关于原子核內的多次散射理論

楊 立 銘

(物理系理論物理教研室)

晚近在原子核理論方面有不少工作[1][2][3]企圖从分析核內核子間的多次相互作用来改进 Hartree-Фок 理論。这一工作是从 Watson[4] 等人的多次散射理論开始的。本文拟就多次散射理論作一較系統的分析。

多次散射理論的初次提出是为了奠定光学模型的基础。为了略去次要因素以显示多次散射的特点，我們將忽略掉核子的自旋与同位旋坐标，並不計交換散射。这个散射問題的总哈密顿量 H 为：

$$\left.\begin{aligned} H &= H_0 + V \\ H_0 &= H(A) + \frac{P_0^2}{2M} \\ H(A) &= \sum_{i=1}^{A} \frac{P_i^2}{2M} + \sum_{i<j}^{A} v_{ij} \\ V &= \sum_{i=1}^{A} v_{0i} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

考慮在初态时原子核(包含 A 个核子)处於基态，入射核子具有动量 P_0。散射的結果一般將是很复杂的，但由於上述的簡化，我們只須考慮彈性散射与非彈性散射。散射态波函数可写为：

$$\Psi = \Omega\Phi \tag{2}$$

其中 Φ 表初态，它是 H_0 的屬於本征值 E 的本征态。Ω 为熟知的散射算符

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= 1 + \frac{1}{a-V}V = 1 + \frac{1}{a}V\Omega \\ a &= E - H_0 + i\epsilon \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ϵ 为一小整数，Ω 被了解为一符号算符，即(2)式应被了解为

$$\Psi = \lim_{\epsilon\to 0}\Omega\Phi$$

Watson 曾首先証明了(3)可变換为下一組积分方程

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= 1 + \frac{1}{a}\sum_{\alpha_1} t_{\alpha_1}\Omega_{\alpha_1} \\ \Omega_{\alpha_1} &= 1 + \frac{1}{a}\sum_{\alpha_1\neq\alpha_2} t_{\alpha_2}\Omega_{\alpha_2} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

* 1958 年 2 月 4 日收到。

其中 α 表任何一对指标 $(0,i)$，i 可从 1 到 A. t_α 满足下一积分方程:

$$t_\alpha = v_\alpha + v_\alpha \frac{1}{a} t_\alpha \tag{5}$$

我們將給(4)以另一証明，这一方法以后还將用来改进(4)的結構. 將(3)首先写开如下:

$$\Omega = 1 + \frac{1}{a}\sum_{\alpha_1} v_{\alpha_1} + \frac{1}{a}\sum_{\alpha_1,\alpha_2} v_{\alpha_1}\frac{1}{a}v_{\alpha_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{a}\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n} v_{\alpha_1}\frac{1}{a}v_{\alpha_2}\cdots\frac{1}{a}v_{\alpha_n} + \cdots \tag{6}$$

上式中对 α 的求和是互相独立的. 現在分析上式中的第 n 項，每一个指标 α_i 可以从 $(0,1)$ 到 $(0,A)$，相鄰的指标可以相等也可以不相等，如果將指标相同的鄰結合成小区，则一个典型的分区可表示如下:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{a}v_{\alpha'}\frac{1}{a}v_{\alpha'}\cdots\frac{1}{a}v_{\alpha'}\right)}_{\text{共 } n_1 \text{ 个 } \alpha'}\underbrace{\left(\frac{1}{a}v_{\alpha''}\cdots\frac{1}{a}v_{\alpha''}\right)}_{\text{共 } n_2 \text{ 个 } \alpha''}\cdots\cdots\underbrace{\left(\frac{1}{a}v_{\alpha^{(r)}}\cdots\cdots\frac{1}{a}v_{\alpha^{(r)}}\right)}_{\text{共 } n_r \text{ 个 } \alpha^{(r)}}$$

其中 $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$，r 可以从 1 到 n. 若 (6) 中每一項都进行这样的分区，則从第 2 項起將每項中 $r=1$ 的項合併便得

$$\frac{1}{a}\sum_\alpha t_\alpha = \frac{1}{a}\sum_\alpha v_\alpha + \frac{1}{a}\sum_\alpha v_\alpha\frac{1}{a}v_\alpha + \cdots\cdots$$

又如將从第三項起每一項中 $r=2$ 的項合併，則得到

$$\frac{1}{a}\sum_{\alpha_1\neq\alpha_2}\left(t_{\alpha_1}\frac{1}{a}t_{\alpha_2}\right) = \frac{1}{a}\sum_{\alpha_1\neq\alpha_2}\left[v_{\alpha_1}\frac{1}{a}v_{\alpha_2} + v_{\alpha_1}\frac{1}{a}v_{\alpha_1}\frac{1}{a}v_{\alpha_2} + v_{\alpha_1}\frac{1}{a}v_{\alpha_2}\frac{1}{a}v_{\alpha_2} + \cdots\cdots\right]$$

余此类推，(6)式中各項經过这种重新組合后变为

$$\Omega = 1 + \frac{1}{a}\sum_{(\alpha)}\left(t_{\alpha_1} + t_{\alpha_1}\frac{1}{a}t_{\alpha_2} + t_{\alpha_1}\frac{1}{a}t_{\alpha_2}\frac{1}{a}t_{\alpha_3} + \cdots\cdots\right) \tag{7}$$

其中 $\sum_{(\alpha)}$ 表在求和中相鄰的指标 α 不相等. t_α 本身已表示同一对核子的多次散射，几个 t_α 連乘表示入射核子与核内某一核子碰撞多次后再与其他核子碰撞. (7)显然与(4)等

(7)式与(6)式相比，好像以 t_α 代替 v_α 作为微扰，而 t_α 本身由(5)可知是任意次 v_α 作用的总和，因此(7)式可能有比(6)式較好的性質.

其次在 Ω 中可以將彈性部分与非彈性部分分开. 为此先將 t_α 的对角線部分 C_α 与非对角線部分 I_α 分开(对 $H(A)$ 的本征态而言)，以 $t_\alpha = C_\alpha + I_\alpha$ 代入(7)，其第 $(n+1)$ 項为

$$\sum_{(\alpha)}\frac{1}{a}(C_{\alpha_1} + I_{\alpha_1})\Big)\frac{1}{a}(C_{\alpha_2} + I_{\alpha_2})\cdots\cdots\frac{1}{a}(C_{\alpha_n} + I_{\alpha_n})$$

如果將相鄰为 I_α 与相鄰为 C_α 部分各自分区則得到

$$\sum_{(\alpha)}\underbrace{\left(\frac{1}{a}C_{\alpha_1'}\frac{1}{a}C_{\alpha_1''}\cdots\cdots\frac{1}{a}C_{\alpha_1^{(n_1)}}\right)}_{(n_1\text{ 个 }C)}\underbrace{\left(\frac{1}{a}I_{\alpha_2'}\cdots\cdots\frac{1}{a}I_{\alpha_2^{(n_2)}}\right)}_{(n_2\text{ 个 }I)}\underbrace{\left(\frac{1}{a}C_{\alpha_3'}\cdots\cdots\frac{1}{a}C_{\alpha_3^{(n_3)}}\right)}_{(n_3\text{ 个 }C)}\cdots\cdots$$

或者是　　$(n_1$ 个 $I)$ $(n_2$ 个 $C)$ $(n_3$ 个 $I)\cdots\cdots$

在这些系列中任何两个相鄰的 α 都不相同．並且 $\sum_{i=1}^{r} n_i=n$, r 可以从 1 到 n. 經过这样分区后，若將 (7) 式中从第 2 項起 $r=1$ 的項合併則得 $\frac{1}{a}(g+g_c)$，其中

$$g=\sum_{(\alpha)}\left(I_{\alpha_1}+I_{\alpha_1}\frac{1}{a}I_{\alpha_2}+\cdots\cdots\right)$$
$$g_c=\sum_{(\alpha)}\left(C_{\alpha_1}+C_{\alpha_1}\frac{1}{a}C_{\alpha_2}+\cdots\cdots\right)$$

又如將(7)式中从第 3 項起 $r=2$ 的項合併，則得 $\frac{1}{a}\left(g\frac{\check{1}}{a}g_c+g_c\frac{\check{1}}{a}g\right)$ 其中符号 $\vee$ 表相鄰兩項的 α 不相同．再將(7)式中从第四項起 $r=3$ 的項合併則得

$$\frac{1}{a}\left(g_c\frac{\check{1}}{a}g\frac{\check{1}}{a}g_c+g\frac{\check{1}}{a}g_c\frac{\check{1}}{a}g\right)，余此类推．$$

因此(7)式变为

$$\Omega=1+\frac{1}{a}g_c+\left(1+\frac{1}{a}g_c\right)\frac{\check{1}}{a}G\left(1+\frac{\check{1}}{a}g_c\right) \tag{8}$$

其中　$$G=\left(g+g\frac{\check{1}}{a}g_c\frac{\check{1}}{a}g+g\frac{\check{1}}{a}g_c\frac{\check{1}}{a}g\frac{\check{1}}{a}g_c\frac{\check{1}}{a}g+\cdots\cdots\right)=g+g\frac{\check{1}}{a}g_c\frac{\check{1}}{a}G \tag{9}$$

在此可注意由於核波函数的反对称性 C_α 实与 α 無关，但 I_α 与 α 有关．由此知

$$\frac{1}{a}g_c=\frac{A}{A-1}\left(\frac{1}{a}T_c+\frac{1}{a}T_c\frac{1}{a}T_c+\cdots\cdots\right)=\frac{A}{A-1}\cdot\frac{1}{a-T_c}T_c \tag{10}$$

其中 $T_c=(A-1)C$．若 g_c 的左或右边有 $\vee$ 符号者則在求和时須注意与相鄰指标不相同．

$$\frac{\check{1}}{a}g_c=\frac{1}{a-T_c}T_c \tag{11}$$

$$\frac{1}{a}g_c\frac{\check{1}}{a}=\frac{1}{a-T_c}T_c\frac{1}{a} \tag{12}$$

代入(8)式得

$$\left.\begin{aligned}\Omega&=\left(1+\frac{A}{A-1}\frac{1}{a-T_c}T_c\right)+\left(1+\frac{1}{a-T_c}T_c\right)\frac{1}{a}G\left(1+\frac{1}{a-T_c}T_c\right)\\&=\left(1+\frac{1}{a-T_c}G\right)\left(1+\frac{1}{a-T_c}T_c\right)+\frac{1}{A-1}\frac{1}{a-T_c}T_c\\&\doteq\left(1+\frac{1}{a-T_c}G\right)\left(1+\frac{1}{a-T_c}T_c\right)\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Ω 中除了一項相对数量級为 $\frac{1}{A}$ 的彈性散射外，可以写成兩个因子相乘的形式：第一个因子 $\left(1+\frac{1}{a-T_c}T_c\right)$ 表示入射波在等效位能 T_c 中的彈性散射（卽光学模型位能中主要的一部分。）这样的散射态波函数或者通过第二个因子中的"1"傳播出去，或者通过"G"而經受任意次非彈性散射，（在任意二次非彈性散射之間还可以經受任意次彈性散射。）再通过 $\frac{1}{a-T_c}$，表示又在等效位能 T_c 下經受彈性散射。

考虑到經受若干次非彈性散射后原子核仍可回到初态，故第二个因子 $\left(1+\frac{1}{a-T_c}G\right)$ 中仍包含着彈性部分。要將这部分分出必須先將 G 化簡。

G 的形式可改写为

$$G=\sum_{(\alpha)}\left\{I_{\alpha_1}+I_{\alpha_1}\left(1+\frac{\check{1}}{a}g_c\right)\frac{\check{1}}{a}I_{\alpha_2}+I_{\alpha_1}\left(1+\frac{\check{1}}{a}g_c\right)\frac{\check{1}}{a}I_{\alpha_2}\left(1+\frac{\check{1}}{a}g_c\right)\frac{\check{1}}{a}I_{\alpha_3}+\cdots\cdots\right\} \tag{14}$$

其中 $\left(1+\frac{\check{1}}{a}g_c\right)\frac{\check{1}}{a}$ 之值視左右相鄰指标是否相同而異。可以証明（見附录）：

$$\left.\begin{aligned}\left(1+\frac{\check{1}}{a}g_c\right)\frac{\check{1}}{a}&=\frac{1}{a-T_c}-\frac{1}{A}\left(\frac{1}{a-T_c}-\frac{1}{a+c}\right) && \text{如左右相鄰指标不等}\\ &=\frac{A-1}{A}\left(\frac{1}{a-T_c}-\frac{1}{a+c}\right) && \text{如左右相鄰指标相等}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

(14)仍可按相鄰指标相同与否分別求和，但因相鄰相等指标項的項数只有相鄰指标不相等項数的 $\frac{1}{A}$，为簡單計將取 $\left(1+\frac{\check{1}}{a}g_c\right)\frac{\check{1}}{a}=\frac{1}{a-T_c}$ 不論相鄰指标相等与否。(14)式便可簡化为：

$$G=I+I\frac{1}{e}I+I\frac{1}{e}I\frac{1}{e}I+\cdots\cdots=I+I\frac{1}{e-I}I \tag{16}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}e&=a-T_c\\ I&=\sum_{\alpha}I_\alpha\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

以(16)式代入(13)得

$$\Omega=\left(1+\frac{1}{e-I}I\right)\left(1+\frac{1}{e}T_c\right) \tag{18}$$

为了抽出 $\left(1+\frac{1}{e-I}I\right)$ 中的彈性散射部分，引进

$$Q=\left(1+\frac{1}{e-I}I\right)\frac{1}{e}=\frac{1}{e-I} \tag{19}$$

Q 文中的彈性部分与非彈性部分分別用 Q_e 及 Q_i 表示❶

---

❶ 这里將 Q 分成对角線与非对角線部分，在形式上与 Heitler 的阻尼方程[4]相类似，这里的 I_i 及 $\frac{1}{e-I_a}$ 分別相当於 Heitler 的 U_{n10} 及 G_{0t0}。

$$Q=Q_c+Q_i \tag{20}$$

$$Q_c=\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e}I\frac{1}{e}+\frac{1}{e}I\frac{1}{e}I\frac{1}{e}+\cdots\cdots\right)_c \tag{21}$$

$$=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\left(I_c+I_c\frac{1}{e}I_c+\cdots\cdots\right)\frac{1}{e} \tag{22}$$

$$=\frac{1}{e-I_c} \tag{23}$$

其中
$$I_c=\underbrace{\left(I\frac{1}{e}I+I\frac{1}{e}I\frac{1}{e}I+\cdots\cdots\right)_c}_{\text{中間态不回到初态}} \tag{24}$$

从(21)到(22)可看成按中間态回到初态的次数来分类.

$$Q_i=\frac{1}{e}\left[I+I\frac{1}{e}I+\cdots\cdots\right]_i\frac{1}{e} \tag{25}$$

$$=\frac{1}{e}\left[I_i+I_i\frac{1}{e}I_c+I_i\frac{1}{e}I_c\frac{1}{e}I_c+\cdots\cdots\right]\frac{1}{e} \tag{26}$$

$$=\frac{1}{e}I_i\frac{1}{e-I_c} \tag{27}$$

其中
$$I_i=\underbrace{\left[I+I\frac{1}{e}I+I\frac{1}{e}I\frac{1}{e}I+\cdots\cdots\right]_i}_{\text{中間态不回到初态}} \tag{28}$$

从(25)到(26)也可以看成按中間态回到初态的次数来分类. 从(24)及(28)可以看出

$$\left(I\frac{1}{e}I_i\right)_c=I_c \tag{29}$$

將(23)及(27)代入(20)得

$$Q=\left(1+\frac{1}{e}I_i\right)\frac{1}{e-I_c}=\left(1+\frac{1}{e}I_i\right)\left(1+\frac{1}{e-I_c}I_c\right)\frac{1}{e} \tag{30}$$

利用(30),(19)及(18)便得

$$\begin{aligned}\Omega&=\left(1+\frac{1}{e}I_i\right)\left(1+\frac{1}{e-I_c}I_c\right)\left(1+\frac{1}{e}T_c\right)\\&=\left(1+\frac{1}{e}I_i\right)\left[1+\frac{1}{a-I_c-T_c}(T_c+I_c)\right]\\&=\left(1+\frac{1}{a-T_c}I_i\right)\left(1+\frac{1}{a-V_c}V_c\right)\end{aligned} \tag{31}$$

其中 $V_c=T_c+I_c$ 即全部光学模型位能. (31)式的物理意义是很清楚的, 第一个因子 $\left(1+\frac{1}{a-V_c}V_c\right)$ 包括了全部的弹性散射, 这些弹性散射波或者通过第二个因子的"1"傳播出去, 或者通过第二个因子中的"I_i"而經受非弹性散射, 最后通过"$\frac{1}{a-T_c}$"被弹性

散射及傳播出去.

如果在化簡(13)的过程中,我們採取不同的近似,例如取

$$\left.\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{a}g_c\right)\frac{1}{a}&=\frac{1}{a-T_c} \qquad \text{如左右相鄰指标不相等}\\ &=0 \qquad \text{如左右相鄰指标相等}\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

則

$$G=\sum_{(\alpha)}\left(I_{\alpha_1}+I_{\alpha_1}\frac{1}{e}I_{\alpha_2}+I_{\alpha_1}\frac{1}{e}I_{\alpha_2}\frac{1}{e}I_{\alpha_3}+\cdots\cdots\right) \tag{33}$$

由此可見,$\left(1+\frac{1}{e}G\right)$ 卽相当於 Watson[1] 的 F 算符,只是 $(A-1)\,C$ 被 AC 代替.

直到現在还沒有引進自洽的要求. Watson 在他的早先的工作中,曾提出 t_α 的定义还可改進,卽

$$t_\alpha=v_\alpha+v_\alpha\frac{1}{e}\,t_\alpha \tag{34}$$

他当初的証明只是代回原 Schrödinger 方程式,看他的解是否近似地滿足. 以下我們可以看到,t_α 的改进可以很自然地得出. 而且还能求出高級近似解.

倘若在最初分开总哈密頓量时,引进任意一个我們能猜到的光学位能 V_{c_0},它只依賴於入射核子的坐标,与原子核內核子的坐标無关.

$$H=(H_0+V_{c_0})+(V-V_{c_0}) \tag{35}$$

首先求下一問题的散射解

$$(E-H_0)\,\Psi^\circ=V_{c_0}\Psi^\circ \tag{36}$$

$$\left.\begin{aligned}\Psi^\circ&=\Phi^\circ+\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}V_{c_0}\Psi^\circ\\ &=\left(1+\frac{1}{e_0}V_{c_0}\right)\Phi^\circ, \qquad e_0=a-V_{c_0}=E-H_0-V_{c_0}+i\epsilon\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

然后再求下式的散射解

$$(E-H_0-V_{c_0})\Psi=(V-V_{c_0})\Psi \tag{38}$$

$$\left.\begin{aligned}\Psi&=\Psi^\circ+\frac{1}{E-H_0-V_{c_0}+i\epsilon}(V-V_{c_0})\Psi=\Omega_0\Psi^\circ=\Omega\Phi\\ \Omega_0&=1+\frac{1}{e_0}W_0\Omega_0=1+\frac{1}{e_0-W_0}W_0\\ \Omega&=\Omega_0\left(1+\frac{1}{e_0}V_{c_0}\right)\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

其中

$$W_0=V-V_{c_0}=\sum_\alpha\left(v_\alpha-\frac{V_{c_0}}{A}\right)=\sum_\alpha w_{0\alpha} \tag{40}$$

从(39)出發可以重复前述的計算,得到

$$\Omega_0=1+\frac{1}{e_0}\sum_{(\alpha)}\left(t_{0\alpha}+t_{0\alpha}\frac{1}{e_0}t_{0\alpha}+\cdots\cdots\right)$$

$$t_{0\alpha}=w_{0\alpha}+w_{0\alpha}\frac{1}{e_0}t_{0\alpha}=C_{0\alpha}+I_{0\alpha}=C_0+I_{0\alpha}$$

$$\Omega_0=\left(1+\frac{1}{e_0-T_{c_0}}G_0\right)\left(1+\frac{1}{e_0-T_{c_0}}T_{c_0}\right)$$

$$T_{c_0}=(A-1)C_0$$

$$\Omega=\left(1+\frac{1}{e_0-T_{c_0}}G_0\right)\left(1+\frac{1}{e_0-T_{c_0}}T_{c_0}\right)\left(1+\frac{1}{e_0}V_{c_0}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{e_0-T_{c_0}}G_0\right)\left[1+\frac{1}{e_0-T_{c_0}}(T_{c_0}+V_{c_0})\right] \tag{41}$$

由(41)式看出，如果开始时以 $V_{c_1}=V_{c_0}+T_{c_0}$ 代替 V_{c_0} 將会得到較好的結果。这样的叠代显然可以重复进行，如果这个叠代过程收歛的話，最后会得到最好的 V_c，

$$H=(H_0+V_c)+(V-V_c) \tag{42}$$

由(42)出發將得到

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi'=\Omega_c\Phi^\circ\\
&\Omega_c=\left(1+\frac{1}{e}V_c\right)\\
&\quad e=E-H_0-V_c+i\epsilon\\
&\Psi=\Psi^\circ+\frac{1}{e}W\Psi=\Omega_1\Psi^\circ=\Omega\Phi^\circ\\
&W=V-V_c=\sum_\alpha w_\alpha=\sum_\alpha\left(v_\alpha-\frac{A-1}{A}C_\alpha\right)=\sum_\alpha(v_\alpha-C'_\alpha)\\
&\Omega_1=1+\frac{1}{e}W\Omega_1\\
&\quad=1+\frac{1}{e}\sum_{(\alpha)}\left(R_{\alpha_1}+R_{\alpha_1}\frac{1}{e}R_{\alpha_2}+\cdots\cdots\right)\\
&R_\alpha=w_\alpha+w_\alpha\frac{1}{e}R_\alpha
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

如果 V_c 的选擇已是最好，則从 R_α 中將分出对角線部分，亦卽利用

$$\langle R_\alpha\rangle=\langle w_\alpha+w_\alpha\frac{1}{e}R_\alpha\rangle=0 \tag{44}$$

来决定 V_c。〈 〉表算符的对角線部分(对原子核的态而言)(43)的最末一式可以重新写成

$$R_\alpha=t_\alpha+\left(1+t_\alpha\frac{1}{e}\right)P_\alpha\left(\frac{1}{e}t_\alpha+1\right) \tag{45}$$

其中

$$t_\alpha=v_\alpha+v_\alpha\frac{1}{e}t_\alpha \tag{46}$$

$$P_\alpha=-C'_\alpha-C'_\alpha\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e}t_\alpha\frac{1}{e}\right)P_\alpha \tag{47}$$

从(45)式提取所需要的解是很复杂的，我們將利用逐步近似法．假定 t_α 沒有 v_α 的不利於微扰法的性質，从(45)式提出的零級与一級部分各为

$$R_\alpha^{(0)}=t_\alpha-C'_\alpha \tag{48}$$

$$R_\alpha^{(0)}+R_\alpha^{(1)}=(t_\alpha-C'_\alpha)+\left(C'_\alpha\frac{1}{e}C'_\alpha\right)-\left(t_\alpha\frac{1}{e}C'_\alpha\right)-\left(C'_\alpha\frac{1}{e}t_\alpha\right) \tag{49}$$

应用条件(44)至(48)便得零級解

$$\left.\begin{array}{c} C'_\alpha=\langle t_\alpha\rangle, \quad V_c=Ac'_\alpha=A\langle t_\alpha\rangle \\ R_\alpha^{(0)}=(t_\alpha)_i=t_\alpha-\langle t_\alpha\rangle \end{array}\right\} \tag{50}$$

再应用条件(44)至(49)得一級解如下

$$\left.\begin{array}{c} C'_\alpha=\langle t_\alpha\rangle-\langle t_\alpha\rangle\frac{1}{e}\langle t_\alpha\rangle, V_c=AC'_\alpha=A\left[\langle t_\alpha\rangle-\langle t_\alpha\rangle\frac{1}{e}\langle t_\alpha\rangle\right] \\ R_\alpha^{(0)}+R_\alpha^{(1)}=(t_\alpha)_i-(t_\alpha)_i\frac{1}{e}\langle t_\alpha\rangle-\langle t_\alpha\rangle\frac{1}{e}(t_\alpha)_i \end{array}\right\} \tag{51}$$

上述零級解与 Watson 所猜测的解相同。但利用上法可求得高級解。

应当指出，应用上法求得 V_c 后尚不是全部的光学模型位能，还可以从 Ω_1 中抽出一部分彈性散射。如果略去 $O\left(\frac{1}{A}\right)$項，則

$$\begin{aligned} \Omega_1&=\left(1+\frac{1}{e-R}R\right) \\ &=\left(1+\frac{1}{e}R_i\right)\left(1+\frac{1}{e-R_c}R_c\right) \end{aligned} \tag{52}$$

其中 $R=\sum_\alpha R_\alpha$，R_c 与 R_i 分别为 R 的对角線与非对角線部分。

$$\begin{aligned} \Omega&=\Omega_1\Omega_c \\ &=\left(1+\frac{1}{e}R_i\right)\left[1+\frac{1}{a-V_c-R_c}(V_c+R_c)\right] \end{aligned} \tag{53}$$

上式中的 (V_c+R_c) 才是全部光学模型位能。

以上所求出的光学模型位能在形式上似乎很完整，但这方法中包含有一些缺点，除了在开始时所提到的一些因素未考虑外，关於原子核的波函数及能級在这里是被假定已知的，因此除非我們对原子核波函数及能級作某些具体假定，是無法具体地严格地計算出光学模型位能来的。Watson 所得到結果是非常粗糙的。我們將在以后的文章中討論这些問題。

附 录 1

要証明(15)式，先考虑一普遍項：

$$\sum_{(\alpha)}\left(I_{\alpha'}\frac{1}{a}c_{\alpha_1}\frac{1}{a}c_{\alpha_2}\cdots\cdots\frac{1}{a}c_{\alpha_n}\frac{1}{a}I_{\alpha''}\right)$$

$$=\sum_{\alpha'}\left(I_{\alpha'}\frac{1}{a}T_c\frac{1}{a}T_c\cdots\cdots\frac{1}{a}T_c\frac{1}{a}I_{\alpha'}\right)\left(1-\frac{1}{A-1}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(A-1)^{n-1}}\right)$$

$$+\sum_{(\alpha)}\left(I_{\alpha'}\frac{1}{a}T_c\frac{1}{a}T_c\cdots\frac{1}{a}T_c\frac{1}{a}I_{\alpha''}\right)\left(1-\frac{1}{A-1}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{(A-1)^n}\right)$$

$$=\sum_{\alpha'}\left(I_{\alpha'}\frac{1}{a}T_c\frac{1}{a}T_c\cdots\cdots\frac{1}{a}T_c\frac{1}{a}I_{\alpha'}\right)\frac{(A-1)^n-(-1)^n}{A(A-1)^{n-1}}$$

$$+\sum_{(\alpha)}\left(I_{\alpha'}\frac{1}{a}T_c\frac{1}{a}T_c\cdots\cdots\frac{1}{a}T_c\frac{1}{a}I_{\alpha''}\right)\frac{(A-1)^{n+1}-(-1)^{n+1}}{A(A-1)^{n-1}}$$

由上容易証明

$$\sum_{(\alpha)}I_{\alpha'}\left\{\frac{\check{1}}{a}+\frac{\check{1}}{a}g_c\frac{\acute{1}}{a}\right\}I_{\alpha''}$$

$$=\sum_{(\alpha)}I_{\alpha'}\left\{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}c_{\alpha_1}\frac{1}{a}+\frac{1}{a}c_{\alpha_1}\frac{1}{a}c_{\alpha_1}\frac{1}{a}+\cdots\cdots\right\}I_{\alpha''}$$

$$=\sum_{\alpha'}I_{\alpha'}\left\{\frac{A-1}{A}\left(\frac{1}{a-T_c}-\frac{1}{a+U}\right)\right\}I_{\alpha'}$$

$$+\sum_{(\alpha)}I_{\alpha'}\left\{\frac{1}{a-T_c}-\frac{1}{A}\left(\frac{1}{a-T_c}-\frac{1}{a+c}\right)\right\}I_{\alpha''}.$$

参 考 文 献

[1] Watson, K. M., *Phys. Rev.* **89**, 575, 1953.
Francis, N. C. & K. M. Watson, *Phys, Rev*, **92** 291, 1953.

[2] Brueckner, K. A., *Phys Rev.* **97**, (1353); **100**, 36, 1955.
Brueckner, K. A., R. J. Eden, & N. C. Francis, *Phys. Rev.* **93**, 1445, 1955.
Brueckner, K. A., & C. A. Levinson, *Phys. Rev*, **97**, 1344, 1955.

[3] Eden, R. J., *Proc. Roy. Soc. A.* **235**, 408, 1956.
Bethe, H. A., *Phys. Rev.* **103**, 1353, 1956.
Goldstone, J., *Proc. Roy. Soc. A.* **239**, 267, 1956.
楊立銘，科学記录 **1**: 6, 363, 1957.

[4] Heitler, W., *The Quantum Theory of Radiation*, 3rd Edition.