数学故事丛书

无限中的有限

—极限的故事

上海科学普及出版社

无限中的有限

·极限的故事·

张 远 南

上海科学普及出版社

内 容 提 要

本书系数学故事丛书中的一册。全书用24篇生动有趣的小故事叙述了有限与无限的辩证关系，从中可了解数学中极限的概念。这些故事生动有趣，通俗易懂，寓数学知识于趣味之中。是为提高中学生学习数学的兴趣，加深和扩展中学数学课堂知识而作。

序

本世纪最伟大的数学家之一，德国的希尔伯特，曾经把数学定义为“关于无限的科学”。在数学家的眼里，经验的提示并不是数学，只有当经验寓于某种无限之中，才是数学。

“无限”常使人感到迷惘，“有限”却使人觉得实在！人们总把“无限”作为一种特殊性加以看待。其实，这是一种习惯的偏见，“无限”同样有其极为丰富的内涵。借助于康托的理论，我们甚至可以比较它们的大小！大多数的“有限”，正因其寓于无限之中而表现出更加充实的含义。诸如：无限过程的有限结果；无限步骤的有限推理；无限总体的有限个体；等等，等等。这种无限中的有限，恰是数学科学的精华所在！

这本书既不打算，也不可能对无限的理论作全面的叙述。作者的目的只是希望激起读者的兴趣，并由此引起他们自觉学习这一知识的欲望。因为作者认定：兴趣是最好的老师，一个人对科学的热爱和献身往往是从兴趣开始。然而人类智慧的传递，是一项高超的艺术。从教到学，从学到会，从会到用，又从用到创造，这是一连串极为能动的过程。作者在长期实践中，有感于普通教学的局限和不足，希望能通过非教学的手段，实现人类智慧接力棒的传递。

基于上述目的，作者计划尽自己的力量，写一套各自独立趣味数学读物。它们是：《偶然中的必然》、《未知中的已

知》、《否定中的肯定》、《无限中的有限》、《变量中的常量》、《抽象中的形象》等。分别讲述概率、方程、逻辑、极限、函数、图形等故事。作者心目中的读者，是广大的中学生和数学爱好者，他们是衡量本书最为精确的天平。

本书中介绍的许多知识，曾是数学中极为精采的篇章。作者力图把这些内容叙述得生动有趣，通俗易懂，但每每感到力不从心。因此，对初学者来说，有些章节可能依然会十分艰辛。不过，如能多看几遍，定然会有收获的！

由于作者水平有限，书中的错误在所难免，敬请读者不吝指出。

但愿本书能为人类智慧的传递，铺桥开路！

张远南

1988年8月

目　录

一、记数史上的繁花

我们中华民族一向具有乐观旷达的性格。古往今来，那广为传闻的笑话艺术，便是这一优秀品格的佐证。下面一则脍炙人口的故事出自《笑府》，其流传之远久，少说也已数百年！故事的大意如下：

从前有个财主，自个儿目不识丁，于是请了个先生，教他儿子读书。

先生来了以后，先教财主孩子描红。描一笔，先生就教道："这是'一'字"；描两笔,先生便教道："这是'二'字"；描三笔，先生又教道："这是'三'字"。

"三"字刚一写完，但见财主的儿子把笔一扔，一蹦一跳地找父亲去了，说："爹！这字可太容易认了。我已都会了，用不着再请先生了！"财主听了很高兴，便把先生辞掉了！

不久，财主准备请一个姓万的亲戚喝酒，便叫儿子写张请帖。不料过了许久，还不见儿子把请帖拿来，于是只好亲自上房去催。

儿子见父亲来，便埋怨说："天下姓氏多得很，为什么偏拣姓万？我一早到现在，写得满头大汗，也才描

了五百多划，离一万远着哩！”

对于文明的人类，上面的故事自然是笑话。但读者可能未曾想到，这一令人捧腹的办法，在人类的记数史上，曾有一度相当先进！

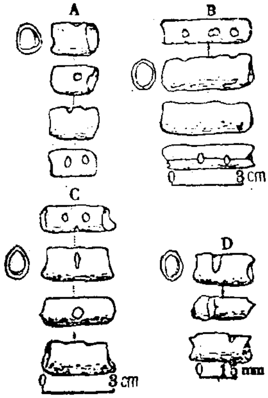
人类最初数的概念是“有”和“无”。在经历了漫长的岁月之后，才开始出现数字“一”、“二”、“三”，对大于“三”的数，则一概回答为“许多”。

我们这个星球上的文明，有着惊人的类似。无论是东方还是西方，都有过结绳记数的历史。传说古波斯王一次打仗，命令将士们守一座桥，要守六十天。为了把“六十”这个数准确地表示出来，波斯王用一根长长的皮条，在上面系了六十个扣。他对将士们说：“我走后你们一天解一个扣，什么时候解完了，你们的任务便就完成，可以回家了！”我国春秋时期的古书《易经》，也记载了上古时期我们祖先“结绳而治”的史实。左图是甲骨文中的“数”字，它的右边表示右手，左边则是一根打了许多绳结的木棍。瞧！它多像一只手在打结呀！

公元1937年，人们在维斯托尼斯发现了一根大约四十万年前的幼狼挠骨，七吋长，上面刻有55道深痕。这是至今为止最早的刻痕记数的历史资料。下图是我国北京郊区周口店出土的，大约一万年前“山顶洞人”用的刻符骨管。骨管上的点圆形洞，代表着数目“一”，而长圆形洞，则很可能代表“十”。如果考古学家最终确证是这样的话，那么下页图中的A、B、C、D，就分别表示数目“3”、“5”、“13”、“10”。

在记数史上，继绳结刀刻之后最为光辉的成就，莫过于

用记号代表一个数目。罗马数字就是这种进步的早期产物，这一数字系统如今已经废弃了大约五百年！



大概由于人长着两只手，而每只手有着五个指头的缘故吧！古罗马人采用了以下的符号来表示数：

I = “1”　　　II = “2”

III = “3”

V = “5”　　　X = “10”

L = “50”　　　C = “100”

D = “500”　　　M = “1000”

记数时，采用加法和减法法则：即当数值较小的符号位于数值较大的符号后头时，则两个符号数值相加；反之，则数值相减。例如，“VI”表示“五加一”，即“六”；而“IV”则表示“五减一”，即“四”；等等。这样，罗马符号

MCMLXXXVIII；

MMCXV；

MCXLII。

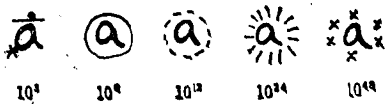
即代表着数：1988，2115，1142。

尽管上述符号有点令人肃然起敬，但就实用而言，却远比古印度和古埃及人的发明来得逊色。后者是用专门的符号反复书写一定次数的办法表示数。例如，“2115”在古埃及人写来则是：

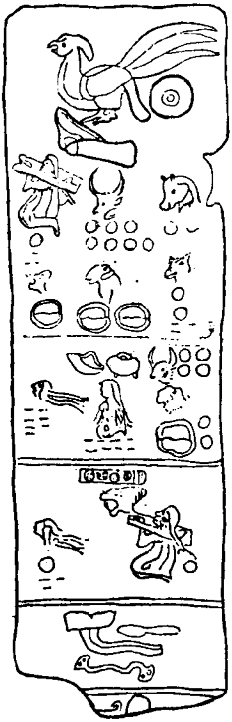
这种古老的记号显然是十进制的：一个“𓎆”相当于十个

“(”；一个“(”相当于十个“⋒”；而一个“⋒”则相当于十个“∩”。从右到左，各类符号“逢十进一”。这已经接近于十进制数位记法。难怪一当先进的阿拉伯数字系统传到欧洲，那种由罗马数字构筑起来的记数堡垒，便立即土崩瓦解，并近于消声匿迹。

随着社会的发展和数范围的不断扩大，人们不得不想出更加简便的办法，以表示大数。有不少记号在历史上只是犹如昙花，显现一时。下图是公元一千年左右，俄国一些学者

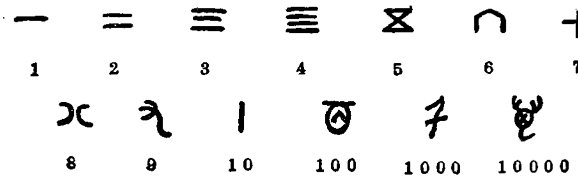


手稿中采用的记号，称为“斯拉夫数”。每个大数单位用一个字母表示，而在它的四周加上不同的边饰，以示区别。不过，自从用10为底指数表示的科学记数法诞生以来，人类的记数道路便就一马平川了！

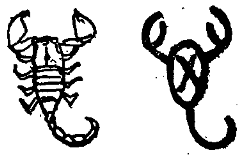


类似于古埃及的记数方法，也同样出现在古代东方的中国。左图是我国云南省晋宁石寨山出土的一块青铜片。方形，下残，上有图画文字，其中包括记数方法。有三种记数符号，即“—”、“○”和“⊜”，分别代表个、十和百。例如，最上一段画着一个带枷的人，下面有一个“○”和三个“—”，它表示这种带枷的人13个。这大约是我国少数民族创造的一种记数制。

比起罗马人和古埃及人，我们的祖先确实可以引为自豪！早在四千年前，当我国刚刚进入奴隶社会时期，就已出现了相当完善的十进制记数系统。在三千五百年前殷商时期的甲骨文中，便有从1到10的文字表示，以及“百”、“千”、“万”等相应的符号：



可以看出，上面13个符号中的最后三个，与中文原体字“百”、“千”、“萬”的书写，已很接近。只是代表“一万”的符号，为什么如此之象一只蝎子，实在令人难以捉摸！莫非史前有一个时期，这种其貌不扬的小动物，曾经极度繁衍，肆虐一时。为此，上古人书其形，表其多，称之为“万”。事实究竟如何，只好留待史学家们去细细查考了！



二、大数的奥林匹克

上一个故事我们讲过，原始人对数的认识是极为粗糙的。就计数本领而言，即使那时的部落智者，也难以与当今的幼儿园小朋友相抗衡！

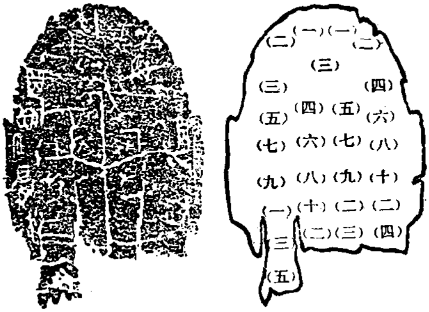
到了上古时期，人们仍满足于一些不大的数，因为这些数对于他们的日常生活，已经是足够了！罗马数字中最大的记号是M，代表着1000。倘若古罗马人想用自己的记数法，表示如今罗马城人口的话，那可是一项极为艰巨的劳动。因为，无论他们在数学上是何等地训练有素，也只能一个接一个地写上数以千计个的M才行！

不过，罗马数字后来随社会发展的需要而有所扩大。人们在某数字的上方加一条短横，用以表示该数的一千倍。例如，$\overline{\mathrm{V}}$表示五千，$\overline{\mathrm{XC}}$表示九万等等。一天有八万六千四百秒，86400这一数字便可用上述记号写为：

$\overline{\mathrm{LXXXVI}}\mathrm{CD}$。

在三、四千年前的古埃及和古巴比伦，10^4已是很大的数。那时的人认为，这样的数已经模糊得难以想象，因而称之为“黑暗”。几个世纪以后，界限放宽到10^8，即“黑暗的黑暗”，并认为这是人类智慧所能达到的顶点！

在我们古老的国度，从约三千五百年前殷虚的考古中，人们在兽骨和龟板上的刻辞里，发现了许多数目，其中最大的竟达“三万”。下图为出土的殷虚甲骨文字，右面是其间的数字对照。



很明显，大数的奥林匹克纪录是很难长时间地保持。历史车轮的前进是怎样影响着人类的计数史，只要看一看下面的例子就足够了！

这是历史学家鲍尔记述的有关“世界末日”的古老传说：

> 在世界中心贝那勒斯（印度北部的佛教圣地）的圣庙里，安放着一块黄铜板，板上插着三根宝针，细如韭叶，高约腕尺。梵天在创造世界的时候，在其中的一根针上，从下到上串上由大到小的六十四片金片。这就是所谓梵塔。当时梵天授言：不论黑夜白天，都要有一个值班的僧侣，按照梵天不渝的法则，把这些金片在三根针上移来移去，一次只能够移一片，并且要求不管在哪根针上，小片永远在大片的上面。当所有的六十四片，都从梵天创造世界时所放的那根针，移到另外一根针上时，世界就将在一声霹雳中消灭，梵塔、庙宇和众生，都将同归于尽！这，便是世界的末日。……。

在以后的章节我们将会看到，要把梵塔上的64片金片全都移到另一根针上去，需要移动的总次数大约是：

1.84×10^{19}次

这需要夜以继日地搬动5800亿年！想必梵天在预言的当初，也未必认真计算过。不过，上面的数字和我们将要遇到的大数相比，可的的确确小得令人悲哀！

大约公元前三世纪，大名鼎鼎的古希腊数学家阿基米德（Archimedes，公元前287～前212），曾用他那智慧超群的脑袋，想出了一种书写大数的办法，并为此上奏当时叙拉古国王的长子格朗。这篇流芳千古的奏本，开头是这样写的：

> “王子殿下：有人认为无论是叙拉古还是西西里，或其他世上有人烟和无人迹之处，砂子的数目是无穷的。另一种观点是，这个数目不是无穷的，但想要表达出比地球上砂粒数目还要大的数字是做不到的。显然，持这种观点的人肯定认为，如果把地球想象成一个大沙堆，并将所有的海洋和洞穴统统装满砂子，一直装到与最高的山峰相平。那么，这样堆起来的砂子总数是无法表示出来的。但是，我要告诉大家，用我的方法，不但能表示出占地球那么大地方的砂子数目，甚至还能表示出占据整个宇宙空间的砂子总数……”

阿基米德并没有言过其实，他果真算出了占据整个宇宙空间的砂粒总数为：

10^{63}

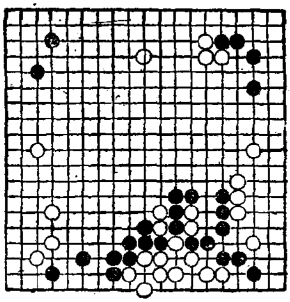
这在当时可是一个大的足以使人吓出梦魇的数字！不过，那

（公元前287～前212）

时阿基米德所认识的宇宙与现实的宇宙有很大不同。那个时代的天文学家错误地认为，恒星是固定在一个以地球为中心的大球面上。这个球的半径照阿基米德的数据推算，大约为1.2光年。而今天人们已经确切知道，可观察宇宙的半径在1.3×10^{10}光年以上。这一天文学上称为“哈勃”的宇宙半径，要比阿基米德的宇宙半径大大约10^{10}倍，即100亿倍。所以实际上，要填满哈勃宇宙所需要的砂粒数，应为：

$$10^{63}\times(10^{10})^{3}=10^{93}$$

值得一提的是：公元1940年，一位美国作家爱·卡斯纳（E·Kasner）在《数学和想象》一本科普书中，引进了一个叫做“googol”的数。此数相当于100个10连乘起来，即10^{100}或$10^{10^{2}}$。不知什么缘故，“googol”的出现，居然很快风靡全球，以至于如今的袖珍词典，也收进了这个新词！



“googol”自然是一个极大的数，它比上面讲到的哈勃宇宙的砂粒数要大一千万倍！不过，它依然成不了大数奥林匹克的金牌得主，比它更大的数多的是。举例说，围棋是人们喜爱的体育项目。围棋盘上有$19\times19=361$个格点。从理论上讲，每个格点

可以放白棋、放黑棋、也可以不放棋子。这样，361格，每个格有三种可能，共有3^{361}种可能的局势变化。用对数表计算一下就知道：

$$3^{361} \approx 1.710 \times 10^{172}$$

这个数显然远远大于“googol”。

直至公元1955年，数学家们所知道的最大的有意义的数，是南非开普敦大学史密斯教授在研究质数时发现的，它大约为：$[((10)^{10})^{10}]^{3} = 10^{300}$

如今时间又过了三分之一世纪，以上的大数纪录已被一再刷新。为使读者弄清今日大数奥林匹克冠军宝座的归属，我们还得从“默森质数”谈起。

马林·默森（M·Mersenne，1588～1648）是法国大数学家笛卡儿的同学，曾致力于寻找质数公式。公元1644年，默森指出，在形如2^p-1的式子中，存在许多质数。为叙述方便，我们把

$$M_p = 2^p - 1$$

称为“默森数”，而把默森数中的质数，称为“默森质数”。

默森本人一口气列出了九个“默森质数”，它们是：

M_2、M_3、M_5、M_7、M_{13}、M_{17}、M_{19}、M_{31}、M_{127}。

人们至今仍不知道，默森用什么办法去判定他所找到的数是质数。但默森曾断言M_{67}和M_{257}是质数，却被后人否定了！当然检验工作是极为繁重和艰难的。另一方面，数学家们还发现M_{61}、M_{89}、M_{107}三个是质数，然而却被默森遗漏了过去。

公元1962年，人们借助于电子计算机，又找到了八个默森质数，其中最小的一个是$M_{521} \approx 6.86 \times 10^{156}$，已经大大超过了“googol”！没过多久，美国伊里诺斯大学的数学