高等数学

第二册

吴德栓编著

一九八一年十月

高 等 数 学

第 二 册

吴德栓编 著

一九八一年十月

目　录

第八章　空间解析几何

解析几何是用代数的方法研究几何图形的一门数学学科。在中学里，大家已经学过平面解析几何，它主要研究平面上的一、二次曲线图形，即直线与圆、椭圆、双曲线、抛物线等。空间解析几何则研究空间中的几何图形，在这一章里，我们研究空间中的直线、平面和简单的二次曲面与矢量代数。

学习空间解析几何要与平面解析几何对照，注意其联系与不同点。在学习方法上要充分利用几何直观，注意数形结合；尤其重要的是要掌握好用矢量代数来研究平面与直线的简便方法。

学好这一章，不仅对学习多元函数微积分非常必要，而且对学习许多物理课程很有益处。

§1　空间直角坐标系

1.　空间中点的直角坐标

在平面上，通过建立平面直角坐标系，可以把平面上的一点M等同于一对有顺序的实数即坐标(x,y)。与此相似，我们也将通过建立空间直角坐标系，把空间中的一点M等同于三个有顺序的实数(x,y,z)。

为此，首先建立空间直角坐标系。在空间中取定一点O，过O点作三条互相垂直且以O点为原点的数轴ox、oy、oz，就构成了一个空间直角坐标系，记为$oxyz$，并称点O为坐标原点，称数轴ox、oy、oz为坐标轴，称由两个坐标轴所决定的平面为坐标平面，简称为xy、yz、xz平面。

对空间直角坐标系，我们通常采用**右手系**。什么是右手系呢？将右手的拇指、食指、中指伸成互相垂直的状态，若拇指、食指分别指向x轴、y轴正向时，中指正好指向z轴正向，则称此坐标系为**右手系**，如图8.1.否则，称为**左手系**。

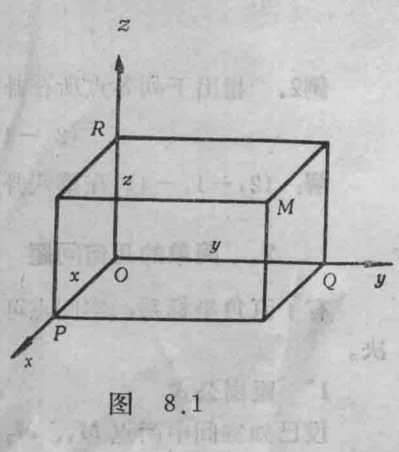

图　8.1

有了空间直角坐标系后，就可以像平面那样在空间中规定点的直角坐标。设给定空间中一点M，过点M作三个平行于坐标平面的平面，它们与x、y、z轴分别交于点P、Q、R，其所在坐标轴上的坐标分别为x、y、z。我们就称与点M相对应的这三个有顺序的实数为点M的坐标，记为

$$M(x,y,z),$$

其中x、y、z分别称为点M的横坐标、纵坐标、立坐标，或称为x坐标、y坐标、z坐标。

与平面直角坐标系一样，易知点M与其坐标 (x,y,z) 间的关系是一一对应的。

例1. 作出点 $(2,-1,3)$，$(-1,2,-1)$，$(2,0,2)$ 的图。

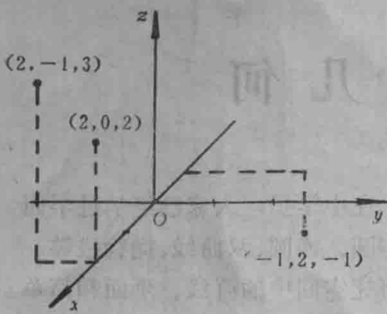

图 8.2

解： 要作点$(2,-1,3)$的图。如图 8.2。只要从原点出发，沿着x轴正向走二个单位，再向左沿着平行y轴的负向走一个单位，再向上沿平行z轴的正向走三个单位，即得点 $(2,-1,3)$。画图时，为了要从图上确定点的位置，要将所走路线用虚线标出，并标上该点的坐标。

每个坐标平面将空间分成两个半空间。如 xy 平面将空间分成上、下两个半空间；xz 平面将空间分成左、右两个半空间；yz 平面将空间分成前、后两个半空间。在每个半空间内或坐标平面上的点其坐标的符号都有一定规律，如上半空间 $z>0$，下半空间 $z<0$，xy 平面上 $z=0$，其它类似。

三个坐标平面将空间分成八块，每一块叫做一个卦限，我们将八个卦限给以编号，在上半空间为１、２、３、４，见图8.3，在它们下方的分别为５、６、７、８。在各卦限内点的坐标其符号有以下规律：

坐标＼卦限	1	2	3	4	5	6	7	8
x	+	−	−	+				
y	+	+	−	−	(自己写)			
z	+	+	+	+				

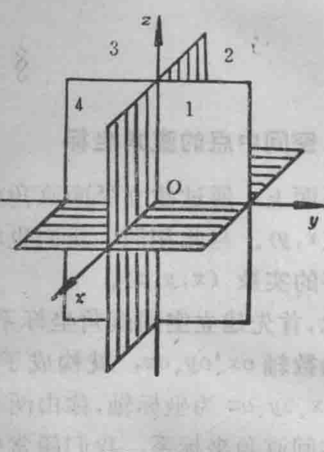

图 8.3

例2. 指出下列各点所在卦限：

$$(2,-1,-4),\ (-1,-3,1),\ (2,1,-1).$$

解： $(2,-1,-4)$ 在第八卦限；$(-1,-3,1)$ 在第三卦限；$(2,1,-1)$ 在第五卦限。

2. 简单的几何问题

有了直角坐标系，空间点可以用坐标来表示，这样有关点的几何问题也可以用坐标来解决。

1° 距离公式

设已知空间中两点 M_1、M_2 的坐标分别为 (x_1,y_1,z_1)、$(x_2、y_2、z_2)$，则由图 8.4易知 M_1、M_2 两点间的距离等于

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{d_1^2+(z_1-z_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}. \end{aligned}$$

练 习 题

求下列两点间的距离：

（1）$(2,-3,1)$，$(1,1,0)$；

（2）$(1,-1,-2)$，$(3,-2,1)$；

（3）$(3,-2,1)$，$(0,0,0)$。

2° 球面方程

设一球面的半径为R，球心在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，求此球面的方程。

设球面上一动点M的坐标为(x,y,z)，则点M到点M_0的距离是

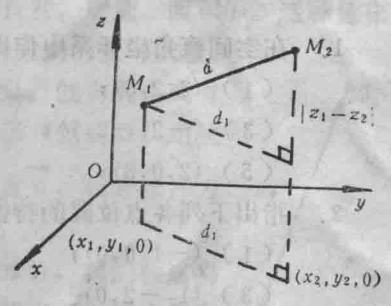

图 8.4

$$\overline{M_0M}=R;$$

但又由距离公式知

$$\overline{M_0M}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

因此，球面上的点M，其坐标满足方程

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

显然，满足这方程的点(x,y,z)必在球面上。以上方程就是半径为R，球心在点(x_0,y_0,z_0)的球面方程。

特别，当球心在原点时，半径为R的球面的方程是

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

例3. 求点$(1,2,-3)$到点$(-1,-1-1)$的距离。

解： 由距离公式得距离

$$d=\sqrt{(1+1)^2+(2+1)^2+(-3+1)^2}=\sqrt{17}。$$

例4. 求球面$x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$的半径和球心。

解： 经配方可将球面方程化为

$$(x-6)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49,$$

由此，易知球半径$R=\sqrt{49}=7$，球心为$(6,-2,3)$。

思考题

1. 下列方程的图形是什么？

（1）$x^2+y^2+z^2=0$；

（2）$x^2+y^2+z^2=-1$。

2. 下列不等式在几何上表示什么？

（1）$x^2+y^2+z^2<R^2$；

（2）$x^2+y^2+z^2\geq 4$。

3. 与点(x,y,z)关于xy坐标平面对称的点的坐标是什么？

4. 点 $(3,-1,2)$ 到 xy 平面的垂线的垂足的坐标是什么？

5. $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ 的图形是什么？

习　题　一

1. 在空间直角坐标系中作出下列各点：

（1）$(2,2,3)$； （2）$(2,1,-2)$；

（3）$(-2,-2,1)$； （4）$(2,-1,-2)$；

（5）$(2,0,3)$； （6）$(0,2,0)$。

2. 指出下列各点位置的特性：

（1）$(-1,0,0)$； （2）$(0,0,3)$；

（3）$(1,-2,0)$ （4）$(-2,0,2)$。

3. 求下列两点间的距离：

（1）$(2,4,6)$，$(-1,8,-6)$； （2）$(-1,-3,2)$，$(2,0,-4)$；

（3）$(2,2,2)$，$(-2,-1,-3)$； （4）$(-1,-1,1)$，$(-3,2,-5)$。

4. 求下列点对称于坐标平面的点：

（1）$(2,1,1)$； （2）$(-1,3,-1)$；

（3）$(-1,-1,-2)$； （4）(a,b,c)。

5. 求顶点是 $A(2,5,0)$，$B(11,3,8)$，$C(5,1,11)$ 的三角形各边的长。

6. 求顶点为 $A(2,1,4)$，$B(3,-1,2)$，$C(5,0,6)$ 的三角形各边的长。

7. 求证以三点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形。

8. 求下列各球面的方程：

（1）球心在点 $(3,-2,5)$ 而半径 $R=4$；

（2）球心在点 $(-1,-3,22)$ 且通过点 $(1,-1,1)$；

（3）一条直径的两个端点是 $(2,-3,5)$ 和 $(4,1,-3)$；

（4）球面过原点和点 $A(4,0,0)$，$B(1,3,0)$ 和 $C(0,0,-4)$。

9. 求下列球面的球心和半径：

（1）$x^2+y^2+z^2-6z-7=0$；

（2）$x^2+y^2+z^2-4x=0$；

（3）$x^2+y^2+z^2-12x-2y+4z=0$；

（4）$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-7=0$。

10. 一动点到两点 $(3,5,-4)$ 和 $(-7,1,6)$ 等距离，求此动点的轨迹方程。

11. 求与三点 $(2,3,7)$，$(3,-4,6)$ 及 $(4,3,-2)$ 等距离的点的轨迹。

12. 求与点 $(3,7,6)$ 的距离为 2，而与点 $(2,5,4)$ 的距离为 4 的点的轨迹方程。

§2 矢 量 代 数

在力学、运动学与电磁学等物理领域的许多课程中，要研究一些既有大小又有方向的

量——矢量。对于物理类型专业的学生，熟练地掌握矢量的代数运算是非常必要和重要的。

1. 矢量

在实际问题中，有一种量只有大小，沒有方向，如时间、长度、质量、面积等。这种量在单位取定以后，只要用一个数就能表示，这种只有大小而沒有方向的量叫数量。还有一种量，如力、速度、位移、电场强度、磁场强度等物理量，既有大小又有方向，这种量叫矢量或向量。在数学上，矢量用有向线段表示（图8.5），用线段的长度表示矢量的大小，用箭头表示其方向，并记为 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\vec{a}$，同时称 A 为矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点，B 为终点。

图 8.5

如果两个矢量其大小相等，方向相同（指平行而指向相同），我们称这两个矢量相等。也就是说，两个矢量如经过平行移动，其大小与指向可以完全重合一起，则这两矢量为相等矢量。这种只考虑其大小与方向，而不考虑其起点的矢量叫自由矢量。注意，我们所研究的矢量，一般都指自由矢量。

矢量 $\vec{a}$ 的大小或长度，叫做矢量的模，记为 $|\vec{a}|$。长度为1的矢量叫做单位矢量；长度为0的矢量叫做零矢量，记作 $\vec{0}$。零矢量没有确定的方向，或者说它的方向是不定的或任意的。

2. 矢量的加减与数乘

1° 定义

力与速度都是矢量，它们的合成与分解都遵循平行四边形法则。现在我们就根据平行四边形法则来定义矢量的加法。

给定两个矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，将两矢量的起点放在同一点，再以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为边作一平行四边形，则如图8.6所示的对角线矢量 $\vec{c}$ 叫做矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，记为

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}.$$

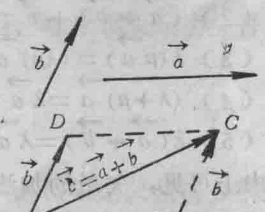

图 8.6

因为在图8.6中，矢量 $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，所以和矢量 $\vec{c}$ 也可以按以下三角形法则求得：将 $\vec{b}$ 的起点与 $\vec{a}$ 的终点放在一起，再联接矢量 $\vec{a}$ 的起点 A 与矢量 $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ 的终点 B，得矢量 $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，则矢量 $\vec{c}$ 就是矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的和矢量。矢量加法的三角形法则比平行四边形法则简便，特别是在对多个矢量进行加法运算时，三角形法则更显得简便，如图8.7。

与矢量 $\vec{a}$ 大小相等方向相反的矢量，叫做矢量 $\vec{a}$ 的反矢量，记为 $-\vec{a}$。矢量 $\vec{a}$ 与 $-\vec{b}$ 的和矢量 $\vec{a}+(-\vec{b})$ 叫做矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差，记为 $\vec{a}-\vec{b}$，即

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

减法的几何意义：如图 8.8，$\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{AC}$，由图易见，$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}=\vec{a}+(-\vec{b})$，故

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{DB},$$

即以矢量 $\vec{b}$ 的终点为起点，以矢量 $\vec{a}$ 的终点为终点的矢量 $\overrightarrow{DB}$ 就是矢量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 之差矢量。

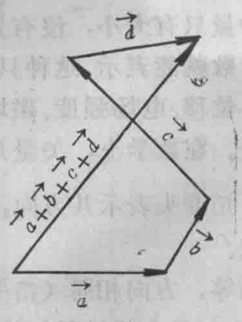

图 8.7

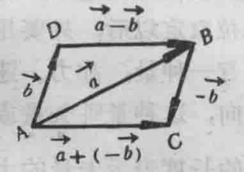

图 8.8

现在来讲讲数乘矢量的定义。

与字母代数一样，我们记 $\vec{a}+\vec{a}$ 为 $2\vec{a}$，记 $(-\vec{a})+(-\vec{a})$ 为 $-2\vec{a}$。容易知道，矢量 $2\vec{a}$ 的模是 $\vec{a}$ 的模的 2 倍，而其方向与矢量 $\vec{a}$ 相同；矢量 $-2\vec{a}$ 的模也是 $\vec{a}$ 的 2 倍，但其方向与矢量 $\vec{a}$ 相反。根据这我们给出一般的数乘矢量 $\overrightarrow{\lambda a}$ 的定义。

定义1 我们定义数 λ 与矢量 $\vec{a}$ 的乘积为这样一个矢量，其模等于 $|\lambda||\vec{a}|$，其方向确定如下：

当 $\lambda>0$ 时，与 $\vec{a}$ 同向；

当 $\lambda<0$ 时，与 $\vec{a}$ 反向；

当 $\lambda=0$ 时，为零矢量，方向任意。

由定义易见：

$$1\cdot\vec{a}=\vec{a},\quad (-1)\vec{a}=-\vec{a},$$

$$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|.$$

此外，根据矢量的加法与数乘矢量的定义易知，加法与数乘满足以下运算规律：

（1）$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$（加法的交换律）；

（2）$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$（加法的结合律）；

（3）$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$（数乘的结合律）；

（4）$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$（分配律）；

（5）$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$（分配律）。

由上可见，矢量的加法与数乘的运算可以像字母代数一样运算。

2° 矢量及其运算的坐标表示

为了把矢量的运算化为数的代数运算，我们首先定义矢量的坐标。

设在空间中给定了一个矢量 $\vec{a}$，又取了一个空间直角坐标系。我们把矢量 $\vec{a}$ 平移，将其起点移到坐标原点 O，这时终点为 A，并设点 A 的坐标为 (a_1,a_2,a_3)。易见，矢量 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，且三个有顺序的实数 a_1,a_2,a_3 与矢量 $\vec{a}$ 间的对应是一一对应的。我们称 a_1、a_2、a_3 为矢量 $\vec{a}$ 的坐标，记作

$$\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}.$$

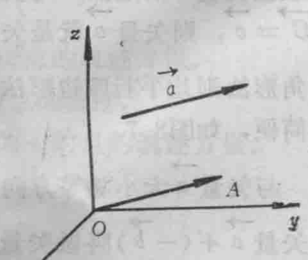

图 8.9

显然，矢量 $\vec{a}$ 的模

$$|\vec{a}|=|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_2^3}.$$

沿三个坐标轴的正向的单位矢量叫做坐标矢量，我们依 x、y、z 轴的次序分别记为 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$．易见，三个坐标矢量的坐标为

$$\vec{i}=\{1,0,0\},\ \vec{j}=\{0,1,0\},\ \vec{k}=\{0,0,1\}.$$

有了矢量的坐标，就可以将矢量的加减与数乘的几何运算化为其坐标的代数运算．为了证明有关这个结论的定理，我们先证明一个引理．

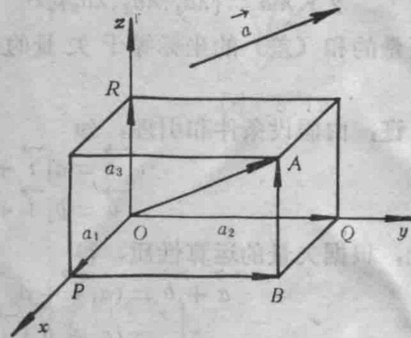

图　8.10

引理　若在给定的直角坐标系中，矢量 $\vec{a}$ 的坐标为 $\{a_1,a_2,a_3\}$，则矢量 $\vec{a}$ 可表成分解式

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}.$$

其逆也真．

证：将矢量 $\vec{a}$ 的起点平移到原点，设其终点为 A，则

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA}.$$

由图 8.10 易见

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BA}\\&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\end{aligned}$$

又因为点 A 的坐标为 (a_1,a_2,a_3)，则

$$\overrightarrow{OP}=a_1\vec{i},\quad \overrightarrow{OQ}=a_2\vec{j},\quad \overrightarrow{OR}=a_3\vec{k},$$

所以

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}.$$

由图8.10显见，其逆也真．

矢量的分解在物理上相当于力、速度的分解，若矢量 $\vec{a}$ 表示力，则 $a_1\vec{i}$、$a_2\vec{j}$、$a_3\vec{k}$ 就分别表示力矢量 $\vec{a}$ 在三个坐标轴方向的分力，而 $\vec{a}$ 的坐标 a_1、a_2、a_3 分别表示力矢量的三个分量．

由此引理说明矢量 $\vec{a}$ 的坐标就是矢量的分解式

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

中坐标矢量 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 前的系数，反之也对．矢量的坐标也可以直接根据矢量的分解式来定义，即若矢量 $\vec{a}$ 可表成分解式

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},$$

则称 a_1、a_2、a_3 为矢量 $\vec{a}$ 的坐标，记为

$$\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}.$$

有了矢量坐标的这一定义，也可以用它来定义点的坐标．若点 A 的矢径 $\overrightarrow{OA}$ 的坐标为 $\{a_1,a_2,a_3\}$，即

$$\overrightarrow{OA}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},$$

则称 a_1、a_2、a_3 为点 A 的坐标，记为 $A=(a_1,a_2,a_3)$．注意，这新的定义与以前的定义法是不一样的，以前是先定义点的坐标，再用点的坐标来定义矢量的坐标，而现在则相反。矢量坐标的这两种定义法各有优缺点，前者定义简单，实际意义不清；后者物理意义清楚，但定

义前必须讲清矢量的加法与数乘的几何运算。

有了引理，现在就可以证明以下定理了。

定理 1 若 $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，则

1）$\vec{a}\pm\vec{b}=\{a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3\}$；

2）$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\}$。

即矢量的和（差）的坐标等于矢量的坐标的和（差）；数乘矢量的坐标等于矢量的坐标乘以数。

证：由假设条件和引理，知

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},$$
$$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}.$$

因此，根据矢量的运算性质，得

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})+(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})\\&=(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}+(a_3+b_3)\vec{k}\\&=\{a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3\},\end{aligned}$$

$\vec{a}-\vec{b}$ 类似可证。

$$\begin{aligned}\lambda\vec{a}&=\lambda(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})=\lambda a_1\vec{i}+\lambda a_2\vec{j}+\lambda a_3\vec{k}\\&=\{\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\}.\end{aligned}$$

定理得证。

定理 2 已知两点 M_1、M_2 的坐标为

$$M_1=(x_1,y_1,z_1),\quad M_2=(x_2,y_2\,z_2).$$

则矢量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标等于终点 M_2 的坐标减去起点 M_1 的坐标，即

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$

证：由图8.11可见

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1},$$

而由已知条件知

$$\overrightarrow{OM_2}=\{x_2,y_2,z_2\},$$
$$\overrightarrow{OM_1}=\{x_1,y_1,z_1\},$$

所以由定理 1 得

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

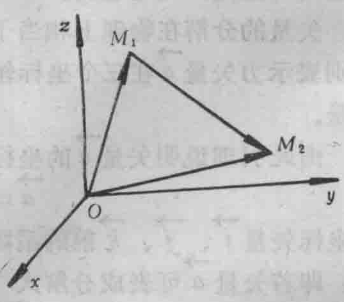

图 8.11

由此定理与矢量的求模公式易得两点的距离公式

$$d=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 1. 已知 $M_1=(3,-2,1)$，$M_2=(6,4,-5)$，求 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_1}$ 及两点间的距离。

解：由定理 2 得

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{6-3,4-(-2),(-5)-1\}=\{3,6,-6\},$$
$$\overrightarrow{M_2M_1}=\{3-6,-2-4,1-(-5)\}=\{-3,-6,6\},$$
$$d=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{3^2+6^2+(-6)^2}=\sqrt{81}=9.$$

例2. 已知 $M_1=(x_1,y_1,z_1)$，$M_2=(x_2,y_2,z_2)$，求联线 M_1M_2 的中点的坐标。

解：设 M_1M_2 的中点为M，其坐标为 (x,y,z)，则

$$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}.$$

由假定知

$$\overrightarrow{OM_1}=\{x_1,y_1,z_1\},$$
$$\overrightarrow{OM_2}=\{x_2,y_2,z_2\}$$
$$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{MM_2}.$$

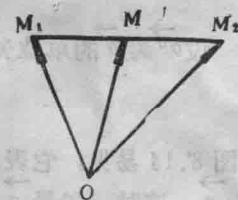

图 8.12

因为

$$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1},\quad \overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM},$$

所以

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}$$

由此，可得

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2})=\left\{\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right\}.$$

故 M_1M_2 的中点M的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

思考题

设点M为 $M_1=(x_1,y_2,z_1)$、$M_2=(x_2,y_2,z_2)$ 的联线上一分点，其分比为λ，即 $\overline{M_1M}=\lambda\overline{MM_2}$。用矢量求分点的坐标（即分比公式）。

3. 矢量的数量积（点乘）

1° 定义

大家知道，一个恒力$\vec{F}$作用于物体，其位移为$\vec{s}$，则力$\vec{F}$所作的功是

$$W=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta,$$

其中θ为力$\vec{F}$与位移$\vec{s}$间的夹角。

显然，功W是由矢量$\vec{F}$与$\vec{s}$所完全确定的一个数。现在，我们抽去其物理意义，来定义两个矢量的数量积如下：

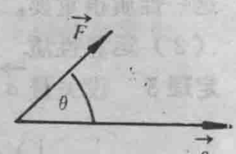

图 8.13

定义 2 给定两个矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$，我们称矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$的模与其夹角的余弦的乘积

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

为矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积**（也称点乘），记为$\vec{a}\cdot\vec{b}$，即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$$

由定义易得

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0.$$

设$\vec{b^0}$为$\vec{b}$的单位矢量，则
$$\vec{a}\cdot\vec{b^0}=|\vec{a}||\vec{b^0}|\cos\theta=|\vec{a}|\cos\theta,$$
从图 8.14 易见，它表示矢量$\vec{a}$在$\vec{b}$方向的投影值，记为$\pi_{\vec{b}}\vec{a}$。这时，矢量$\vec{a}$在$\vec{b}$方向的分矢量
$$\overrightarrow{PQ}=(|\vec{a}|\cos\theta)\vec{b^0}$$
$$=(\vec{a}\cdot\vec{b^0})\vec{b^0}$$

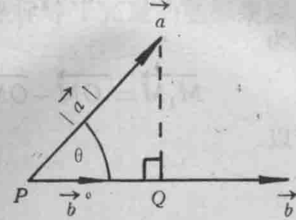

图 8.14

以上意义很重要，它说明：矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的单位矢量的数量积$\vec{a}\cdot\vec{b^0}$表示矢量$\vec{a}$在$\vec{b}$方向的投影值。

思考题

$\vec{a}\cdot\vec{i}$、$\vec{a}\cdot\vec{j}$、$\vec{a}\cdot\vec{k}$与矢量$\vec{a}$的坐标有何关系？

2° 数量积的性质

根据数量积的定义可得

（1）矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$垂直的充要条件是：$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$。

证：必要性。若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，由定义得
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

充分性。若$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则由定义知
$$\theta=\frac{\pi}{2}，或\vec{a}=\vec{0}，或\vec{b}=\vec{0}.$$

因为零矢量方向不定，我们可以认为它与任何矢量垂直，所以由上得知$\vec{a}\perp\vec{b}$。

这一性质很重要，以后常用，我们把它叫做数量积的几何性质。

（2）运算性质

定理 3 设矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$与数λ已知，则矢量的数量积满足以下规律：

i） $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；

ii） $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$；

iii） $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$。

性质 i）由定义显见，性质 ii）、iii）从力作功来看是显然的，用定义证明较繁，就不证了。读者要明确，学习矢量代数，重点在于掌握矢量运算及其应用，而不在于推理。

3° 数量积的坐标表示

定理 4 若$\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

证 因

$$\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},$$
$$\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k};$$

又

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0.$$

所以

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})\\&=a_1b_1\vec{i}\cdot\vec{i}+a_1b_2\vec{i}\cdot\vec{j}\\&\quad+a_1b_3\vec{i}\cdot\vec{k}+a_2b_1\vec{j}\cdot\vec{i}+a_2b_2\vec{j}\cdot\vec{j}\\&\quad+a_2b_3\vec{j}\cdot\vec{k}+a_3b_1\vec{k}\cdot\vec{i}+a_3b_2\vec{k}\cdot\vec{j}\\&\quad+a_3b_3\vec{k}\cdot\vec{k}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.\end{aligned}$$

易得以下重要推论：

推论 若 $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, 则

1) $\vec{a}\perp\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$;

2) $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$;

3) $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.

例3. 判别下列矢量是否垂直：

1) $\vec{a}=\{2,1,-3\}$, $\vec{b}=\{1,2,0\}$;

2) $\vec{a}=\{1,-1,0\}$, $\vec{b}=\{3,3,1\}$.

解： 1) $\because\ \vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+1\times2+(-3)\times0=4\neq0$,

$\therefore\ \vec{a}$ 不垂直于 $\vec{b}$.

2) $\because\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1\times3+(-1)\times3+0\times1=3-3+0=0$,

$\therefore\ \vec{a}\perp\vec{b}$.

例4. 已知 $\vec{a}=\{2,2,-1\}$, $\vec{b}=\{-1,2,2\}$, 求 $|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$ 与 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 间的夹角 θ.

解： $|\vec{a}|=\sqrt{2_2+2_2+(-1)_2}=3$,

$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=3$,

$$\because\quad \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{2\times(-1)+2\times2+(-1)\times2}{3\times3}$$

$$=\frac{-2+4-2}{9}=0,$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{2}.$$

4° 单位矢量与方向余弦

矢量$\vec{a}$与坐标量矢量$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$的夹角α、β、γ，叫做矢量$\vec{a}$的方向角。给定一个矢量，就有三个方向角。反之，给定了三个方向角，就确定一个方向。方向角的余弦$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$叫做矢量$\vec{a}$的方向余弦。

已知矢量$\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，怎么求矢量$\vec{a}$的方向余弦呢？

我们由数量积的坐标表示及定义知道

$$a_1=\vec{a}\cdot\vec{i}=|\vec{a}|\cos\alpha,$$
$$a_2=\vec{a}\cdot\vec{j}=|\vec{a}|\cos\beta$$
$$a_3=\vec{a}\cdot\vec{k}=|\vec{a}|\cos\gamma.$$

因此，矢量$\vec{a}$的方向余弦与其坐标的关系为

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\vec{a}|}=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_2}{|\vec{a}|}=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{|\vec{a}|}=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

由矢量$\vec{a}$的方向余弦组成的矢量

$$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{a_1}{|\vec{a}|},\ \frac{a_2}{|\vec{a}|},\ \frac{a_3}{|\vec{a}|}\right\}$$

$$=\frac{1}{|\vec{a}|}\{a_1,a_2,a_3\}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},$$

显然，矢量$\frac{a}{|\vec{a}|}$为一个与矢量$\vec{a}$同向的单位矢量。由此可知，矢量$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$为矢量$\vec{a}$的单位矢量，记为$\vec{a^0}$；矢量$\vec{a}$的单位矢量$\vec{a^0}$的三个坐标就是矢量$\vec{a}$的三个方向余弦，即

$$\vec{a^0}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

这是矢量$\vec{a}$的单位矢量与其方向余弦的关系，此关系很重要，它告诉我们：求方向余弦，只要将矢量$\vec{a}$单位化，则其单位矢量$\vec{a^0}$的坐标就是方向余弦。由此关系易见，三个方向余弦的平方和等于1，因为

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=|\vec{a^0}|^2=1.$$

例5. 求矢量$\vec{a}=\{2,2,-1\}$的方向余弦。

解： $\because$ $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}=3,$

$\therefore$ $\vec{a^0}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{3}\{2,2,-1\}=\left\{\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right\},$

由此得

$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\ \cos\beta=\frac{2}{3},\ \cos\gamma=-\frac{1}{3}.$$

4. 矢量的矢量积（叉乘）

1° 定义

在力学中知道，力$\vec{F}$对于定点O的力矩是一个矢量$\vec{M}$（图 8.15），它由矢量$\vec{r}$与$\vec{F}$唯一确定：矢量$\vec{M}$的模

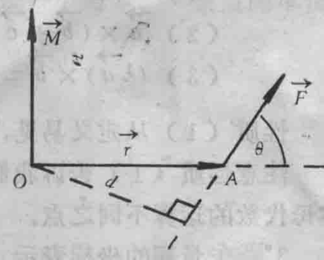

图 8.15

$$|\vec{M}|=|\vec{F}|d=|\vec{F}||\vec{r}|\sin\theta;$$

而方向与$\vec{r}$、$\vec{F}$垂直，且$\vec{r}$、$\vec{F}$、$\vec{M}$成右手系.

抽去以上问题的物理意义，我们给出两个矢量的矢量积的定义如下：

定义 3 设给定了两矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$，又$\vec{e}$表示一个与$\vec{a}$、$\vec{b}$垂直，且$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{e}$成右手系的单位矢量. 则称由矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$所决定的矢量

$$(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta)\vec{e}$$

为矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$的**矢量积**（也称叉乘），记为$\vec{a}\times\vec{b}$，其中θ为矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$间的夹角，即

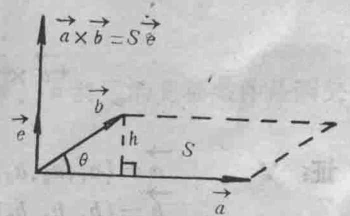

图 8.16

$$\vec{a}\times\vec{b}=(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta)\vec{e}.$$

从定义可见，$\vec{a}\times\vec{b}$为一矢量，它的模是

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=|\vec{a}|h=S,$$

也就是以矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$为邻边作成的平行四边形的面积；至于它的方向则与$\vec{e}$相同，即与$\vec{a}$、$\vec{b}$垂直，且$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{a}\times\vec{b}$成右手系. 由此，矢量积$\vec{a}\times\vec{b}=S\vec{e}$.

注意：$\vec{a}\cdot\vec{b}$为一数量，而$\vec{a}\times\vec{b}$为一矢量；$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，而$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，$\vec{a}\times\vec{b}=(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta)\vec{e}$，不要误认为$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$！

有了矢量积，可将力矩$\vec{M}$与力$\vec{F}$、$\vec{r}$的关系表为

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}.$$

由矢量积的定义易得

$$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0};$$
$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0};$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.$$

2° 矢量积的性质

从矢量积的定义得其几何性质：

定理 5 设矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$与数λ已知，则

1）矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$共线（即平行）的充要条件是：

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}.$$