前　言

用矩阵的理论和方法处理现代工程技术中的各种问题已越越普遍。在工程技术中使用矩阵理论不仅使工程理论表达极为简洁，且对理论实质的刻画也更为深刻。这一点已被越来越多的科技工作者所认识。特别是由于计算机和计算方法的普及和发展，不仅为矩阵理论的应用开辟了广阔的前景，也为工程技术开拓了崭新的研究途径。例如系统工程与控制、优化方法、稳定性理论等，无不与矩阵理论有着紧密的联系。因此矩阵理论和方法是研究现代工程技术的重要数学基础。本书是编者经过多年教学实践后在自编讲义的基础上，作了比较大的修改和充实而写成的。

本书以大学通用的工程数学《线性代数》作为预备知识，并假定读者已具有向量空间、线性变换等基本概念和矩阵的一些初等运算知识。考虑到本书的主要教学对象是工科硕士研究生，教学时数有限。一方面，数学概念尽可能从大量的实践中抽象出来，使之通俗易懂；另一方面，也对数学的严谨性、系统性作了适当的考虑，即着重于介绍一些基本概念、基本理论和基本方法，至于理论证明和推导的严密性就不过于苛求了。鉴于本书的读者是从事科技方面工作的，因此在编写时既重视基本的理论，也注重应用，使得选材更为恰当，结构更为合理。编者还力求把矩阵方法和线性空间方法、向量空间方法结合起来；把代数方法和几何方法结合起来；把代数方面的结构和测度论方面的结构结合起

来，以便为学习《泛函分析》等课程奠定一定的基础。

本书的主要内容可以分成三部分：第一部分包括线性空间、线性变换和内积空间，它是作为本科工程数学《线性代数》内容的衔接和引申，也为学习第二部分打下必要的基础。第二部分包括矩阵的分解、向量与矩阵的范数、矩阵分析、矩阵函数及其应用、特征值的分布和广义逆矩阵。这一部分是考虑到当前各工程学科硕士研究生的实际需要而精选的，全面介绍了矩阵的基本概念、理论和方法。第三部分是代数基础，这一部分内容不仅在科技中有着直接的应用，而且还是前面两部分内容的数学基础，当然也是对数学抽象化方法及逻辑推理方法的深化，从而为读者进一步学习打下必要的基础。书中各章都配有一定数量的习题，以使读者加深对本课程的理解。

本书在编写过程中，承蒙电子科技大学赵善中教授和向敬成教授审核，提出了许多宝贵意见和建议，并得到电子科技大学研究生部和教务处的大力支持和帮助，谨此致谢。

限于编者的水平，书中难免存在遗漏和不当之处，热忱欢迎读者批评指正。

编　者

1989年1月于电子科

目　　录

第一章　线性空间

§1　集合及其运算

一、集合的概念与表示法

集合是数学中最基本的概念之一，但它又是一个不能精确定义的基本概念。一般地说，把具有共同性质的一堆东西，汇集成一个整体，就形成一个集合。例如，一个班就是由一些同学组成的集合；一个线性方程组解的全体组成一个集合，即所谓解集合；在几何中，把点看成基本对象，则一条直线就是一个由点组成的集合；一条曲线，一个平面也都是由一些点组成的集合。组成集合的东西称为这个集合的元素，我们用

$$a\in M$$

表示a是集合M的元素，读作a属于M。用

$$a\overline{\in} M$$

表示a不是集合M的元素，读作a不属于M。一个集合，若其组成集合的元素个数是有限的，则称作有限集，否则称作无限集。

表示集合的办法有两种：一种是将某集合的元素都列举出来称为列举法．比如，我们说，M是由数1，2，3组成的集合，记为$M=\{1，2，3\}$，又比如$A=\{2，4，6，\cdots，2n\}$，

$B=\{a, a^2, a^3, \cdots\}$等。

另一种是给出这个集合的元素所具有的特殊性质，称为叙述法。例如：

$$M=\left\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$$

$$A=\{x\mid x\text{是正奇数}\}$$

$$B=\{x\mid x\leqslant 10\}$$

两个集合相等是按下述原理定义的。

外延性原理：两个集合是相等的，当且仅当它们有相同的成员。记作$A=B$。

集合的元素还可以允许是一个集合，例如：

$$M=\{a, \{1, 2\}, b, \{c\}\}$$

必须指出：$c\in\{c\}$，但$c\notin M$；同理$1\in\{1,2,\}$但$1\notin M$。

例如：设A是小于10的素数的集合，即$A=\{2,3,5,7\}$，又设B为$x^4-17x^3+101x^2-247x+210=0$的所有根的集合，则正好$B$也是$\{2, 3, 5, 7\}$，因此$A=B$。

又如：$\{1, 2, 4\}=\{1, 2, 2, 2, 4\}$

$\{1, 4, 2\}=\{1, 2, 4\}$

但 $\{1, 2\}\neq\{1, 2, 4\}$

定义1 设A，B是任意两个集合，若A的每一个元素是B的成员，则称A为B的子集，或A包含在B内，或B包含A，记为$A\subseteq B$或$B\supseteq A$。

根据子集的定义，显然有：

自反性 $A\subseteq A$。

传递性 若$A\subseteq B$和$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$。但"包含"这种关系不满足对称性，故不是等价关系。

定理 1　集合A和集合B相等的充要条件是这两个集合互为子集。

证　设任意两集合相等，则由定义，有相同的元素．即$A \subseteq B$且$B \subseteq A$。

反之，若$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，假若$A \neq B$，则A与B的元素不完全相同，设某一元素$x \in A$，但$x \notin B$，这与$A \subseteq B$条件矛盾；或设某一元素$x \in B$但$x \notin A$，这就与$B \subseteq A$条件矛盾，故A，B的元素必须相同，即$A = B$.　（证毕）

这个定理很重要，今后证明两集合相等，主要利用这个互为子集的判定条件。

注意：两个集合相等不是指两个集合的元素个数相等．其实两个集合的元素个数不等也可能相等，即使元素个数相等的集合也可能不相等。

定义2　如果集合A的每一个元素都属于B，但集合B中至少有一个元素不属于A，则称A为B的真子集，记作$A \subset B$.

例如，全体偶数集是全体整数集的真子集，全体整数集是全体有理数集的真子集。

定义3　不包含任何元素的集合是空集，记为ϕ。注意：$\phi \neq \{\phi\}$，但$\phi \in \{\phi\}$；ϕ不等于0。

定理2　对于任意一个集合A，$\phi \subseteq A$。

证　假设$\phi \subseteq A$是假，则至少有一个元素x，使$x \in \phi$且$x \notin A$　因为空集ϕ不包括任何元素，所以这是不可能的．（证毕）

不难看出，每个非空集合A，至少有A和ϕ两个不同的子集，我们称A和ϕ是A的平凡子集．一般来说，A的每一个元素都能确定A的一个子集，即若$a \in A$则$\{a\} \subseteq A$。

定义4　在一定范围内，如果所有集合均为某一集合的

子集，则称该集合为全集，记为E。

全集的概念相当于论域。如在初等数论中，全体整数组成了全集。又如在考虑某大学的部分学生组成的集合(如系、班级等)时，该大学的全体学生组成了全集，设全集$E=\{a, b, c\}$，它的所有可能的子集计有：$S_0=\phi$，$S_1=\{a\}$，$S_2=\{b\}$，$S_3=\{c\}$，$S_4=\{a,b\}$，$S_5=\{a,c\}$，$S_6=\{b, c\}$，$S_7=\{a, b, c\}$，这些子集都包含在E中，即$S_i\subseteq E$（$i=0, 1, \cdots, 7$），但$S_i\in E$。

定义5 给定集合A，由集合A的所有子集为元素组成的集合，称为集合A的幂集，记为$F(A)$。

例如：$A=\{a, b, c,\}$

$$F(A)=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a, b,c\}\}$$

定理3 如果有限集合A有n个元素，则其幂集$F(A)$有2^n个元素。

证 因$\phi\subseteq A$，故$F(A)$的元素总数为

$$N=1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k$$

但又因

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\, x^k\cdot y^{n-k}$$

令 $x=y=1$，得

$$2^n=\sum_{k=1}^{n}C_n^k$$

故$F(A)$的元素个数是2^n。 （证毕）

现在我们引进一种编码，用来唯一地表示有限幂集的元

素，仍以上面$B=\{a,b,c,\}$这个集合为例。

$F(S)=\{S_i|i\in J\}$，$J=i|i$是二进制数目$000\leqslant i\leqslant 111\}$

例如，$S_3=S_{011}=\{b,c\}$，$S_6=S_{110}=\{a,b\}$等。一般地，$F(S)=\{S_0, S_1, \cdots, S_{2^n-1}\}$，即$F(S)=\{Si|$ $i\in J\}$，$J=\{i|i$是二制数目$\overbrace{000\cdots0}^{n}\leqslant i\leqslant \overbrace{111\cdots1}^{n}\}$。

二、集合的运算

定义6 设任意两个集A,B，由A和B的所有共同元素组成的集合S，称为A和B的交集，记为$A\cap B$。

例如：$2x-y=1$的解集合与$x-2y=2$的解集合的交集就是

$$\begin{cases}2x-y=1\\x-2y=1\end{cases}$$

的解集合。又比如，所有矩形集合与所有菱形集合的交集是所有正方形集合。

为了叙述简练，以下用$\vee$表示"或"，$\wedge$表示"与"，$\Longleftrightarrow$表示等价。

集合的交运算具有如下性质：

1）$A\cap A=A$，$A\cap\phi=\phi$，$A\cap E=A$，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$；

2）$A\cap B=B\cap A$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

事实上，$(A\cap B)\cap C=\{x|(x\in A\wedge B)\wedge(x\in C)\}$

$A\cap(B\cap C)=\{x|((x\in A)\wedge(x\in B\cap C)\}$

$$\begin{aligned}(x\in A\cap B)\wedge(x\in C)&\Longleftrightarrow[(x\in A)\wedge(x\in B)]\wedge(x\in C)\\&\Longleftrightarrow(x\in A)\wedge[(x\in B)\wedge(x\in C)]\\&\Longleftrightarrow(x\in A)\wedge(x\in B\cup C)\end{aligned}$$

因此 $$(A\cap B)\cap C\Longleftrightarrow A\cap(B\cap C)$$

3）设$A\subseteq B$，则$A\cap C\subseteq(B\cap C)$(读者自证)。

定义7 设任意两集合A,B，所有属于A或属于B的元素组成的集合S，称为A和B的并集，记为$A\cup B$。

集合并的运算具有如下性质：

1）$A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$；$A\cup A=A$，$A\cup E=E$，$A\cup\phi=A$；

2）$A\cup B=B\cup A$，$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

3）若$A\subseteq B$，$C\subseteq D$，则$A\cup C\subseteq B\cup D$。

事实上，对任意$x\in A\cup C$，则有$x\in A$或$x\in C$。若$x\in A$，由$A\subseteq B$则$x\in B$，故$x\in B\cup D$；若$x\in C$，由$C\subseteq D$则$x\in D$，因此，$A\cup C\subseteq B\cup D$。

定理4 设A，B，C为三个集合，则下列分配律成立。

1）$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

2）$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

证 1）设$S=A\cap(B\cup C)$，$T=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。若$x\in S$，则$x\in A$且$x\in B\cup C$，即$x\in A$且$x\in B$或$x\in A$且$x\in C$也即$x\in A\cap B$或$x\in A\cap C$，故$x\in T$，所以$S\subseteq T$。

反之，若$x\in T$，则$x\in A\cap B$或$x\in A\cap C$，$x\in A$且$x\in B$或$x\in A$且$x\in C$，即$x\in A$且$x\in B\cup C$，于是$x\in S$，所以$T\subseteq S$。因此$T=S$。

2）其证明完全与1)类似。 （证毕）

定理5（吸收定理）设A，B为任意两集合，则下列吸收律成立。

1）$A\cup(A\cap B)=A$ 2）$A\cap(A\cup B)=A$

证 1）$A\cup(A\cap B)=(A\cap E)\cup(A\cap B)$

$$=A\cap(E\cup B)=A$$

2) $A\cap(A\cup B)=(A\cup A)\cap(A\cup B)$

$$=A\cup(A\cap B)=A$$ （证毕）

定理6 $A\subseteq B$，当且仅当$A\cup B=B$或$A\cup B=A$。

证 若$A\subseteq B$，对任意$x\in A$，必有$x\in B$，即$A\cup B\subseteq B$，又$B\subseteq A\cup B$，故得$A\cup B=B$。反之，若$A\cup B=B$，因为$A\subseteq A\cup B$，故$A\subseteq B$。

同理可证$A\subseteq B$，当且仅当$A\cap B=A$。（证毕）

定义8 A，B为任意两集合，所有属于A而不属于B的一切元素组成的集合S称为B对A的补集或相对补，记为$A-B$。

例如：设A是素数集合，B是奇数集合，则$A-B=\{2\}$。

定义9 设E为全集，对任一集合A关于E的补$E-A$，称为集合A的绝对补，记为$\sim A$。

$$\sim A=E-A=\{x\mid x\in E\wedge x\notin A\}$$

由补的定义不难证明如下性质：

1) $\sim(\sim A)=A$；$\sim E=\phi$；$\sim\phi=E$；

2) $A\cup(\sim A)=E$；$A\cap(\sim A)=\phi$。

定义10 设A，B为任意两个集合，A和B的对称差为集合S，其元素或属于A，或属于B，但不能既属于A又属于B，记为$A\ominus B$。

$$S=A\ominus B=(A-B)\cup(B-A)$$

由对称差定义很易推出如下性质：

1) $A\ominus B=B\ominus A$，$A\ominus\phi=A$，$A\ominus A=\phi$；

2) $A\ominus B=(A\cap(\sim B))\cup((\sim A)\cap B)$；

3) $A(A\ominus B)\ominus C=A\ominus(B\ominus C)$；

4） $A\cup B=(A\ominus B)\cup(A\cap B)$.

三、包含排斥原理

集合的运算，可用于有限个元素的计数问题。设 A_1，A_2为有限集合，其元素个数分别记为$|A_1|$，$|A_2|$，根据集合运算的定义，显然以下各式成立。

$$|A_1\cup A_2|\leqslant|A_1|+|A_2|$$

$$|A_1\cap A_2|\leqslant\min(|A_1|,|A_2|)$$

$$|A_1-A_2|\geqslant|A_1|-|A_2|$$

$$|A_1\ominus A_2|=|A_1|+|A_2|-2|A_1\cap A_2|$$

这些公式可用文氏图（图1-1）直接来说明。但是在有限集的元素计数问题中，下述定理有着更广泛的应用。

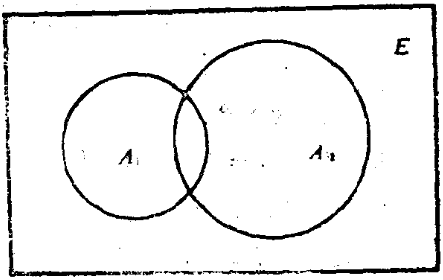

图 1-1

定理7 设A_1，A_2为有限集，其元素个数分别为$|A_1|$，$|A_2|$，则$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$。

证. *a*）当$A_1\cap A_2=\phi$则显然$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|$

b）若$A_1\cap A_2\neq\phi$，则

$$|A_1|=|A_1\cap\sim A_2|+|A_1\cap A_2|;$$

$$|A_2|=|\sim A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_2|$$

所以 $\qquad|A_1|+|A_2|$

$$=|A_1\cap\sim A_2|+|\sim A_1\cap A_2|+2|A_1\cap A_2|$$

但 $|A_1\cap\sim A_2|+|\sim A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_2|=|A_1\cup A_2|$

故 $|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$ （证毕）

这个定理，常称为包含排斥原理（或容斥原理）。

推论 设A_1，A_2，…，A_n为有限集，其元素个数分别记为$|A_1|$，$|A_2|$，…，$|A_n|$，则

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

例1 设在10名青年中有5名是工人，7名学生，其中兼有工人与学生双重身份的青年有3名，问既不是工人又不是学生的青年有几名。

解 设工人的集合为W，学生的集合为S，则根据假设有：$|W|=5$，$|S|=7$，$|W\cap S|=3$。又因$|\sim W\cap\sim S|+|W\cup S|=10$，则

$$|\sim W\cap\sim S|=10-|W\cup S|=10-(|W|+|S|-|W\cap S|)$$

$$=10-(5+7-3)=1$$

所以既不是工人又不是学生的青年有一名。

例2 在某厂装配30辆汽车，可供选择的设备是收音机、空调器和对讲机。已知其中15辆汽车有收音机，8辆有空调器，6辆有对讲机，而且其中3辆汽车这三样设备都有，我们希望知道至少有多少辆汽车没有提供任何设备。

解 设A_1，A_2，A_3分别表示配有收音机、空调器和对讲机的汽车集合。因此

$$|A_1|=15,\quad |A_2|=8,\quad |A_3|=6$$

且 $$|A_1\cap A_2\cap A_3|=3$$

故 $$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup A_3|&=15+8+6-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|\\&\quad-|A_2\cap A_3|+3\\&=32-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|\end{aligned}$$

因为 $$|A_1\cap A_2|\geqslant|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

$$|A_1\cap A_3|\geqslant|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

$$|A_2\cap A_3|\geqslant|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

则得 $$|A_1\cup A_2\cup A_3|\leqslant 32-3-3-3=23$$

即至多有23辆汽车有一个或几个供选择的设备，因此至少有7辆汽车不提供任何可选择的设备。

例3 求1到250之间能被2，3，5，7任何一个数整除的整数个数。

解 设A_1，A_2，A_3，A_4分别表示1到250间能被2，3，5，7分别整除的数的集合，又设$[x]$表示小于或等于x的最大整数。则

$$|A_1|=\left[\frac{250}{2}\right]=125,\qquad |A_2|=\left[\frac{250}{3}\right]=83$$

$$|A_3|=\left[\frac{250}{5}\right]=50,\qquad |A_4|=\left[\frac{250}{7}\right]=35$$

$$|A_1\cap A_2|=\left[\frac{250}{2\times 3}\right]=41,\qquad |A_1\cap A_3|=\left[\frac{250}{2\times 5}\right]=25$$

$$|A_1\cap A_4|=\left[\frac{250}{2\times 7}\right]=17,\qquad |A_2\cap A_3|=\left[\frac{250}{3\times 5}\right]=16$$

$$|A_2 \cap A_4| = \left[\frac{250}{3\times 7}\right] = 11, \quad |A_3 \cap A_4| = \left[\frac{250}{5\times 7}\right] = 7$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{250}{2\times 3\times 5}\right] = 8$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \left[\frac{250}{2\times 3\times 7}\right] = 5$$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{250}{2\times 5\times 7}\right] = 3$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{250}{3\times 5\times 7}\right] = 2$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{250}{2\times 3\times 5\times 7}\right] = 1$$

我们得到

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 125+83+50+35-41-25-17$$
$$-16-11-7+8+5+3+2-1=193$$

四、序偶与笛卡尔积

在日常生活中，有许多事物是成对出现的，而且这种成对出现的事物，具有一定的顺序。例如，上，下；左，右；$3<4$；李明高于张华；中国地处亚州；平面上点的坐标等。一般地说，两个具有固定次序的客体组成一个序偶，它常常表达两个客体之间的关系。记为$\langle x, y\rangle$。序偶可以看作具有两个元素的集合。但它与一般集合不同的是序偶具有确定的次序。在集合中，$\{a, b\}=\{b, a\}$，但对序偶$\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$。