

中性原子的玻色—爱因斯坦凝聚

郝柏林

(中国科学院理论物理研究所 北京 100080)

提 要

1995年物理学的一件大事是在铷、钠等中性原子中实现了玻色—爱因斯坦凝聚。本文简要综述其历史背景、实验进展和理论挑战。

一、引 言

1995年度的一件重大科学新闻,是在爱因斯坦理论预言^[1]之后70年,终于在实验室里看到了中性原子的玻色—爱因斯坦凝聚(以下简称BEC)。首先,美国科罗拉多大学和国家标准局合办的实验天体物理研究所(JILA)在7月13日,即《科学》杂志发表其研究报道^[2]的前一天,发布新闻说在冷却到绝对温度170nK(毫微度)的碱金属铷(⁸⁷Rb)蒸气中观测到了BEC。休斯顿市Rice大学的一个小组接着在8月底发表文章^[3],说在锂(⁷Li)中看到了BEC的迹象。最后,麻省理工学院在11月间宣布^[4],在钠(²³Na)蒸气中实现了BEC。12月22日在美国《科学》杂志把BEC选为1995年度的“分子”。

锂⁷Li原子在上述实验条件下的有效相互作用为吸引^[5]。人们对于是否能在其中实现BEC还有怀疑和争论。文章[3]的作者后来也说:“我们确信看到了高度简并的玻色气体,但我们承认还未能确定无疑地演示存在着BEC”^[6]。铷和钠的实验结果看来是正确的,而且目前得以凝聚越来越多的原子,进一步着手作比热等物理测量。一个新的物理研究领域已经开始,实验和理论文章多如雨后春笋^[7]。

二、历史回顾

1924年6月24日,30岁的印度物理教师玻色(S. Bose)寄送一份手稿给爱因斯坦,并附信说:“尊敬的先生,我冒昧地送上所附手稿请您审阅。我迫切地想听到您的意见。我试图不依赖经典电动力学来推导普朗克(黑体辐射)定律的系数 $8\pi\nu^2/c^3$,办法是假定相空间最基本区域的体积为 h^3 ,我的德文不足以翻译此稿。如果你认为此文值得发表并安排在((德国)物理杂志上)上,我将不胜感谢。”^[8]。

爱因斯坦亲自把玻色的手稿译成德文,送去发表^[9],并在文末加注说:“我以为玻色对普朗克公式的推导乃是一项重大进步。所用方法也将导致理想气体的量子理论,我将另行阐述”。爱因斯坦接着发表了文章^[1],其中第二篇里提出了原子将“凝聚”的大胆预言。

原来爱因斯坦在 1905 年关于光电效应的著名论文中,第一次把普朗克的“能量量子”概念推广到光,虽然“光子”一词直至 1926 年才出现。玻色 1924 年推导的关键,是用光子状态的计数,而不是光子计数。爱因斯坦立即把状态计数的思想用到组成理想气体的原子,指出遵从这种统计的气体将在一定的转变温度 T_c 下发生凝聚:部分原子将落入动能为零的最低量子态,其他原子则组成“饱和理想气体”。当时两种量子统计的存在、统计同多粒子波函数在粒子置换下对称性的关系,以及对称和自旋的关系等等,都尚未被认识。难怪爱因斯坦曾把电子气体也列入可能观察此种凝聚的对象之一。当时相变也没有被作为一类深刻的物理问题,人们自然未意识到 BEC 乃是首次由统计物理学推论出的一种相变现象。

事实上人们也不知道到哪里去寻求这类“凝聚”现象。直到 30 年代,伦敦(F. London)才指出,超流和超导现象可能是 BEC 的表现。不过这两类现象都发生在强相互作用的体系中。后来知道,超流液氦中只有约 10% 的原子凝聚。超导与 BEC 的关系要经过电子的配对,涉及更复杂的相互作用。只有近理想或弱相互作用玻色气体的 BEC,才更易于同理论比较,但一直没有实例^[10]。“结果,量子理想气体、甚至量子弱相互作用气体都从来没有被观察到。统计力学的这一重要分支从来未经实验检验”^[11]。

近几年虽然在氧化亚铜中观察到激子“气体”的 BEC^[12],但其理论分析并不直接。

另一方面,几十年来 BEC 的理论概念被应用到物理学的许多领域。从超流和超导,核物质和中子星,到介子凝聚体甚至 Higgs 玻色子的凝聚体,人们只能限于从实验数据或理论模型的间接推论。一旦在实验室里制备可以与理论直接比较的弱相互作用玻色系统,这自然成为物理学的一件大事。

三、理想玻色气体的凝聚

为了以后叙述方便,我们在此简单回顾一下量子理想气体的统计性质^[13]。每个粒子的状态由动量 P , 能量 $\epsilon_P = P^2/2m$ 刻画; n_P 为处于此状态的粒子数。对于粒子数可变的系统,我们从巨正则系综的配分函数 Ω 出发。由于没有相互作用,

$$\Omega = \sum_P \Omega_P$$

而

$$\Omega_P = -K_B T \log \sum [e^{\beta(\mu - \epsilon_P)}]^{n_P} \quad (1)$$

其中 K_B 是玻尔兹曼常数, T 是温度, $\beta = 1/K_B T$, μ 是化学势。

费米粒子不合群, $n_P = 0, 1$, 子是

$$\Omega_p = -1/\beta \log(1 + e^{\beta(\mu - \epsilon_p)})$$

对化学势求偏导数 $-\partial\Omega_p/\partial\mu$ 后,得平均占有数的费米分布。玻色粒子不拘多寡,随遇而安, $n_p = 0, 1, 2, \dots, \infty$ 。对于(1)式中的无穷求和,收敛条件是

$$e^{\beta(\mu - \epsilon_p)} < 1$$

由于此条件在 $\epsilon_p = 0$ 时也应成立,玻色气体的化学势必须满足

$$\mu \leq 0 \quad (2)$$

完成(1)式中的求和,得到

$$\Omega_p = 1/\beta \log(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_p)})$$

于是,平均占有数的玻色-爱因斯坦分布为:

$$n_p = -\partial\Omega_p/\partial\mu = 1/[e^{-\beta(\mu - \epsilon_p)} - 1]$$

(我们今后只使用平均占有数,也以同一个符号 n_p 表示)。

一般说来,玻色粒子有两种来源。一种或是某种经典波的量子化,或是传递相互作用的场量子;它们的数目没有限制,因此化学势为零。另一种则是由费米粒子组成的复合粒子,例如 ^{87}Rb 、 ^7Li 、 ^{23}Na 这些中性原子;它们的数目 N 是确定的,化学势也由此决定:

$$N = \sum n_p \quad (3)$$

把求和变成对动量的积分,再变成无量纲的能量积分,得到

$$n = N/V = [g(mK_B T)^{3/2}]/[2^{1/2}\pi^2\hbar^3] \int_0^\infty [Z^{1/2}dZ]/[e^{Z - \beta\mu} - 1] \quad (4)$$

式中 $g = 2S + 1$ 。我们以后只写自旋 $S = 0$, $g = 1$ 的情形。(4)式是粒子数 N 一定时,决定

化学势对温度依赖性 $\mu(T)$ 的隐函数关系。由于(2)式的限制, μ 在一定温度 T 下从负值趋向零,如图 1 所示。

当 $\mu = 0$ 时,(4)式中的积分归为伽玛函数和黎曼函数的乘积,即 $\Gamma(3/2)\zeta(3/2) = 2.312$ 。这乃是在给定密度 n 下求临界温度 T_c 、或在给定温度 T 下求临界密度 n_c 的关系式。这个式子还可以写成

$$n = \zeta(3/2)\lambda_{DB}^{-3}$$

其中热德布罗意波长的定义是

$$\lambda_{DB}^2 = 2\pi\hbar^2/mK_B T$$

即能量为 $K_B T$ 的原子的德布罗意波长。把(5)式写成

$$\rho \equiv n\lambda_{DB}^3 = \zeta(3/2)$$

ρ 特称为相空间密度。 $\rho = \zeta(3/2) = 2.612$ 是理想玻色气体开始 BEC 的临界条件,在 BEC 状态总有 $\rho > 2.612$ 或

$$\lambda_{DB} > n^{-1/3} \quad (5)$$

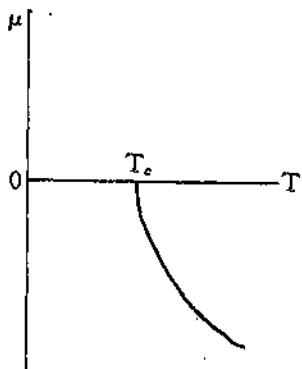


图 1 玻色系统化学势示意

即粒子的平均间距小于热德布罗意波长 λ_{DB} 。

当 $T < T_c$ 时, μ 继续为零, 与(4)式相应公式的右面变得比 N/V 还小。这些缺失的粒子跑到哪里去了? 原来这时(3)式中把求和变成积分已不合法, 因为许多粒子“凝聚”到 $P=0$ 即 $\epsilon_P=0$ 的状态, 必须单独处理:

$$N = N_{\epsilon=0} + N_{\epsilon>0}$$

由(4)式得到的只是 $N_{\epsilon>0}$, 它可以写成

$$N_{\epsilon>0} = N(T/T_c)^{3/2},$$

于是

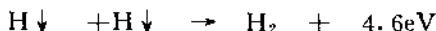
$$N_{\epsilon=0} = N(1 - (T/T_c)^{3/2}). \quad (6)$$

可见当 $T=0$ 时, 全部粒子都在能量 $\epsilon=0$ 的凝聚体中。

为了实现 BEC, 必须提高相空间密度; 办法是降低温度 T 或增大粒子密度 n 。

四、实验简述

实现 BEC 所需的实验技术, 基本上是在自旋极化的氢原子气体里寻求 BEC 的十五努力中形成的。原来早在 1959 年 Hecht 就指出^[14], 强磁场中的自旋极化氢原子气体中可能发生 BEC。后来进一步的分析^[15]表明, 这种气体可以保持气态到绝对零度。1980 年 Silvera 和 Walraven^[16]首先在实验室里得到自旋极化的氢原子气体, 此后寻求 BEC 的努力持续不断。最初的办法是激光冷却和激光陷阱, 后来又加上蒸发冷却和磁场约束。90 年代初麻省理工学院的最好结果是: 温度降低到 100 μ K (微度), 密度达到 $8 \times 10^{13} \text{cm}^{-3}$ 。在此密度下 BEC 的临界温度约为 30 μ K。看来目标已近在咫尺, 而实验工作裹步不前。原来最大障碍是极化氢原子会复合成氢分子:



复合速率比例于密度的三次方, 从而限制了密度增加; 发热则妨碍进一步降低温度。关于激光冷却和陷阱, 蒸发冷却和磁场约束, 以及自旋极化氢原子的详细讨论, 可参看 [17]。

最近十年, 碱金属蒸气的激光冷却和约束有很大进步。从室温的蒸气开始, 用光学方法可以把相空间密度提高 16 个数量级, 但距离实现 BEC 还差 5—6 个量级。这个差距是靠磁约束和蒸发冷却克服的。

磁约束利用原子磁偶极在磁场梯度下所受的力。原子运动速度足够低时, 其磁能级可以绝热地追随磁场的变化, 一部分处于合适的 Zeeman 子能级的原子被推向磁场最小处, 实现约束。然而, 靠近磁场最小值为零的区域, Zeeman 能级近乎简并, 被约束的原子容易非绝热跃迁到非约束能级上, 从约束区逃逸。在实现 BEC 的实验中, 如何堵住约束中心的“漏洞”, 曾是一个关键的技术问题。

JILA 实验在温度降到 170 nK 时, 开始发生 BEC 转变。约束场中心的铷原子速度从高斯分布变为非高斯的尖峰。他们“堵漏”的办法, 是用一个射频交变场令约束磁场象陀

螺那样旋转起来,使得中央部分时间平均后的磁场不再为零^[2]。他们把这种约束势称为 TOP (Time-averaged Orbital Potential)。凝聚体中原子密度达到 $2.5 \times 10^{13} \text{cm}^{-3}$, 持续时间约 15 秒。

Rice 大学的小组在 400nK 看到 BEC 迹象时, 锂原子密度为 $2 \times 10^{12} \text{cm}^{-3}$, 原子总数约 20 万个。他们加了一个恒定的偏置磁场来“堵漏”^[3]。

MIT 的优势是使用了一种新的约束场构形, 并用另一束激光形成光学“塞子”^[4]。他们使钠原子密度达到 10^{14}cm^{-3} 以上, 从而在 $2 \mu\text{K}$ 就看到 BEC。所使用的位势不具备轴对称, 同时形成了两块凝聚体。人们立即想到凝聚体之间的干涉和隧道效应。但目前光学塞子的尺寸仍妨碍这些效应出现。MIT 最近的实验, 凝聚了 5 百万个钠原子, 形状为长约三分之一毫米的短柱体^[18]。

五、理论挑战

爱因斯坦所讨论的是理想玻色气体在动量空间中的凝聚, 在实际空间中情形如何呢? 朗道和栗佛希兹在其《统计物理学》一书中, 就曾强调指出: “当然, 气体中并不发生实际凝聚”^[13]。然而, 1995 年人们观察到的, 正是被约束在有限空间中的气体的实际凝聚。这就必须求助于能反映坐标依赖性的弱相互作用玻色气体理论。

原则上可以从描述玻色系统的“巨正则”哈密顿出发:

$$K = \int d^3r \psi^\dagger (T + V(r) - \mu) \psi + g \int d^3r_1 d^3r_2 \psi^\dagger \psi^\dagger U(r_1 - r_2) \psi \psi \quad (7)$$

其中 ψ 和 $\psi^\dagger$ 是遵从玻色对易关系的场算子, T 是动能算子, U 是二体作用势, V 是外加位势, 例如中性原子所受到的约束势。这种一般形式的理论走不了很远。必需引入各种近似, 才能作进一步分析。首先, 1947 年玻戈留波夫^[19]引入了一直沿用至今的近似: 既然凝聚体中包含了宏观数量的粒子, ψ 算子有很大的经典成分 Φ , 可以写成

$$\psi = \Phi + \varphi, \quad (8)$$

算子对易关系都转到量子修正 φ 上。把 (8) 代入 (7) 中, 得到包含 φ 的各种幂次的项。其中只含 Φ 的部分乃是经典的能量泛函。其次, 把二体作用 $U(r_1 - r_2)$ 换成 $\delta(r_1 - r_2)$ 。这样得到的经典能量泛函

$$F = \int d^3r \Phi^\dagger (T + V(r) - \mu) \Phi + g \int d^3r \Phi^\dagger \Phi^\dagger \Phi \Phi \quad (9)$$

可以仿照朗道——金兹堡的唯象超导理论, 直接写出来^[20]。从这个能量泛函可以得到含时间或不含时间的非线性薛定格方程 (NLSE), 也称为 Gross-Pitaevskii 方程。

目前已发表的用不含时间的 NLSE 求解凝聚体形状的文章^[21], 算法不妥, 结果可疑。事实上, 这些作者已经转用含时间的 NLSE, 不过这时要处理的是偏微分方程^[22]。另一种求解方法是寻找适当的试探函数使能量泛函极小化^[23]。这相当于求解含虚时间的 NLSE。这些计算都只给出 $T=0$ 时凝聚体的形状。为了分析 $T>0$ 的情形, 必须考虑 (7) 中的高阶项所导致的无穷方程组, 计入凝聚体内外粒子的相互作用。过去人们只针

对自旋极化原子氢作过此种尝试^[24,25]。

只含经典数的 Gross-Pitaevskii 方程,可以反映 $T=0$ 时约束势中凝聚体的形状。例如,笔者用能量泛函极小化方法,对于处在大致相当于 JILA 实验的各向异性轴对称约束势中的 500 个铷原子得到如图 2 所示的结果。由于横向位势稍弱,凝聚体首先沿横

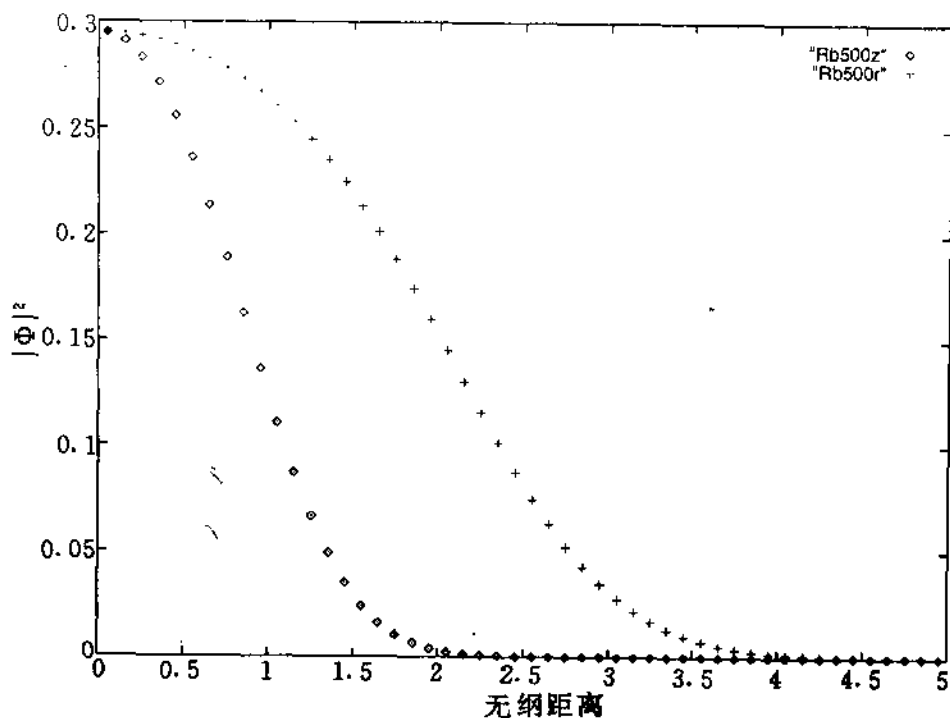


图 2 各向异性约束势中 500 个铷原子的密度分布

向膨胀。

增加原子数目时,凝聚体继续以横向为主膨胀,中心部位的密度降低。图 3 显示从 100 到 50000 个铷原子,凝聚体横向分布的变化。它表明当原子数目继续增加时,凝聚体将在实际空间中成为极其延展的一片,从而与动量空间中的凝聚图象一致。

这些变化当然同 Baym 等^[26]从能量泛函出发,所作的定性分析一致。

另一套处理非理想玻色气体的理论,是杨振宁、黄克孙、李政道、Luttinger 等人在 50 年代后期发展的刚球模型^[27]。他们推广了费米提出的赝势方法,严格地得到按 na^3 展开的前几项,其中 a 是刚球直径。然而,这是无穷空间中均匀气体的理论,不能直接用来讨论约束势中的凝聚问题。

最近,邹祖德、杨振宁和余理华指出^[28],为了把这一理论用于非均匀约束场里的玻

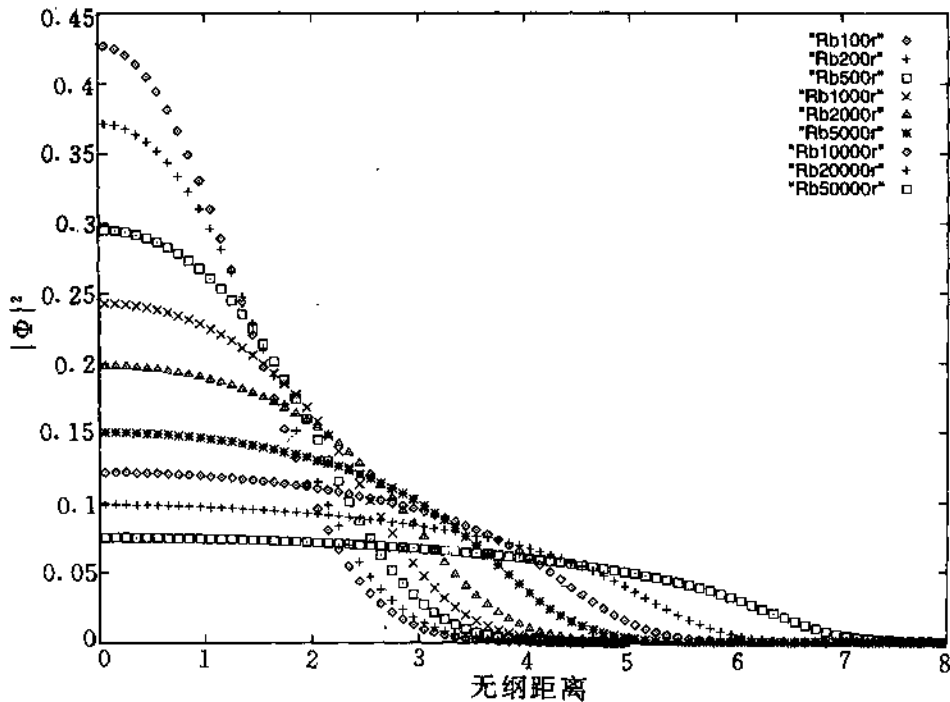


图3 从100到50000个铷原子凝聚体横向分布的变化

色气体,只要引用局部密度近似^[29],其实质是 Thomas—Fermi 方法。只要约束势中基态波函数的宽度远小于该势场中能量为 $K_B T$ 的经典振子的振幅,就可以把势场分割成许多元胞,认为每个元胞中势场为常数,把出现在空间均匀理论中的化学势 μ 换成 $\mu - V(r)$,参看(9)式中化学势的出现方式。这也就是将空间均匀理论所有公式中的逸度 $\xi = e^{\beta\mu}$ 均换成局域逸度 $\xi = \xi e^{-\beta V(r)}$ 。[28]用此法计算了凝聚体的密度分布。最近,他们又进一步计算了凝聚体的动量分布^[30],这是第一个关于动量分布的计算,其中使用了 Wigner 当年引入的动量坐标双分布。

Gross—Pitaevskii 方程本质上是一种平均场近似。当原子数目进一步增加时,从原则和数值两方面都有一定问题。

具有吸引相互作用的玻色粒子,如 ^7Li 或 ^{85}Rb ,能否发生 BEC,是另一个理论挑战。早就知道,BEC 与原子间的排斥力相容,而吸引力会使玻色气体塌缩成液体,在 BEC 之前先发生普通的一类相变^[31]。然而在约束势场中,有可能维持一个粒子数不多的亚稳态凝聚体^[32]。用能量泛函极小化方法,针对锂的参数可以得到如图 4 所示的结果。注意这里随粒子数增加,中心部分的密度上升。对这一组参数,原子数目达到 2700 个时,中

心密度成为 δ -函数式的尖峰。这说明原来的方程已不适用,必须更准确地处理近距离的相互作用。特殊地说,不能简单地把(7)式中 $U(r_1-r_2)$ 换成 δ -函数。有一种可能性

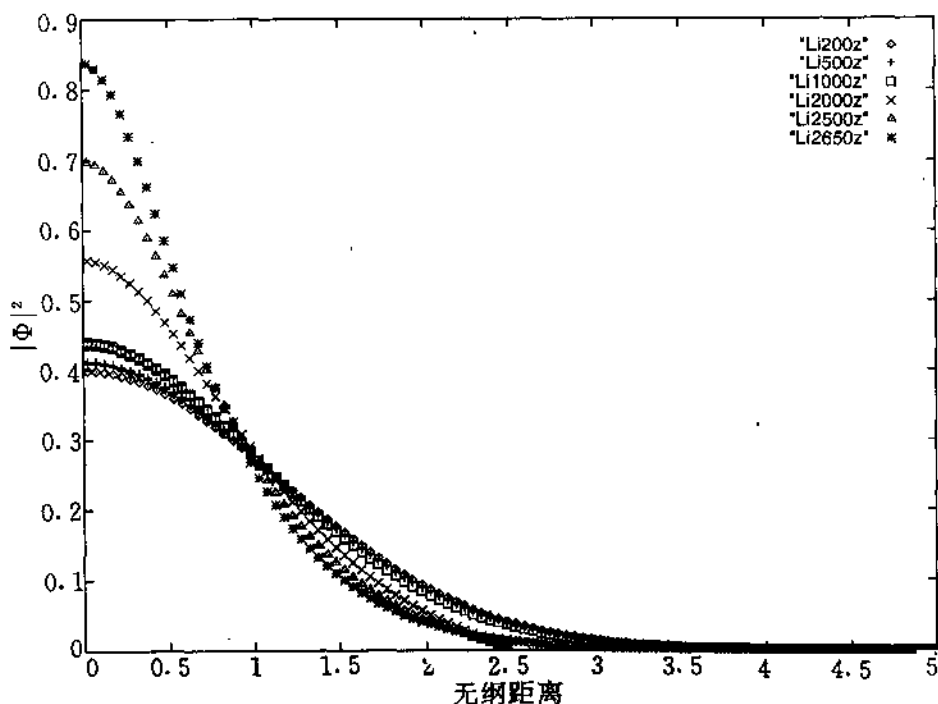


图4 从200到2650个锂原子凝聚体横向分布的变化

是把它换成腰势算子。更严格的分析表明,锂的亚稳凝聚体中只有约1440个原子。

最后还可以指出,目前实验和局部密度近似理论处理的 BEC 都还是“高温”现象,即参数

$$\epsilon = \hbar\omega/K_B T < 1$$

零点振动能小于热运动能的情形。在相反的条件下,单个原子的零点振动可能使它们彼此保持距离,排斥和吸引作用的差别也许不那么显著。一旦发生 BEC,整个凝聚体作为整体,零点振动又变得微不足道。这基本上是 $T=0$ 附近的现象,关键是在实验中防止其它相变抢到 BEC 之前。目前还未见对此作理论分析。

六、展 望

元素周期表中大约有四分之三的稳定同位素是玻色子。目前只对一些碱金属开始实现 BEC,不久将来可能对氢原子也取得进展。将来如能对更多的玻色原子实现 BEC,那就会有极多的比较和调整的余地。现在人们已经在谈论原子激光器或玻色激光器

(*boson*)。一旦实现,其意义当然远大于又多了一大批宏观量子态。

BEC 的进展会大为推动已经沉寂多年的玻色系统多体理论,特别是非均匀玻色气体的理论。这里的任何突破,都会反过来促进超流和超导理论。

本文取材,部分地得益于杨振宁教授和 C. E. Wieman 博士的学术报告。读者可通过互联网^[7]查阅最近发展。

参 考 文 献

- [1] A. Einstein, *Sitzungsber. Kl. Preuss. Akad.* **1924** (1924) 261; **1925** (1925) 3.
- [2] M. H. Anderson, J. R. Enscher, M. R. Methews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269** (1995) 198.
- [3] C. C. Bradley, C. A. Sacket, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 1687.
- [4] K. B. Davis, M. — O. Meuves, M. R. Anderson, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3696.
- [5] A. J. Moerdijk, W. C. Stwalley, R. G. Hulet, and B. J. Verhaar, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 40; E. R. Abraham, W. I. McAlexander, C. A. Sackett, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 1315.
- [6] 参看 *Physics Today*, March 1996, p. 18.
- [7] 全球计算机网络 WWW 中有一些不断更新的 BEC 文献目录,例如: <http://amo.phy.gasou.edu/bec.html/bibliography.html>.
- [8] 关于玻色的故事可参看: W. A. Blanpied, *Am. J. Phys.* **40** (1972) 1212.
- [9] S. N. Bose, *Z. Phys.* **26** (1924) 178.
- [10] 弥散在维克玻璃 (Vycor glass) 中的液氦,可以表现出从强到弱相互作用玻色系统的行为,参看 B. C. Crooker, B. Hebral, E. N. Smith, Y. Takano, and J. D. Reppy, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 666. 和 P. B. Weichman, M. Rasolt, M. E. Fisher, and M. J. Stephen, *Phys. Rev.* **B33** (1986) 4632.
- [11] T. J. Greytak, and D. Kleppner, in *New Trends in Atomic Physics*, ed. by G. Grynberg and R. Stora, North-Holland, 1984, vol. **2**, 1125—1130.
- [12] D. Snoke, J. P. Wolfe, and A. Mysyrowicz, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 827. J. L. Lin, and J. P. Wolfe, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 1222.
- [13] L. D. Landau, and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Part I, Pergamon Press, 1980.
- [14] C. E. Hecht, *Physica* **25** (1959) 1159.
- [15] W. C. Stwalley, and L. H. Nosanov, *Phys. Rev. Lett.* **36** (1976) 910.
- [16] I. F. Silvera, and J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980) 164.
- [17] A. Griffin, D. W. Snoke, and S. Stringari, eds. *Bose — Einstein Condensation*, Cambridge University Press, 1995.
- [18] G. Taube, *Science* **272** (14 June 1996) 1587.
- [19] N. N. Bogoliubov, *J. Phys. USSR* **11** (1947) 23.
- [20] V. L. Ginzburg, and L. P. Pitaevskii, *Soviet Phys. JETP* **34** (1958) 858.
- [21] M. Edwards, and K. Burnett, *Phys. Rev. A* **51** (1995) 1382.

- [22] P. A. Rupecht, M. J. Holland, K. Burnett, and M. Edwards, *Phys. Rev. A* **51** (1995) 4707.
- [23] F. Dalfovo, and S. Stringari, "Bosons in anisotropic traps: ground state and vertices", preprint cond-mat/9510142.
- [24] V. V. Goldman, I. F. Silvera, and A. J. Leget, *Phys. Rev. B* **24** (1981) 2870.
- [25] D. A. Huse, and E. D. Siggia, *J. Low Temp. Phys.* **46** (1982) 137.
- [26] G. Baym, and C. J. Pethick, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 6.
- [27] K. Huang, C. N. Yang, and J. M. Luttinger, *Phys. Rev.* **105** (1957) 776. 以及综述 C. N. Yang, *Physica* **26** (1960) S49 所引文章.
- [28] T. T. Chou, C. N. Yang, and L. H. Yu, *Phys. Rev. A* **53** (1996) 4257.
- [29] J. Oliva, *Phys. Rev. B* **39** (1989) 4197.
- [30] T. T. Chou, C. N. Yang, and L. H. Yu, *Phys. Rev. A* **55** (1996) 1179.
- [31] H. T. C. Stoof, *Phys. Rev. A* **49** (1994) 3824.
- [32] E. V. Shuryak, *Phys. Rev. A* **54** (1996) 3151.

BOSE — EINSTEIN CONDENSATION OF NEUTRAL ATOMS

Hao Bailin

*(The Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences
P. O. Box 2735, Beijing 100080, China)*

ABSTRACT

The realization of Bose—Einstein condensation of neutral atoms such as rubidium and sodium was a sensation in physics in 1995. This is a brief review of the historical background, experimental progress and theoretical challenge.