

第三届全国计算传热会议

论文集

1989年10月

上海

目 录

积分——微分方法的理论探讨及应用	王唯 孔祥谦	1
非稳态轴对称热传导问题的有限差分——边界元耦合求解方法	康海军 陶文铨	5
关于源项线性化问题的讨论	张洪济	9
显式差分格式时间步长与几何步长的最佳匹配	浦保荣	13
第三类边界条件导热反问题的数值方法	张平	17
外管壁恒热流加热时管内层流传热传质数值解	张玉文 陈钟顾	21
弯曲管道紊流流动数值计算	辛荣昌 陶文铨	25
周期性复杂通道内对流换热的数值模拟	陶文铨	29
具有环形内肋的圆管中的层流换热	王继飞 肖宝成 陈汉平 杨强生	33
缩、放配置倾斜板簇中的流动与换热的数值分析	庞可 陶文铨 张惠华	38
水平同心圆管套中不完全充满多孔介质时的自然对流	肖宝成 杨世铭 杨强生	42
气体层流自然对流的变动性影响	尚德义 王补宣	46
水温在4℃左右时的自然对流传热计算	蒋锦良	56
环形空间自然对流换热同位网格与交错网格差分解的比较	杨沫 陶文铨 陈钟顾	60
冷壁上或下开口时方形空腔内自然对流的数值研究	夏吉良 辛明道 张洪济	64

倾斜开口方形腔内自然对流的数值研究

胡敏 夏吉良 辛明道

68

✓ 相交导热焓法的一种有效算法 宫振祥 章怡飞

72

自然对流影响下的固化过程数值模拟 陈汉平

76

粘性随温度变化的非牛顿流体作螺旋流动的计算 周昆颖

80

有热源复合材料导热问题的数值方法——对控制容积法的改进

虞维平 陈善年

84

多孔绝热材料中复合导热辐射的近似数值计算

徐海平 杨强生

88

燃烧室湍流流动的数值计算 陈善年 蔡培

93

电站锅炉内燃烧优化计算分析研究 夏雅君

97

园筒型加热炉内烟气流动与传热的数值计算

刘振法 杨光炯 黄祖棋 钱家麟

101

接触热阻对废热锅炉管口单元区域内温度分布的影响

李隆健 张洪济

105

换热器结构对传热有效度的影响 南建忠

109

烟囱正常运行工况下壁体的温度响应 顾瑞英 刘伟民

117

CE60万千瓦锅炉燃烧室三维等温流场的数值计算

121

许泓 孙昭星 曹汉鼎

内燃机缸内传热的数值分析 沈胜强 张志千 朱铁柱

127

型材散热器流场和温度场数值分析——三维抛物型方程和椭圆型方程的混合(FA+FD)数值分析

陈善年 赵晓春

131

多片湿式摩擦离合器动态温度场计算 高晓敏 陈汉平

135

建筑围护结构传热问题的数值计算方法	丁静	139
洞库围护结构传湿的数值分析	张强 韩建军	144
四角喷射煤粉炉膛内气粒两相反应流动与传热的数值模拟		
潘武斌 陈越南		148
喷管内壁延伸段辐射角系数的数值计算	程惠尔	152
CONVERGENCE OF SIMPLE, SIMPLER AND SIMPEC IN FOUR DIFFERENT TESTING PROBLEMS	Zheng Zhang	159
DISCUSSION ON THREE VERSIONS OF SIMPLE PROCEDURE	Zheng Zhang	164
BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS OF NONLINEAR PROBLEMS IN TRANSIENT HEAT CONDUCTION	Yao Shouguang Zhu Deshu	168
A ONE-DIMENSIONAL MODEL OF GAS-SOLID TWO-PHASE JET	Zhou Sheng-Leng Xi Shi-Tong	172
RECENT DEVELOPMENT IN THE NUMERICAL MODELING OF INDUCTIVELY COUPLED PLASMA TORCHES	Chen Xi	178
ANALYSES OF HEAT TRANSFER AND FLUID FLOW IN THE WHOLE PROCESS OF CRYSTAL PULLING GROWTH	He Ping Yu Changming	182
NUMERICAL SIMULATION FOR CONFINED TURBULENT JET FLOWS WITHIN TRANSVERSE CURRENTS AND ITS ISOTHERM PREDICTION	Yu Liren	190
NUMERICAL SOLUTION OF SIMULTANEOUS EQUATIONS FOR ORIGINAL RADIATIVE HEAT TRANSFER MODEL AND TURBULENT MODEL IN COMBUSTOR	Wen Da Yao Chang Qin Ge Zhi Yong Bao	194
GAS-SOLID TWO-PHASE FLOWS WITH THERMAL AND DYNAMIC NON-EQUILIBRIUM	Chao Liu Guochu Yu Yaopeng Qian	199
NUMERICAL CALCULATION FOR THE FLOOR TEMPERATURE FIELD OF FLOOR HEATING SYSTEM USING A PLASTIC TUBE	Lian Leming Ran Chunyu	203
OPTIMIZED GEOMETRIC DESIGN FOR THERMAL INSULATION OF HEATING PIPES	Yang B.L. He G.M.	208
SOLUTION OF THE TEMPERATURE FIELD OF AN OBJECT WITH ITS HEATED SURFACE PERIODICALLY COVERED BY ANOTHER ONE	Yang B.L. Pong U.Y.	211

THE APPLICATION OF A GRAPH AND NETWORK METHOD TO THE
PROBLEMS OF COMBINED-MODE OF HEAT TRANSFER OF A
SATELLITE ATTITUDE THRUSTER

Zhu Qing-hong Zhu Xiao-lai Song Jin-hui

215

积分-微分方法的理论探讨及应用

王 唯

孔祥谦

(海军潜艇学院) (上海交通大学)

一、概述

积分-微分方法是七十年代以后,随着计算机的发展,以J. C. Wu为代表提出的求解流体流动与换热问题的方法^[1]。该方法克服了涡量-流函数方法中对边界条件处理的困难及不易推广到三维问题中去的缺点,同时,在对不可压缩流体的计算中消除了压力项,从而避免了在压力-速度方法中由于处理压力项所带来的麻烦,在求解一些复杂流动换热问题上具有非常诱人的一面。本文作者近年在积分-微分方法的理论及应用上做了一些探讨,有些新的收获。

二、积分-微分方法数学模型的建立

§ 2-1 控制方程的给出

$$\text{连续方程: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2-1)$$

$$\text{动量方程: } \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot P \quad (2-2)$$

$$\text{能量方程: } \rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C (\vec{v} \cdot \nabla) T = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (2-3)$$

下面就存在自然对流的情况给出积分-微分方法的数学模型。对式(2-2)

两边进行旋度及散度运算则得到涡量 $\vec{\omega}$ 和相对体积变化率 B 的输运方程。

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) = -\beta \nabla T \times \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2-4)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla^2 \left(\frac{v^2}{2} \right) + \nabla \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}) = -\beta \nabla T \cdot \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla^2 p + \frac{4}{3} \nu \nabla^2 B \quad (2-5)$$

其中: $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ $B = \nabla \cdot \vec{v}$ β 为平均体积变化率 $\vec{g}$ 重力加速度矢量。

流场中流体微团的运动速度应用 $\vec{\omega}$ 及 B 表示为积分形式:

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{r}, t) = & -\frac{1}{2\pi} \iint_{R_0} \frac{\vec{\omega}(\vec{r}_0, t) \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) + B(\vec{r}_0, t)(\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^2} dR_0 \\ & + \frac{1}{2\pi} \oint_{S_B} \frac{(\vec{v}_0 \cdot \vec{n}_0)(\vec{r}_0 - \vec{r}) - (\vec{v}_0 \times \vec{n}_0) \times (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^2} dS_0 + \vec{v}_\infty \end{aligned} \quad (2-6)$$

§ 2-2 边界条件的确定

积分-微分法确定固壁上的涡量是从运动学角度入手。式(2-6)改写成如下形式(不可压流动中忽略B)：

$$\vec{V} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{R-s^+} \frac{\vec{\omega}_0 \times (\vec{r}_0 - \vec{r}) + B_0(\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^2} dR_0 - \frac{1}{2\pi} \int_{s^+} \frac{\vec{\xi}_0 \times (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^2} dS_0 \\ + \frac{1}{2\pi} \oint_{s_B} \frac{(\vec{V}_0 \cdot \vec{n}_0)(\vec{r}_0 - \vec{r}) - (\vec{V}_0 \times \vec{n}_0) \times (\vec{r}_0 - \vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^2} dS_0 + \vec{V}_\infty \quad (2-7)$$

上式中第一项积分表示固体边界以外的区域中 $\vec{\omega}$ 及B对各点速度的贡献，第二项计算边界上涡量对各点速度的贡献。对三维问题 $\vec{\omega}$ 为体涡强， $\vec{\xi}$ 为面涡强；对二维问题 $\vec{\omega}$ 是面涡强， $\vec{\xi}$ 是线涡强。

对式(2-7)两端取切向壁面条件：

$$\vec{V}|_s \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{V}_s \cdot \vec{e}_\varphi = U_b \quad (U_b \text{ 为固边界切向速度}) \quad (2-8)$$

由此得到求解壁面边界涡量的积分方程：

$$U_b = -\frac{1}{2\pi} \iint_{R-s^+} \frac{[\vec{\omega}_0 \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_s) + B_0(\vec{r}_0 - \vec{r}_s)] \cdot \vec{e}_\varphi}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^2} dR_0 - \frac{1}{2\pi} \int_{s^+} \frac{[\vec{\xi}_0 \times (\vec{r}_0 - \vec{r}_s)] \cdot \vec{e}_\varphi}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^2} dS_0 \\ + \frac{1}{2\pi} \oint_{s_B} \frac{[(\vec{V}_0 \cdot \vec{n}_0)(\vec{r}_0 - \vec{r}) - (\vec{V}_0 \times \vec{n}_0) \times (\vec{r}_0 - \vec{r})] \cdot \vec{e}_\varphi}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^2} dS_0 \quad (2-9)$$

三、数值模拟

§ 3-1 离散化方法的选择

对于给定的微分方程可采用的离散化方法不是唯一的，并且在结点数目无限大的极限情况下，所有的离散化方法都将给出相同的解，对于复杂的流动与换热问题应用该方法求解作者认为宜于采用控制容积法进行离散。

本文中给出的数学模型是非稳态情况下的，对于复杂流动问题，时间项宜于采用二点显式差分格式。对此作者在文献[4]中进行了详细的论述。

本文作者在通过对一些算例的计算发现，“交错网格”的思想可以引入到该方法中来。计算经验表明，“交错网格”对保证该方法中离散方程求解的收敛能收到明显的效果。文献【5】给出的算例中如果对 ω 及 T 采用相同的控制容积，对方程离散求解，计算往往很难收敛，通过采用 ω 及 T 在切向相交错的网格（图3-1）之后，计算就得到了圆满的成功。

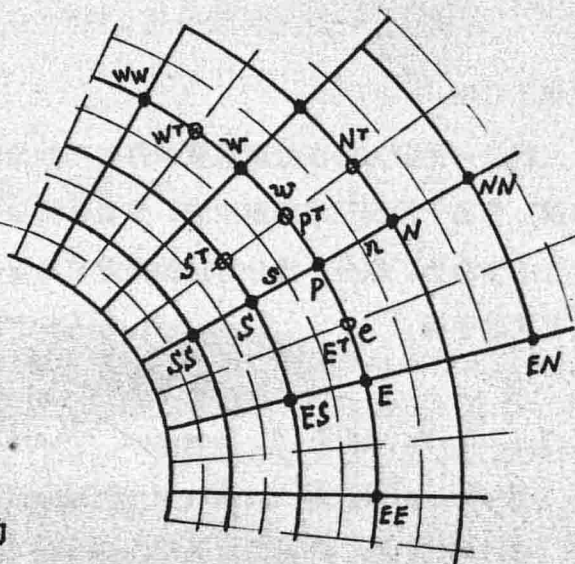


图3-1

§3-2 计算流程

1. 给出 $t=0$ 时刻流场内部各点的涡量，给出此时的温度场；
2. 确定 $t=0$ 时刻的边界涡量；
3. 由获得的涡量场计算 $t=0$ 时刻速度场；
4. 由这 t 时间层的速度场，涡量场及温度场确定 $t+\Delta t$ 时刻温度场及内部涡量；
5. 确定 $t+\Delta t$ 时间层的边界涡量；
6. 判断邻近边界的第一个内部结点上涡量及温度是否满足精度要求，不满足则沿径向增加一个结点，即边界膨胀；
7. 二个时间层的温度与涡量场相比较，看是否满足精度要求，不满足则转回到步骤4，满足精度则结束计算。

四、成功算例介绍及积分—微分法的意义

对于水平旋转圆柱体混合对流换热问题，若按 $(\omega-\psi)$ 及 $(P-V)$ 方法求解很难获得成功，作者在应用积分—微分法对该问题求解之前，还未见过国内外对该问题成功求解的资料。本文作者应用积分—微分方法获得了完整的流体的速度场及温度场的资料，并发现在实验中不易辨认的疑点和矛盾，为此类问题的理论分析及工程应用提供了重要的参考资料。有关结论在文献【5】

中作了介绍。

积分-微分方法在处理涡量条件时巧妙准确,同时又能避开处理压力项的麻烦,也易于用到三维问题中去。作者认为该方法有着广泛的发展前景,具有较强的生命力。积分-微分方法的开发可为复杂流体流动与换热问题的研究提供有效的手段。

参考文献

- 【1】 J. C. Wu and J. F. Thompson, "Numerical Solutions of Time-Dependent Incompressible N-S Equations Using an Integro-Differential Formulation" *Computer and Fluids* Vol1, 1973, PP197-215
- 【2】 J. C. Wu "Numerical Boundary Conditions for Viscous Flow Problems" *AIAA J.* Vol14 PP1042-1049 1976
- 【3】 C. M. Wang and J. C. Wu "Numerical of Study N-S Problems Using Integral Representations" *AIAA J.* Vol24, 1986, PP1305-1312
- 【4】 王唯《无限空间水平旋转圆柱体混合对流换热问题的积分-微分法求解》哈船院硕士论文 1988·2
- 【5】 王唯、孔祥谦、刘顺隆《传热传质学论文摘要》中国工程热物理学会1988年会P94

非稳态轴对称热传导问题的有限差分—边界元耦合求解方法

康海军 陶文铨

西安交通大学

摘 要

本文对第三类边界条件下的非稳态轴对称热传导问题采用有限差分与边界元相耦合的方法进行了研究。在靠近对称轴区域采用有限差分法,然后与距轴线较远处不规则区域的边界元法进行耦合。这样既使边界元的计算区域得到扩展,又避免了靠近对称轴处奇异点计算的困难。通过与有限差分法和有限元法计算结果的比较,表明了该方法的可行性。应用于复杂轴对称非稳态温度场的分析,取得了较满意的结果。

一 引 言

近年来,随着计算机技术的飞速发展,使用计算机模拟实际传热过程的方法愈来愈受到人们的重视,它具有实验无法代替的优点^[1]。在计算方法上相继出现了有限差分(FDM)、有限元(FEM)、边界元(BEM)和有限分析法。总括起来,这些计算方法各有千秋。有限差分通俗易懂,但对不规则区域,该方法要浪费内存及计算工作量。对于边界方正及区域内部单一的简单情况,有限差分的计算要比有限单元法简单得多^[2]。有限元法则需要将整个区域离散化,数据准备工作量较大,尤其对三维问题、分割连续体相当繁琐、复杂、费时、效率低,原始数据易出错^[3]。而边界元法将问题的维数降低,只需要将所研究区域的边界离散化,从而原始数据准备简单、工作量小。同时由于只对边界离散,离散化误差仅来源于边界。区域内有关物理量是用精确的解析公式计算的,这样便提高了结果的计算精度^[3]。但边界元法的主要缺点为当所考虑区域的表面积与其体积之比值较大时,边界元法不够有效^[4]。即在狭窄的边界中不宜用边界元法求解^[5,6]。其理由如文献[5]所述:在长物体中,一些节点在其它节点上的影响变弱,此时数值精度要受到影响。此外,当把边界元法应用于轴对称问题时,如计算区域直到轴心,则轴心处奇异点的处理也是一个棘手的问题^[9]。综上所述,各种计算方法都有其优缺点。文献[7]在对肋片传热的分析中,广泛比较了四种数值计算方法的优劣,并得出结论:

就计算容量、费用、计算结果的精度及广泛适用性等方面来说,边界元法是热传导分析中最吸引人的一种数值方法。但由于计算区域的限制,使得该方法的应用受到一定影响,其传统的解决方法为:1)将区域划分为多个子区域进行计算;2)采用边界元和有限元相结合的方法^[5];3)边界元和解析解相结合^[8,9]。本文针对在轴心处为规则形状的轴对称狭长条物体,采用有限差分与边界元相耦合的方法来求解温度场,以分别发挥两种方法的长处,即在靠近轴对称处采用有限差分法,而对较远处不规则区域采用边界元的处理方法。这样可望充分发挥两种方法的各自长处而克服单一求解方法所存在的困难。

鉴于工程实际中的热传导问题大多属于第三类边界条件,因此本文给出了该边界值问题的边界元计算公式。最后通过与有限差分法和有限元法的比较说明其实际应用的可靠性。

二 非稳态轴对称问题的边界元求解方法^[9,10]

在第三类边界条件下,即取 $q = \alpha(T - T_f)$ 时,该问题的离散方程式为:

$$c_i T_i + \frac{\rho c}{K} \int_0^t \int_S T^* T r dS dt = \frac{\rho c}{K} T_s \int_0^t \int_S T^* r dS dt + \int_0^t \int_S q^* T r dS dt + \left[\int_A T^* r dA \right]_{t=0} \quad (1)$$

$$\text{式中: } T^* = \frac{1}{[4\pi k(\tau-t)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{r^2 + r_s^2 + (z-z_s)^2}{4k(\tau-t)}\right] I_0\left(\frac{rr_s}{2k(\tau-t)}\right) \quad (2)$$

$$q^* = -K \frac{\partial T^*}{\partial n} = \frac{K}{8\sqrt{\pi} [k(\tau-t)]^{5/2}} \exp\left[-\frac{r^2 + r_s^2 + (z-z_s)^2}{4k(\tau-t)}\right] \cdot \left\{ (r I_1\left[\frac{rr_s}{2k(\tau-t)}\right] - r_s \cdot \right. \\ \left. I_1\left[\frac{rr_s}{2k(\tau-t)}\right]) \cdot r_{,n} + (z-z_s) I_0\left[\frac{rr_s}{2k(\tau-t)}\right] \cdot z_{,n} \right\} \quad (3)$$

其中 $k=K/\rho c$, I 为Bessel函数, $r_{,n}$, $z_{,n}$ 为边界上该点处的方向余弦。

在作时间 t 的积分计算时,需对 T 及 q 随时间而变化的型线作出假设。由于 T 及 q 随时间而变化的速率小于 T^* 及 q^* 的变化率,对于足够小的时间步长,可以近似地假定在该步长内 T 及 q 对时间为常数,亦即取 T 及 q 对时间的型线是阶梯式的。这一近似处理就使得式(1)中的对时间积分项可以进行分析计算^[9]。

对沿边界积分的情况,当积分区间通过本身点 i 时,则 $R=0$ 。 R 为离开 i 点的距离。这时系数表达式为一旁义积分。在线性单元中,该表达式相当冗长,其详细的推导过程可参阅文献^[11]。

最后,可以把离散方程式写成矩阵形式:

$$[H] \{T_m\} = [G] \{q_m\} + B \{T_m - i\} \quad (4)$$

值得注意的是,若取时间步长 Δt 为常数,则在整个求解过程中系数矩阵 $[H]$ 、 $[G]$ 是不变的,因而可以节省计算时间。本文在计算线积分时采用线性单元并取Gauss型六点格式,面积分采用三角形基本单元Gauss型数值积分法中的七点格式。

三 有限差分与边界元法耦合过程

对如图1所示的情形,把计算区域分为1、2两部分,区域1采用有限差分的计算方法。而对区域2采用边界元的计算方法。然后两者在交界面上进行耦合。其耦合条件为连接边界上的温度和热流密度连续。使该耦合条件得以满足的过程为:先假定在经过时间步长 Δt 后,耦合面上的温度变化至某一数值 T^* ,用有限差分计算区域1内的温度场,以得出接合面上的热流密度 q 值。将此 q 值作为区域2的边界条件并用边界元法求解区域2内的温度场。这里为程序设计的方便可将从有限差分法中得到的 q 值转化为 α 的表达式,即 $q = \alpha(t - t_f)$ 。其中 t 为耦合面上的温度。在确定 α 时, t 取区域1中的值。但确定 α 后, α 及 t_f 作为区域2的边界条件,界面温度 t 仍保持为区域2的未知值。这样在采用边界元法编制程序时可只考虑第三类边界条件。再把由边界元法中得到的温度 t 值与有限差分法中所假定的 T^* 值在耦合面上进行比较,若不满足给定的允许误差条件,便继续迭代下去。该迭代过程采用亚松弛方式进行(其松弛因为约为0.3)。

四 计算实例

算例1:为便于与有限差分的计算结果进行比较,取如图2所示的规则区域。其中参数为: $\lambda = 40.5 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$, $a = 7.22 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 500 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$, $T_0 = 500^\circ\text{C}$, $r_1 = z = 14 \text{ mm}$, $r_2 = 40 \text{ mm}$, $T_f = 30^\circ\text{C}$ 。该有限差分的计算采用 21×21 节点,且经过网格加密的考核;有限元法取12个节点,12个单元;边界元法在边界上取20个节点。计算结果示于图2a。

算例2:计算区域如图3所示,其物性参数取与算例1相同。取 $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 400 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$, $T_0 = 550^\circ\text{C}$, $T_f = 30^\circ\text{C}$ 。并将该计算结果与有限差分法和有限元的计算结果进行了比较,其中有限差分采用第三类边界条件下的区域扩充法^[11, 12]。比较结果示于图3a、图3b。

以上三种方式计算结果的最大偏差为6%,且该偏差出现在开始时刻。随

关于源项线性化问题的讨论

张 洪 济

(重 庆 大 学)

一、引 言

当用数值计算方法求解一个包含热源的热传导问题时, 必须对源项进行线性化处理, 以得到相应的离散化方程。为了保证所得到的解满足物理上真实性的要求, 源项线性化必须遵循负斜率的基本法则[1], 即将源项 $S(T)$ 分解成为下面的形式:

$$S(T) = S_c + S_p T \quad (1)$$

式中, S_c 是 S 的常数部分, S_p 是 T 的系数, 且 $S_p \leq 0$ 。这一法则与大多数物理过程确实在源项与因变量之间具有负斜率的关系是一致的。从计算方法上讲, 保持负的 S_p , 将使迭代矩阵的行范数总是小于1, 从而保证了迭代求解过程的收敛性[2, 3], 以及解在物理上的真实性。

另一方面, 对于给定了函数形式的源项 S , 可以构造出不同的线性表示, 而不同的线性表示会使迭代过程的收敛速度发生变化。文献[1]以函数形式为 $S = 4 - 5T^3$ 的源项为例, 给出了下面四种形式的线性化表示:

1. $S_c = 4 + 5T_p^{*3}, S_p = 0$;
2. $S_c = 4, S_p = -5T_p^{*2}$;
3. $S_c = 4 + 10T_p^{*3}, S_p = -15T_p^{*2}$;
4. $S_c = 4 + 20T_p^{*3}, S_p = -25T_p^{*2}$

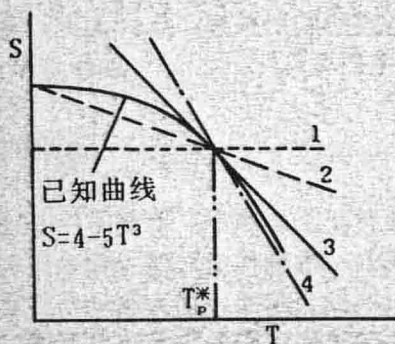
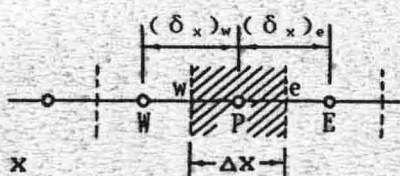


图1 对于给定 S 的四种可能的线性化方案

式中, T^* 表示 P 点处 T 的估计值或前一次的迭代值; 第三种形式的直线即为与 $S \sim T$ 曲线相切的直线。这四种可能的线性化形式与实际的 $S \sim T$ 曲线一起示于图1上。文献[1]认为, 与已知曲线相切的直线的负斜率通常是最佳的选择, 而欠陡的直线不能体现 S 随 T 的下降速度。事实上, 对于给定的 S, S_p 的任何改变都将引起 S_c 作相应的变动, 以保持 S 之值不变。图1上给出的四条直线并不是 S 随 T 的实际变化直线, 自然也不反映 S 随 T 的下降速度。文献[1]关于与已知 $S \sim T$ 曲线相切的直线为最佳选择的结论是值得商榷的。

二、源项线性化表示对迭代收敛速度的影响

下面以一维稳态导热问题为例进行分析。当物体内部包含热源时, 其导热微分方程为:



$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + S(T) = 0 \quad (2)$$

用控制容积法推导离散化方程。一个典型的网格节点群表示在图2上。对网格节点P,在其控制容积内积分方程(2),并按式(1)将源项作线性化处理,可以得到如下一般形式的离散

图2 一维问题的网格结点群 化方程式:

$$a_p T_p = a_E T_E + a_w T_w + b \quad (3a)$$

$$\text{式中: } a_E = k_e / (\delta x)_e, \quad a_w = k_w / (\delta x)_w, \quad a_p = a_E + a_w - S_p \Delta x \quad (3b)$$

$$b = S_c \Delta x \quad (3c)$$

为了使对问题的分析更清晰起见,考察在一个迭代步中因变量T的改变量。假定材料为常物性, $k = \text{常数}$, 则系数 a_E 和 a_w 分别保持为定值,由式(3)可求得一次迭代后因变量的新值 $T_p^{(1)}$ 为:

$$T_p^{(1)} = \frac{a_E T_E + a_w T_w + S_c \Delta x}{a_E + a_w - S_p \Delta x} = \frac{C}{D} \quad (4)$$

现在重新考虑,将源项线性化的负斜率增大 ΔS_p ,则式(1)变成:

$$S = (S_p - \Delta S_p T) + (S_p + \Delta S_p T) = S_c' + S_p' T \quad (5a)$$

$$\text{式中: } S_c' = S_c - \Delta S_p T, \quad S_p' = S_p + \Delta S_p \quad (5b)$$

仍然在前一次迭代值 T_p^* 的基础上进行一次迭代循环,则节点P的温度新值将相应地变成 $T_p^{(2)}$,

$$T_p^{(2)} = \frac{(a_E T_E + a_w T_w + S_c \Delta x) - \Delta S_p T_p^* \Delta x}{(a_E + a_w - S_p \Delta x) - \Delta S_p \Delta x} = \frac{C + C'}{D + D'} \quad (6a)$$

$$\text{式中: } D' = -\Delta S_p \Delta x, \quad C' = -\Delta S_p T_p^* \Delta x = D' T_p^* \quad (6b)$$

由于都是以相同的前一次迭代值 T_p^* 为基础并作一个迭代步运算,故比较 $T_p^{(1)}$ 和 $T_p^{(2)}$,即可获得关于线性化方案对迭代收敛速度影响的信息。为此,令 $T_p^{(1)} = T_p^{(2)}$,即 $C/D = (C + D' T_p^*) / (D + D')$,由此解得使 $T_p^{(1)} = T_p^{(2)}$ 的条件是:

$$T_p^{(1)} = C/D = T_p^* \quad (7)$$

$$\text{于是: 当 } T_p^{(1)} > T_p^* \text{ 时 } T_p^{(1)} > T_p^{(2)} \quad (8a)$$

$$\text{当 } T_p^{(1)} < T_p^* \text{ 时 } T_p^{(1)} < T_p^{(2)} \quad (8b)$$

可见当 $T_p^{(1)}$ 大于前一次迭代值 T_p^* 时,增大源项线性化的负斜率,会使下一步新的迭代值减小, $T_p^{(2)} < T_p^{(1)}$; 反之,当 $T_p^{(1)}$ 小于前一次迭代值 T_p^* 时,增大负斜率,则会使下一步新的迭代值增大, $T_p^{(2)} > T_p^{(1)}$ 。综合起来,增大源项线性化负斜率,总是使因变量(温度)的变化减慢,从而使迭代过程的收敛速度减慢。同时,由于 S_c 和 S_p 这两个值本身也是T的函数,因而,在每一次迭代循环中都要根据新的T值重新算出,线性化直线因此而不断随迭代步的增加改变其斜率和位置,图1上的直线不总是S随T的变化直线,不反映S随T的下降速度。可见 $S \sim T$ 曲线的切线并非最佳选择。同时,由式(4)与(6)可知,因变量变化减慢的程度取决于 C, C', D, D' ,因而与源项本身的函数形式、材料物性及网格划分有关。

三、算例与讨论

为了具体考察源项本身的函数形式对离散化方程组迭代收敛速度的影响, 计算两根有限长度的等截面直杆在侧表面绝热、且有内热源时的温度分布。两直杆长度均为 $2L=3\text{m}$, $-L \leq x \leq L$, $x=\pm L$ 处边界平面均保持为 100°C 。两直杆材料的导热系数分别为 $k_1=5\text{W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ 和 $k_2=100\text{W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ 。第一根杆内的热源分别为下面两种线性函数:

$$1. S=3+5T; \quad 2. S=5-10T$$

第二根杆内的热源分别是下面的二次和三次函数:

$$3. S=2-10T^2; \quad 4. S=4-5T^3$$

对于这四种情形, 均采用离散化方法A布置均匀网格, $\Delta x=L/10=0.15\text{m}$ 。对上述四种函数形式的热源项, 采用多种线性化方案, 如表1所示, 其中2(2)、3(3)和4(3)三个方案对应于各自 $S\sim T$ 曲线的切线表示。对表1所列诸多线性表示下的离散化方程组, 用G-S迭代进行求解, 收敛的控制精度 ϵ 取为:

$$\epsilon = \left| \frac{T_1^{(n+1)} - T_1^{(n)}}{T_1^{(n+1)}} \right| < 10^{-6}$$

迭代收敛次数NN的计算结果也列于表1。可见, 取小的线性化负斜率时的

表1 源项线性化的不同表示及迭代收敛次数

方案 源项	(1)		(2)		(3)		(4)	
	S_c	S_p	S_c	S_p	S_c	S_p	S_c	S_p
1. $S=3+5T$	$3+5T^*$	0	$3+15T^*$	-10	$3+35T^*$	-30		
NN	4526		4689		5085			
2. $S=5-10T$	$5-10T^*$	0	5	-10	$5+10T^*$	-20		
NN	151		160		163			
3. $S=2-10T^2$	$2-10T^{*2}$	0	2	$-10T^*$	$2+10T^{*2}$	$-20T^*$	$2+20T^{*2}$	$-30T^*$
NN	90		93		98		103	
4. $S=4-5T^3$	$4-5T^{*3}$	0	4	$-5T^{*2}$	$4+10T^{*3}$	$-15T^{*2}$	$4+20T^{*3}$	$-25T^{*2}$
NN	-		62		75		85	

收敛次数较少, 迭代收敛次数随负斜率的增大而增加; 采用 $S_p=0$ 这种所谓懒汉的做法, 在源项函数1、2和3的情形下, 迭代不仅依然收敛, 而且收敛速度最快。这就证明, 文献[1]中关于欠陡直线不能体现 S 随 T 的下降速度, 从而影响迭代收敛速度, 且 $S\sim T$ 曲线的切线为最佳选择的结论确实是值得商榷的。

那么, 取 $S_p=0$ 是否在任何情形下都能使迭代收敛速度最快, 而成为最佳选择呢? 并非如此。由式(3)可知, 当源项对热传导过程起控制作用时, 离散化方程可以被写成:

$$S_c + S_p T_p \approx 0 \quad (9)$$

由此得到解

$$T_p \approx -S_c/S_p \quad (10a)$$

于是

$$\lim_{S_p \rightarrow 0} T_p \rightarrow \infty \quad (10b)$$

在这种情形下选择 $S_p = 0$, 会导致迭代过程发散。表1上第四种源项是温度的三次函数, 对于导热过程起控制作用, 取 $S_p = 0$ 的线性表示时, 计算迅速出现发散。

将第二根直杆材料的导热系数取为 $k_2 = k_1 = 5 \text{ W/(m} \cdot \text{°C)}$, 突出了源项的控制作用, 结果不仅在4(1)的线性表示时产生发散, 而且在3(1)的线性表示时也产生了发散, 求解归于失败。

对源项函数为 $S = 4 - 5T^3$ 的大平板($0 \leq x \leq L$)一维导热进行了计算:

$L = 0.015 \text{ m}$, $k = k_2 = 100 \text{ W/(m} \cdot \text{°C)}$, $T(x=0) = 50 \text{ °C}$, $T(x=L) = 100 \text{ °C}$ 。仍然采用 $\Delta x = L/10$, 迭代初值 $T^* = 50 \text{ °C}$, 对于 $S_p = 0$ 的线性表示, 平板内 $x = 0.006 \text{ m}$ 处的温度变化过程如下:

50, 50.7674100, -2103.949000, 1.968439×10^8 , -2.712035×10^{23} , 溢出可见, 对于源项控制的导热问题, 不能采用 $S_p = 0$ 的源项线性化表示。

四、结 论

1. 分析和计算表明, 对同一源项作不同的线性化表示时, 随着负斜率的增大, 迭代收敛速度总是减慢的, 与已知 $S \sim T$ 曲线相切的直线并非最佳选择。

2. 对于源项控制的过程, 不能取 $S_p = 0$ 的线性化表示。这种情形下线性化的最佳选择必然与源项的函数形式、问题的单值性条件等因素有关。

3. 根据本文的分析过程可见, 关于源项线性化表示所得到的结论, 对于对流-扩散问题仍然适用。这时, 流场对其收敛速度会有一定的影响。

4. 本文关于源项线性化问题的讨论是很初步的, 有待进一步的研究。

参考文献

- [1] 帕坦卡, S.V.著, 郭宽良译, 传热和流体流动的数值方法, 安徽科学出版社, 1984。
- [2] 南京大学数学系计算数学专业编, 偏微分方程数值解法, 科学出版社, 1979。
- [3] 张洪济, 导热问题差分解法的两点讨论, 工程热物理学报, Vol.6, No.3, (1985), PP.263-267。