是則以 H 為中心， HS 為半徑所作之圓，與拋物



第六十九圖

線相交於所求之點 P .

今由 P 作垂線 PO , 則

$$\begin{aligned} HG^2 + GS^2 &= HS^2 = HP^2 = GO^2 + (PO - HG)^2 \\ &= GO^2 + PO^2 - 2PO \cdot HG + HG^2 \quad (1) \end{aligned}$$

或 $2HG \cdot PO = GO^2 + PO^2 - GS^2$

$$= (GO + GS)(GO - GS) + PO^2,$$

$$2HG \cdot PO = AO^2 - 2AG \cdot AO + PO^2 \quad (2).$$

按拋物線之方程

$$\begin{aligned} PO^2 &= 4AS \cdot AO \\ &= 8AG \cdot AO \quad (3), \end{aligned}$$

故 $AO = \frac{PO^2}{4AS}$,

因而按(2)

$$\begin{aligned} 2HG \cdot PO &= AO \cdot \frac{PO^2}{4AS} - \frac{1}{2}PO^2 + PO^2 \\ &= AO \cdot \frac{PO^2}{4AS} + \frac{3}{4}PO^2, \end{aligned}$$

而 $8GH \cdot AS = AO \cdot PO + 3PO \cdot AS \quad (4)$

或 $\frac{1}{4}GH \cdot AS = \frac{AO + 3AS}{6} \cdot PO \quad (5).$

因 $GH = 3M,$

$$\begin{aligned}AO + 3AS &= AO + 3(AO - OS) \\&= 4AO - 3OS,\end{aligned}$$

故按(5)

$$4 \cdot AS \cdot M = \frac{4AO - 3OS}{6} \cdot PO,$$

或 $4AS \cdot M = \frac{2}{3}AO \cdot PO - \frac{1}{2}OS \cdot PO \quad (6)$

但 $\frac{1}{2}AO \cdot PO =$ 抛物線形的面積

$$AOPA,$$

$$\frac{1}{2}OS \cdot PO = \triangle SOP,$$

故最後可得

$$APS = 4 \cdot AS \cdot M \quad (7)$$

此即所欲證者。

系 1. 所以 $GH : AS$

等於物體作成 AP 弧之間，與由 A 至屬於 S 的縱坐標之點所用時間相比。

系 2. 因 ASP 圓恆經過運動的物體，故 G 之速度與物體在頂點時之速度相比，如

$$8 : 8.$$

GH 與 AP 線之比亦如是；於此， AP 表物體由

A 至 P 之間內以頂點之速度所可作之直線。

系 3. 反之，我們亦可求得一物體作一已知弧 AP 所需之時間。

我們可作 AP 線，於其中點作一垂線，與 GH 相交於 H .

§ 69. 補題。 橢圓形之面積，不能用任意的直線分割，廣之，不能用項數次數有限的方程以得之。

在橢圓形之內取其任何一點，即以之為極作一直線恆等速的旋轉。於此線上由極點出發有一點運動，其速度與圓內線長之平方相比。如是，該點即畫出一盤旋線，其匝數無定。

倘該線所分割的圓面，可用一有限的方程表出，則該點與極點之距離，與此面相比者，亦可用此方程表出。於是盤旋線之每一點可用此項有限方程得之，而每一位置已定的直線與該曲線之交點，亦可如是得之。但每一無限的直線與盤線相交之點無限，而用以決定任何二線交點之方程，均須根數與交點數相同而後可，故此方程必須有如是

高之次數。

二圓相交點之數爲二，故欲求其一交點時，須用二次的方程，而此方程同時並指出其他一交點。

二圓錐曲線之交點可有四，故就普通而論，須用四次方程以求得其一交點，但同時其他三交點亦即可得之。蓋如分開的各求其交點，則因其所須定律及條件每次相同，故各次之運算無異。所以同一的運算法同時可得其一切交點。圓錐曲線與一三次曲線之交點共有六，故可一次用一六次方程得之；但二三次曲線之交點，則須用九次的方程以求之。倘不必定是如此，則空間內一切問題，均可析爲平面內之問題了。我這裏祇須提出某項曲線，其方程之次數不能析之使其低者。倘方程可使其析爲較低之次，則此曲線即非爲單純，而由數曲線所合成者，其交點於是可分開各各求之。

同樣的理由，可知一直線與一圓錐曲線之二交點，須自一二次方程求之；一直線與一三次不可降低的曲線之三交點，須自一三次方程求之，與四

次不可降低的曲線之四交點則須自四次方程求之，等等。所以一直線與一盤旋線之無限多的交點，因此曲線係一單純而非複合者，故必須由無限次的方程求之。

今由極點作一垂線至該線，將此垂線并其相交線以極點為中心旋轉之，則盤旋線之交點即相互易地，而其原來之第一點最近點經一轉後即成為第二點，經二轉後即成為第三點，等等。

方程之變，以割線所由以決定的量之變為度。因該項量經旋轉後能回至原值，故方程亦即會復其原狀。所以一切交點均已包含在方程內，而其根之數無限多。從可知一直線與一盤旋線之交點，普通不能用有限的方程以求得之，故亦不能有此項橢圓形，其由一定線所界之面可用此種方程以表出之者。

假如極點與盤旋線上點間之距離，與所割的橢圓形之周相比，則可知周之長亦不能以有限方程表出之。我此處所指之橢圓形，係不與其貌的，

伸入無窮的圖形相切者。

系。所以由焦點至運動點的方向半徑以作之橢圓，其面積不能由已知時間用有限的方程表出，故不能用幾何上有理的圖形之作法以求之。我之所謂幾何上有理的圖形者，係指其一切點均可用方程所決定的長，即用長之複合關係，以決定之者。其不能如是者（如盤旋線），我名之為幾何上無理的。蓋長之相比能如一數目與他數目之相比或不如是者，即為算術上的有理或無理。所以與時間相比的橢圓之面，我用一幾何上無理的曲線分割之，其法如下：

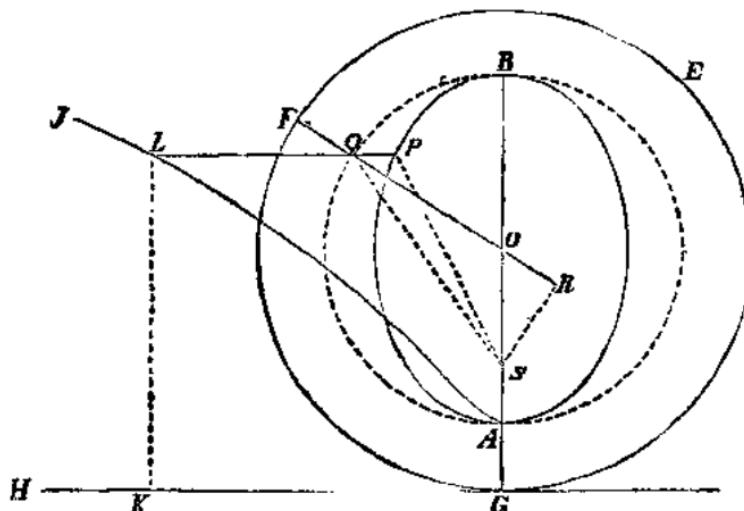
§ 70. 問題。 一物體於一橢圓上運動，今求其一定時間時之所在。

設 APB 為此橢圓， A 為其主要頂點， S 為焦點， O 為中心點， P 則為所求的物體之所在。今將 OA 引長至 G ，使

$$OG : OA = OA : OS \quad (1),$$

並作 GH 與 AG 垂直，以 O 為中心， OG 為半

徑作圓 EFG . 今使 EFG 圓以 GH 為底線於其上旋轉前進，則 A 點所作曲線為 *Trochoide* ALJ . 取 GK 長，使其與 $GEFG$ 圓周之比，如物體經過 AP 橢圓弧所用之時間與環繞全橢圓之時間相



第七十圖

比。今再作 KL 垂線，與 ALJ 相交於 L ，並引
 LP 與 GK 相平行，

則第一線與橢圓之交點 P ，即為所求之點。

蓋如以 O 為中心， OA 為半徑作一半圓 AQB ，
 使其與 LP 相交於 Q ，並作 SQ 與 OQ 線，後者與

EFG 圓相交於 F , 且作 SR 與 OQ 垂直, 則橢圓之 APS 扇形與圓之扇形 AQS 相比.

$$\text{但 } AQS = OQA - OQS,$$

$$AQS = \frac{1}{2}OQ \cdot QA = \frac{1}{2}OQ \cdot RS \quad (2),$$

而因 $\frac{1}{2}OQ$ 為已知兼為常數, 故 APS 之面積與 $QA - RS$ 相比.

$$\begin{aligned} \text{又因 } SR : \sin AQ &= OS : OQ = OS : OA \\ &= OA : OG = AQ : GF \quad (3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故亦 } AQ - SR : GF - \sin AQ &= AQ : GF \\ &= OS : OA \quad (4) \end{aligned}$$

$$\text{以及 } QA - SR = \frac{OS}{AO}(GF - \sin AQ),$$

而 AQS 與 $GF - \sin AQ$ 相比.

此即所欲明者.

§ 71. 附註. 因該曲線之不易畫出, 故在實用上用其他作法為便, 此項作法與真理甚相接近.

先作一角 B , 使其

$$B : 57^\circ, 29578 = SH : AB \quad (1).$$

又作一線 L , 使其與半徑相比, 如