速算

上册

褚鳳儀著

商務印書館

速　　算

上　册

褚鳳儀著

商務印書館發行

速　算

序

余於各大學教授統計學與投資數學時，間有應用速算方法以便計算，學者見計算之簡捷，每有請求附帶教授者，余亦屢擇其簡要者而授之，惟屢教屢忘，鮮有能應用自如者，推其故，教者未嘗作有系統之講授而學者亦未嘗作充分之練習使然也。本書之編，雖未敢謂已爲有系統之著作，然習題之愼選，自信已能予學者以充分練習之機會矣。

書中所舉速算方法，均加證明，蓋練習速算，證明雖非必要，然苟能明速算之理，則必易憶速算之法，故證明亦可助方法之記憶。

附錄中之半方表與倒數倍數表，專爲是書編製，半方表可供三方面之應用，卽可備乘法，求平方，開平方時之應用，倒數倍數表專爲除法而作，蓋所以便統計機關中價比之計算也。

本書共設三十八習題，若能每週教授一小時，則一年內可教完是書。

本書蒙同學沈君致和，朱君愛廬，胡君珍楷，奚君紹濂，馬君富泉，匡君裕臣，或助編計算表，或代任抄寫覆核之勞，均使編者心感，特誌數語，以示謝忱

褚　鳳　儀

中華民國二十八年三月十五日

速　算

——目　次——

上　冊

速　算

第一章　檢誤法

1. 以9除某數所得之餘數，與以9除某數中各數字之和所得之餘數相同。

(證)設 $a+10b+100c+1000d+10000e+\ldots\ldots$ 爲某數，a,b,c,d,e,……爲最小爲0最大爲9之整數

$$\frac{a+10b+100c+1000d+10000e+\ldots\ldots}{9}$$

$$=\frac{a+9b+b+99c+c+999d+d+9999e+e+\ldots\ldots}{9}$$

$$=(b+11c+111d+1111e+\ldots\ldots)+\frac{a+b+c+d+e+\ldots\ldots}{9}$$

括弧中之數爲一整數，故以9除 $a+10b+100c+1000d+10000e+\ldots\ldots$ 所得之餘數，與以9除 $a+b+c+d+e+\ldots\ldots$ 所得之餘數相同。

例一　求以9除 438572 所得之餘數

$$4+3+8+5+7+2=29$$

以9除 438572 所得之餘數，與以9除 29 所得之餘數相同，即得 2。

2. 各數字中若有數個數字之和爲9或其倍數，則在相加前可先約去，以便計算。

例二　求以 9 除 4753812 所得之餘數

$$4753812 = 3$$

3 卽爲所求之餘數

3. 某數爲 9 之倍數時，其數字之和必爲 9 之倍數，反之若某數中各數字之和爲 9 之倍數時，某數亦必爲 9 之倍數

(證)設 $a+10b+100c+1000d+10000e+\ldots\ldots$ 爲某數，$a, b, c, d, e, \ldots\ldots$ 爲最小爲零最大爲 9 之整數。

由第一段中證明得：

$$\frac{a+10b+100c+1000d+10000e+\ldots\ldots}{9}$$

$$=(b+11c+111d+1111e\ldots\ldots)+\frac{a+b+c+d+e+\ldots\ldots}{9}$$

若某數爲 9 之倍數，則上式中左邊爲一整數，因括弧中之數爲一整數，故 $\frac{a+b+c+d+e\ldots\ldots}{9}$ 亦爲一整數

卽 $a+b+c+d+e+\ldots\ldots$ 爲 9 之倍數，反之，若某數中各數字之和爲 9 之倍數，則 $\frac{a+b+c+d+e+\ldots\ldots}{9}$ 爲一整數，因括弧中之數爲一整數，故上式中左邊亦爲一整數，卽某數亦爲 9 之倍數。

例三　試證 438561 爲 9 之倍數

$$438561 = 0$$

各數字之和爲 9 之倍數，故 438561 亦爲 9 之倍數

4. 若干數相加後，以 9 除得之餘數，與以 9 分別除各數所得各

餘數之和，相差之數，必為 9 之倍數。

(證)設 $N = N_1 + N_2 + N_3 + \ldots\ldots N_t$

又設 Q，Q_1，Q_2，$Q_3 \ldots\ldots Q_t$ 為以 9 除 N，N_1，N_2，$N_3, \ldots\ldots N_t$ 所得之商數，而 R，R_1，R_2，$R_3, \ldots\ldots R_t$，為除得之餘數

$$N = 9Q + R$$
$$N_1 = 9Q_1 + R_1$$
$$N_2 = 9Q_2 + R_2$$
$$N_3 = 9Q_3 + R_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$N_t = 9Q_t + R_t$$

以之代入上式，得：

$$9Q + R = 9Q_1 + R_1 + 9Q_2 + R_2 + 9Q_3 + R_3 + \ldots\ldots + 9Q_t + R_t$$

即 $(R_1 + R_2 + R_3 + \ldots\ldots + R_t) - R = 9(Q - Q_1 - Q_2 - Q_3 - \ldots\ldots - Q_t)$

上式之右邊為 9 之倍數，故左邊亦為 9 之倍數

例四

438567	6	
93241	1	26−8=18=2×9
72863	8	
41856	6	
+38732	+5	
685259	26	
8		

5. 若干數相加後，以 9 除得之餘數，與以 9 分別除各數所得各餘數之和，相差之數；若非 9 之倍數，則加法時計算必有錯

誤，此法名曰加法之檢誤法（但若相差之數為 9 之倍數時，不可卽以之斷定計算之必無錯誤，故此法祇能檢舉錯誤，以下各檢誤法均然）

例五

$$\begin{array}{r r l}
387456 & 6 & \\
41875 & 7 & 26-0=26\text{非 9 之倍數，} \\
63748 & 1 & \text{故知以上計算必有錯誤} \\
2157 & 6 & \\
+\ 2463 & +6 & \\
\hline
597699 & 26 & \\
0 & &
\end{array}$$

6. 以 9 除被減數所得之餘數，與以 9 除減數與餘數所得二餘數之和，相差之數，若非 9 之倍數，則減法時計算必有錯誤，此法名曰減法之檢誤法。

(證)設A 為被減數，B 為減數，C 為餘數，卽

$$A - B = C$$
$$A = B + C$$

若以 9 除A所得之餘數，與以 9 除 B 與 C 所得二餘數之和相差之數，非 9 之倍數，則第二式中之加法必有錯誤，或卽第一式中之減法必有錯誤。

例六

$$\begin{array}{r l}
438567 & 6 \\
-249671 & \left.\begin{array}{l}2\\5\end{array}\right)7 \\
\hline
288896 &
\end{array}$$

7−6=1　　非 9 之倍數，故知以上計算必有錯誤

7. 以 9 除被乘數與乘數所得二餘數之積，與以 9 除乘積所得之餘數，相差之數，必為 9 之倍數。

(證)設 $AB = C$

又設 Q_a，Q_b，Q_c，爲以 9 除 A,B,C,所得之商數，而 R_a，R_b，R_c 爲除得之餘數

$$A = 9Q_a + R_a$$
$$B = 9Q_b + R_b$$
$$C = 9Q_c + R_c$$

以之代入上式，得：

$$(9Q_a + R_a)(9Q_b + R_b) = 9Q_c + R_c$$

$$9(9Q_aQ_b + Q_aR_b + Q_bR_a) + R_aR_b = 9Q_c + R_c$$

即 $R_aR_b - R_c = 9(Q_c - 9Q_aQ_b - Q_aR_b - Q_bR_a)$

上式中右邊爲 9 之倍數，故左邊亦爲 9 之倍數

例七

$$\begin{array}{rrr}
 & 3851 & 8 \\
 & \times 7346 & \times 2 \\
\hline
 & 23106 & 16 \\
 & 15404 & \\
 & 11553 & 16-7=9 \\
 & 26957 & \\
\hline
 & 28289446 & \\
 & 7 &
\end{array}$$

8. 以 9 除被乘數與乘數所得二餘數之積，與以 9 除乘積所得之餘數，相差之數，若非 9 之倍數，則乘法時計算必有錯誤，此法名曰乘法之檢誤法。

例八

352	1	
×743	×5	
1056	5	
1408		5−4=1 非9之倍數，
2364		故知以上計算必有錯誤
251536		
4		

9. 設以除數 D 除被除數 P 而得商數 Q 與餘數 R，則以 9 除 D 與 Q 所得二餘數之積，與以 9 除 R 所得之餘數相加後，再與以 9 除 P 所得之餘數相減，兩者之差必為 9 之倍數

(證) $P = DQ + R$

設 q_1，q_2，q_3，q_4 為以 9 除 P，D，Q，R 所得之商數，

而 r_1，r_2，r_3，r_4 為除得之餘數

$$P = 9q_1 + r_1$$
$$D = 9q_2 + r_2$$
$$Q = 9q_3 + r_3$$
$$R = 9q_4 + r_4$$

以之代入上式，得：

$$9q_1 + r_1 = (9q_2 + r_2)(9q_3 + r_3) + 9q_4 + r_4$$

$$9q_1 + r_1 = 9(9q_2q_3 + q_2r_3 + q_3r_2 + q_4) + r_2r_3 + r_4$$

卽 $(r\ \ r_3 + r_4) - r_1 = 9(q_1 - 9q_2q_3 - q_2r_3 - q_3r_2 - q_4)$

上式之右邊為 9 之倍數，故左邊亦為 9 之倍數

例九　　385⌡43567⌊113

385	385	7
506	113	×5
385		35
1217	62	+8
1155		43
62		43−7=36=4×9
43567	7	

10. 設以除數 D 除被除數 P 而得商數 Q 與餘數 R，若以 9 除 D 與 Q 所得二餘數之積與以 9 除 R 所得之餘數相加後，再與以 9 除 P 所得之餘數相減，兩者之差非爲 9 之倍數，則除法時計算必有錯誤，此法名曰除法之檢誤法。

例十　　364⌡73851⌊202

728	364	4
1051	202	×4
828		16
223	223	+7
		23
73851	6	

23 − 6 = 17 非 9 之倍數，故知以上計算必有錯誤

11. 設將 A 開方後而得方根 B 與餘數 C，則以 9 除 B 所得餘數之平方與以 9 除C所得之餘數相加後，再與以 9 除 A 所得之餘數相減，兩者之差必爲 9 之倍數

（證）　　$A = B^2 + C$

設 Q_a，Q_b，Q_c，爲以 9 除A，B，C，所得之商數，而 R_a，R_b，R_c 爲除得之餘數

$$A = 9Q_a + R_a$$
$$B = 9Q_b + R_b$$
$$C = 9Q_c + R_c$$

以之代入上式，得：

$$9Q_a + R_a = (9Q_b + R_b)^2 + 9Q_c + R_c$$
$$9Q_a + R_a = 9(9Q_b^{\,2} + 2Q_bR_b + Q_c) + R_b^{\,2} + R_c$$
$$\text{卽}\ (R_b^{\,2} + R_c) - R_a = 9(Q_a - 9Q_b^{\,2} - 2Q_bR_b - Q_c)$$

上式之右邊為 9 之倍數，故左邊亦為 9 之倍數。

例十一

$$\begin{array}{rl} & 1'74'85\lfloor\!\_\,132 \\ & 1 \\ \hline 23 & 74 \\ & 69 \\ \hline 262 & 585 \\ & 524 \\ \hline & 61 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 132 \\ 61 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6^2 = 36 \\ +7 \\ \hline 43 \end{array}$$

17485 　　 7

$$43 - 7 = 36 = 4 \times 9$$

12. 設將 A 開方後而得方根 B 與餘數 C，若以 9 除 B 所得餘數之平方，與以 9 除 C 所得之餘數相加後，再與以 9 除 A 所得之餘數相減，兩者之差，非為 9 之倍數，則開方時計算必有錯誤，此法名曰開方之檢誤法

例十二

$$\begin{array}{rl} & 38'75'69\lfloor\!\_\,614 \\ & 36 \\ \hline 121 & 175 \\ & 121 \\ \hline 1224 & 5469 \\ & 4896 \\ \hline & 573 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 614 \\ 573 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2^2 = 4 \\ +6 \\ \hline 10 \end{array}$$

387569 　　 2

10 − 2 = 8 非 9 之倍數，故知以上計算必有錯誤

習 題 一

1. 求以 9 除下列各數所得之餘數

a. 43857　b. 637524　c. 8164903　d. 637428

e. 63954

2. 就下列各加法檢舉錯誤，如發現錯誤，將演算改正後再依檢誤法檢誤。

a. 438567 + 134862 + 31486 + 43752 = 648677

b. 637524 + 314724 + 147325 + 387463 = 1387036

c. 817524 + 324356 + 143752 + 86314 = 1371947

d. 639 + 437 + 512 + 456 + 387 = 2231

e. 324316 + 187543 + 216374 + 311825 = 1039958

3. 就下列各減法檢舉錯誤，如發現錯誤，將演算改正後，再依檢誤法檢誤。

a. 432587 − 213694 = 318893

b. 637456 − 324187 = 313286

c. 3193425 − 1081725 = 2111600

d. 3815426 − 2093173 = 2822253

e. 63754 − 31256 = 32508

4. 就下列各乘法檢舉錯誤，如發現錯誤，將演算改正後，再依檢誤法檢誤。

a. $38 \times 73 = 3774$

b. $46 \times 84 = 3964$

c. $324 \times 436 = 131264$

d. $487 \times 712 = 346644$

e. $546 \times 618 = 337418$

f. $35^2 = 1125$

g. $75^2 = 5635$

h. $105^2 = 11125$

i. $98^2 = 9704$

j. $994^2 = 988136$

5. 就下列各除法檢舉錯誤，如發現錯誤，將演算改正後，再依檢誤法檢誤。

	被除數	除數	商數	餘數
a.	43867	341	128	119
b.	35742	182	190	162
c.	63714	367	173	123
d.	83456	4124	20	876
e.	38712	3876	9	3826

6. 就下列各開方檢舉錯誤，如發見錯誤，將演算改正後，再依檢誤法檢誤。

	被開方之數	方根	餘數
a.	38756	169	195

b.	56487	237	218
c.	8649	93	100
d.	71643	267	344
e.	94815	307	655

第二章 不用計算表之速算

第一節 加減法之速算

13. 加法時可將其和爲10之諸數字先加，例如3與7，2與8或

1與4與5諸數字可先加，以便計算

例一

438567	6
312483	3
527328	0
645384	3
37463	5
+ 19456	+ 7
1980681	15
6	

$$15 - 6 = 9$$

14. 位數甚多之數相加時，可將各數分成左右二部，分別相加，然後再求二者之和，以便檢誤。

例二

0	43857	46328	5
4	31864	35271	0
3	43743	18243	0
3	2865	43187	5
2	3458	62413	7
+ 2	+ 6374	53897	+ 5
5	2	59339 4	22−4=18
− 5	5 132161		
0	132163	59339	

15. 相加諸數中若有若干數之右端，須由數字 9，8，7，所組成，例如 219887 則可先將此數改爲 220000－113，然後正負各自相加，再自前部之和減去後部之和

例三　432135＋319978＋432897＋618799＋217789＋215421＋2799897

432135			0
320000	－	22	1
433000	－	103	6
620000	－	1201	4
220000	－	2211	7
215421			6
＋ 3000000	－	200103	＋ 6
5240556	－	203640	12
203640			
5036916		3	

$12 - 3 = 9$

16. 相加諸數若係連續之數，則可將最大數與最小數相加後，再以項數之半乘之。

（證）設 a 爲最小數，l 爲最大數，n 爲項數，S 爲諸數之和，則

$$S = a + (a+1) + (\ \ +2) + \ldots\ldots + (l-2) + (l-1) + l$$

若將上式之右邊前後倒置，則得：

$$S = l + (l-1) + (l-2) + \ldots\ldots + (a+2) + (a+1) + a$$

兩式相加得

$$2S = n(a+l) \qquad \therefore S = \frac{n}{2}(a+l)$$