

# 机器人误差分析的蒙特卡洛方法

徐卫良

(东南大学机械系, 南京)

张启先

(北京航空学院机器人研究室)

**摘要** 利用蒙特卡洛技术模拟具有任意概率分布的原始误差, 抽样计算机器人手部位姿误差数模, 然后在数值上完成机器人在其可达工作空间内的位姿精度的概率等高线、概率密度函数(频数直方图)和统计数字特征的分析。最后以一个六自由度关节型机器人为例, 进行了数值计算。

**关键词:** 机器人, 误差, 概率, 蒙特卡洛, 数值计算。

## 1 引言

目前, 工业机器人基本上是在外部开环控制下工作的, 对于按这种方式完成的任务, 一个很重要的限制因素就是机器人的定位精度。影响手部位姿精度的原始误差主要有: 1) 机构的几何参数偏差; 2) 关节伺服定位误差; 3) 关节间隙。对于示教再现机器人, 第一类原始误差所引起的手部位姿误差能得到自动校正, 而对于程控机器人, 在各个机构位形的上述误差则具有一确定值。至于第二、三类原始误差, 由于它们具有随机性, 故其所产生的手部位姿误差亦具有随机性。文〔1—3〕利用微分法, 通过误差传递矩阵给出了手部位姿误差的数模, 并基于这一模型编程计算了位姿精度的概率等高线(面)。文〔4〕也建立了类似于上面的位姿误差的线性模型, 并提出了误差校正技术。文〔5〕提出了通过直接对各个原始误差的微小位移矢量进行合成, 建立手部位姿误差数模的一个简便明瞭的方法—微小位移合成法。文〔6, 7〕用最小二乘技术研究了位置误差的识别和补偿问题。文〔8〕按悬臂梁力学模型, 分析了构件弹性变形产生的机器人的位姿误差。

对于一个已设计好的或已制造出来的机器人, 了解其在可达工作空间内的位姿精度的分布情况及其统计特征, 对如何改进设计或正确使用机器人是很有必要的。文〔1, 2, 3〕虽然在这方面已做了一些工作, 但为了分析清楚机器人位姿精度的概率等高线, 需要进行一系

列复杂的概率计算, 计算工作量较大且难以分析出手部位姿误差的其他概率特征。因此, 为了分析计算方便和通用性, 本文准备应用蒙特卡洛技术作机器人误差的概率分析。首先利用蒙特卡洛方法模拟具有一定分布规律的原始误差, 抽样计算误差数模, 然后数值上完成机器人在其可达工作空间内的手部位姿误差的各种概率分析, 如统计数字特征、概率分布规律及给定精度下的概率等。最后, 以一个六自由度机器人为例, 分别得到了关节伺服定位误差(分正态分布和均匀分布两种情况)、关节间隙以及几何参数公差所产生的手部位姿误差的概率等高线及其他概率特征。

## 2 误差数模及其概率分析

该机器人坐标系沿用D-H坐标标记法(图1), 这样, 手部(构件 $n$ )上的参考点 $P$ 在固定坐标系 $X_0, Y_0, Z_0$ 内的坐标为:

$$\begin{aligned} (x, y, z)^T = & [U_{0,1}][V_{0,1}][U_{1,2}][V_{1,2}] \cdots \\ & [U_{n-1,n}][V_{n-1,n}] + \{p_n\} + \\ & \{q_n\} + \cdots + \{q_2\} + \{q_1\} \end{aligned} \quad (1)$$

在坐标系 $X_0, Y_0, Z_0$ 内的手部姿态矩阵为:

$$[\Phi] = [\Phi_x | \Phi_y | \Phi_z] = [C_{0,1}][C_{1,2}] \cdots [C_{n-1,n}] \quad (2)$$

其中

$$[U_{i,i}] = \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 \\ s\theta_i & s\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$
$$[V_{i,i}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i \end{pmatrix}$$

$$\{q_i\} = (h, \theta, s, \dots)^\top;$$

$$\{C_{i,j}\} = \{U_{i,j}\} \{V_{i,j}\};$$

$\{p_n\} = (a, b, c)^\top$  为参考点  $P$  在坐标系  $n$  内的坐标。

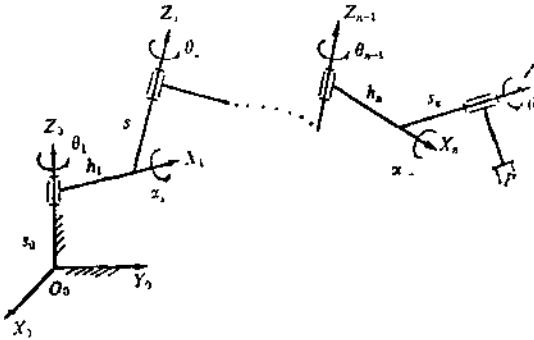


图 1 D-H 标记法

当已知手部参考点  $P$  的坐标  $(x, y, z)^\top$  及姿态矩阵  $\{\Phi\}$  时, 我们就可按式 (1) 和式 (2) 反向解出机器人的各个关节变量。

根据作者提出的机器人机构误差分析的微小位移合成法<sup>[5]</sup>, 可知在固定坐标系内手部位姿误差为:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(\Delta r)} &= (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^\top = \\ &= \sum_{i=1}^n \{C_{0,i}\} \overrightarrow{(\Delta l_i)} + \sum_{i=1}^n \{\overrightarrow{R_i} \times\} \cdot \\ &\quad \cdot \{C_{0,i}\} \overrightarrow{(\Delta \varphi_i)} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(\Delta \varphi)} &= (\Delta \varphi_x, \Delta \varphi_y, \Delta \varphi_z)^\top \\ &= \sum_{i=1}^m \{C_{0,i}\} \overrightarrow{(\Delta \varphi_i)} \end{aligned} \quad (4)$$

其中:  $\overrightarrow{(\Delta l_i)}$  和  $\overrightarrow{(\Delta \varphi_i)}$  分别为长度和角度原始误差矢量在坐标系  $x, y, z$  内的列阵;  $n$  和  $m$  分别为  $\overrightarrow{(\Delta l_i)}$  和  $\overrightarrow{(\Delta \varphi_i)}$  的数目;  $\{C_{0,i}\} = \{C_{0,1}\} \{C_{1,2}\} \dots \{C_{i-1,i}\}$  为坐标系  $i$  在坐标系  $O$  内的方向余弦矩阵;  $\{\overrightarrow{R_i}\}$  和  $\{\overrightarrow{R_i} \times\}$  分别为参考点  $P$  到  $\overrightarrow{(\Delta \varphi_i)}$  的矢径在坐标系  $O$  内的列阵及其反对称矩阵, 即:

$$\overrightarrow{R_i} = (R_{ix}, R_{iy}, R_{iz})^\top$$

和

$$\overrightarrow{R_i \times} = \begin{pmatrix} 0 & -R_{iz} & R_{iy} \\ R_{iz} & 0 & -R_{ix} \\ -R_{iy} & R_{ix} & 0 \end{pmatrix}$$

需要特别指出的是, 关节间隙是通过影响组成关节的两构件的相对位置和姿态来引起机器人手部位姿误差的。为此, 可根据文[10]的讨论, 先确定间隙所引起的两相邻构件的相对位姿偏差, 从而利用式 (3) 和式 (4) 分析间隙产生的手部位姿误差。

为了便于概率分析, 可将位姿误差数模改写为如下更一般的形式:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \sum_{i=1}^{n+m} a_{xi} \cdot \delta_i \\ \Delta y &= \sum_{i=1}^{n+m} a_{yi} \cdot \delta_i \\ \Delta z &= \sum_{i=1}^{n+m} a_{zi} \cdot \delta_i \end{aligned} \quad (5)$$

和

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_x &= \sum_{i=1}^m \beta_{xi} \cdot \delta_i \\ \Delta \varphi_y &= \sum_{i=1}^m \beta_{yi} \cdot \delta_i \\ \Delta \varphi_z &= \sum_{i=1}^m \beta_{zi} \cdot \delta_i \end{aligned} \quad (6)$$

其中:  $\delta_i$  为原始误差  $\Delta l_i$  和  $\Delta \varphi_i$ ;  $a_{xi}$ 、 $a_{yi}$ 、 $a_{zi}$  分别为  $\delta_i$  对  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$  的影响系数;  $\beta_{xi}$ 、 $\beta_{yi}$ 、 $\beta_{zi}$  分别为  $\delta_i$  对  $\Delta \varphi_x$ 、 $\Delta \varphi_y$ 、 $\Delta \varphi_z$  的影响系数, 这些影响系数是机构位形的函数;  $n$  和  $m$  分别为原始误差  $\Delta l_i$  和  $\Delta \varphi_i$  的个数。

至于关节伺服定位误差,  $\delta_i$  是平均值为零的随机量, 以电位计为伺服装置的  $\delta_i$  呈正态分布, 以编码器为伺服装置的  $\delta_i$  呈均匀分布。至于几何参数偏差, 对于用测量过的构件装配出来的机器人, 它们是唯一确定的, 对于设计图纸上的机器人或用任意构件装配出来的机器人, 可以认为它们在其对应的公差带内是随机的且呈均匀分布 (按单件小批量生产工艺来考虑)。至于运动关节间隙, 一般认为销轴在销孔内的任何位置的概率是相等的, 据文[10]分

析, 间隙引起的两相邻构件的位姿偏差的均值都为零。

由上分析可知, 手部位姿误差的各个分量都是原始误差的加权和, 并且各个原始误差的均值都为零。因此, 这些手部位姿误差的均值也都为零, 而手部位姿误差的方差和协方差如下 (仅给出位置误差的方差和协方差, 姿态误差具有与位置误差相似的方差和协方差, 从略) :

$$\left. \begin{aligned} V(\Delta x) &= \sum_{i=1}^{s+m} a_{x,i}^2 \cdot V(\delta_i) \\ V(\Delta y) &= \sum_{i=1}^{s+m} a_{y,i}^2 \cdot V(\delta_i) \\ V(\Delta z) &= \sum_{i=1}^{s+m} a_{z,i}^2 \cdot V(\delta_i) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

和

$$\left. \begin{aligned} V(\Delta x, \Delta y) &= \sum_{i=1}^{s+m} a_{x,i} a_{y,i} \cdot V(\delta_i) \\ V(\Delta y, \Delta z) &= \sum_{i=1}^{s+m} a_{y,i} a_{z,i} \cdot V(\delta_i) \\ V(\Delta z, \Delta x) &= \sum_{i=1}^{s+m} a_{z,i} a_{x,i} \cdot V(\delta_i) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中,  $V(\delta_i)$  为原始误差的方差;

对于均匀分布的随机误差

$$V(\delta_i) = \epsilon^2/3$$

对于正态分布的随机误差

$$V(\delta_i) = \epsilon^2/9$$

其中,  $\epsilon_i$  为原始误差的半公差带宽度。

根据误差理论, 当原始误差数目较多 ( $> 5$ ) 时, 不管它们属何种概率分布, 其所产生的手部位姿误差均接近正态分布。那么, 三维正态随机变量  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  的概率密度为:

$$f(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{(\det)[V]}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (\Delta x, \Delta y, \Delta z) \cdot [V]^{-1} \cdot (\Delta x, \Delta y, \Delta z)\right\}^T \quad (9)$$

其中:  $[V]$  为  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  的协方差矩阵, 即

$$[V] = \begin{pmatrix} V(\Delta x) & V(\Delta x, \Delta y) & V(\Delta x, \Delta z) \\ V(\Delta y, \Delta x) & V(\Delta y) & V(\Delta y, \Delta z) \\ V(\Delta z, \Delta x) & V(\Delta z, \Delta y) & V(\Delta z) \end{pmatrix}$$

注意, 当原始误差的个数较少且不是正态分布时, 上式是不成立的。

为了量化分析手部位置精度, 采用手部位置误差落在半径为  $R$  的误差球体内的概率这一概念。因此, 手部位置误差小于给定误差  $R$  的概率为:

$$P(\Delta r \leq R) = \int_V f(\Delta x, \Delta y, \Delta z) dV \quad (10)$$

其中:  $\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$  ;

$V$  是半径为  $R$ 、球心在手部理想位置的球体。

作类似的分析, 可得手部姿态误差小于给定误差  $T$  的概率为:

$$P(\Delta \varphi \leq T) = \int_V g(\Delta \varphi_x, \Delta \varphi_y, \Delta \varphi_z) dV \quad (11)$$

其中:  $\Delta \varphi = \sqrt{(\Delta \varphi_x)^2 + (\Delta \varphi_y)^2 + (\Delta \varphi_z)^2}$  ;

$g(\Delta \varphi_x, \Delta \varphi_y, \Delta \varphi_z)$  是多姿态误差  $(\Delta \varphi_x, \Delta \varphi_y, \Delta \varphi_z)$  的三维正态密度函数, 与  $f(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  具有相同的形式;  $V$  为中心线为手部理想姿态、锥角为  $T$  的圆锥体。

为了能清楚地了解机器人在规定手部姿态下的可达工作空间内的精度分布情况, 可将误差小于给定误差的概率等高面作出来。若机器人的第一个关节是转动副, 这种等高面是一环面, 其可用通过关节轴线的平面内的等高线代替。若第一个关节是移动副, 则等高面是一个轴线平行关节轴线的柱面, 其可用垂直于关节轴线的平面内的等高线来表示。要作出上述这些等高线, 需将可达工作空间划分为许多小格点, 然后按前面讨论的公式逐点计算手部位姿误差小于给定精度的概率。

### 3 误差分析的蒙特卡洛方法

由上节的理论分析可知, 要完成数值分析机器人手部位姿精度分布情况的工作, 需进行一系列的复杂的概率分析和计算, 工作量较大。并且上述理论不适合于数目较少的非正态

分布的原始误差的场合。此外上述理论还不能直接得到手部位姿误差的其他概率特征。为此，本文采用一种误差概率分析的CAD方法——蒙特卡洛模拟法。蒙特卡洛模拟法是一种通过抽样随机原始误差，模拟位姿误差数模，从而对抽样数据作统计分析来完成复杂概率分析的近似方法。具体地，就是首先利用(0,1)上均匀分布的随机数的标准抽样子程序，在计算机上产生与原始误差具有相同概率分布和相同统计特征的随机量的抽样值 $(\delta_i)$ ;<sup>[9,10]</sup>  $i=1, 2, \dots, k; j=1, 2, \dots, \lambda$ 。其中 $k$ 为原始误差的个数； $\lambda$ 为样本总数。将原始误差的抽样值 $(\delta_i)$ ，代入手部位姿误差数模式(5)和式(6)，获得手部位姿误差的抽样值如下：

$$\begin{aligned} \vec{(\Delta r)}_j &= (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T, \\ \vec{(\Delta \varphi)}_j &= (\Delta \varphi_x, \Delta \varphi_y, \Delta \varphi_z)^T, \end{aligned}$$

其中： $j=1, 2, \dots, \lambda$ 。记

$$\Delta r_j = \sqrt{(\Delta x)_j^2 + (\Delta y)_j^2 + (\Delta z)_j^2} \leq R$$

和  $\Delta \varphi_j = \sqrt{(\Delta \varphi_x)_j^2 + (\Delta \varphi_y)_j^2 + (\Delta \varphi_z)_j^2} \leq T$  的样本数分别为 $\lambda'$ 和 $\lambda''$ 。

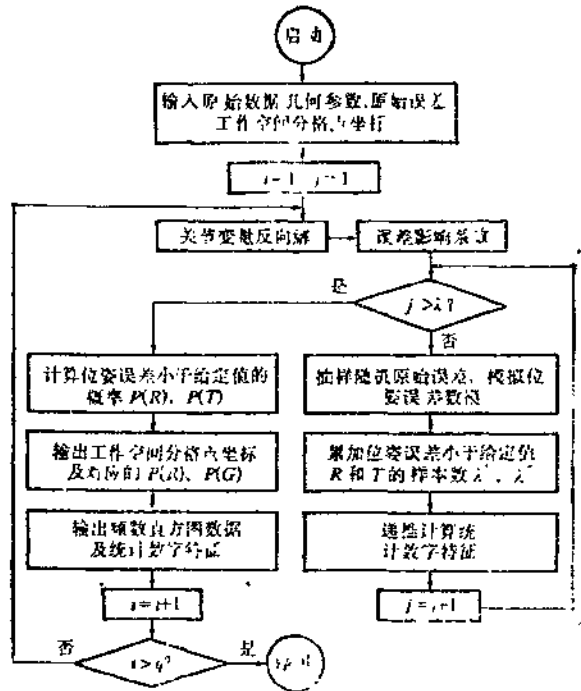
那么，机器人位置和姿态误差分别小于给定误差 $R$ 和 $T$ 的概率，近似等于位姿误差小于给定误差的样本数除以样本总数，即

$$P(\Delta r \leq R) \approx \lambda' / \lambda \tag{12}$$

$$P(\Delta \varphi \leq T) \approx \lambda'' / \lambda \tag{13}$$

在工作空间内的各个分格点上，重复上述计算，就能近似地作出具有相同概率的等高面(线)。在完成上述工作的同时，我们不难获得手部位姿误差在各个分格点上的概率密度函数(频数直方图)和统计数字特征(具体计算方法见文[11])。另外，我们还可以分析出在规定方向上手部位姿误差小于某一给定误差的概率等高线。

利用上述的蒙特卡洛技术来分析机器人误差的概率问题，无须进行概率的理论分析，方法易于掌握，并且计算程序简单、通用性强和适应面广。计算框图如图2所示。



注： $\lambda$ 为样本总数， $q$ 为工作空间分格点数  
图2 误差分析的蒙特卡洛法计算框图

#### 4 数值例题：一个六自由度机器人手部位姿误差的蒙特卡洛模拟

本文所取的数值例题是一个六自由度关节型机器人机构<sup>[1-3]</sup>，其几何参数为：

$a_1 \sim a_5 = \pi/2; a_6 = 0; h_1 \sim h_6 = 0; s_0 = s_1 = s_2 = s_3 = 0; s_4 = 60\text{cm}; s_5 = 40\text{cm}; a = b = c = 0$ 。设机器人的手部姿态始终为：

$$[\Phi] = [I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

考虑到工作空间具有对称性，本文仅计算手部参考点在其规定姿态下所能达到的工作空间的 $(y=0, x \geq 0, z \geq 0)$ 平面内的位姿精度的概率等高线、概率密度函数及其统计特征。其中将所计算的工作空间平面划分为180个网格点；蒙特卡洛模拟的样本数为300；频率直方图的时间区间数为20；给定的位置和姿态误差分别为 $R=0.1\text{cm}$ 和 $T=0.003$ 弧度。另外，关节变量的反向解按式(1)和(2)求出。

数值计算中所考虑的原始误差如下：

表 1 位姿误差的统计数字特性

统计量	$(\Delta q)_{max}$	$(\Delta q)_{min}$	$E(\Delta q)$	$\sigma(\Delta q)$
$\Delta x$	0.0832	-0.0861	0.0009	0.0303
$\Delta y$	0.1233	-0.1305	-0.0045	0.0439
$\Delta z$	0.1240	-0.0861	-0.0005	0.0379
$\Delta r$	0.1493	0.0084	0.0597	0.0273
$\Delta \varphi_x$	0.0025	-0.0019	0.0000	0.0008
$\Delta \varphi_y$	0.0021	-0.0030	-0.0000	0.0009
$\Delta \varphi_z$	0.0038	-0.0043	-0.0001	0.0013
$\Delta \varphi$	0.0043	0.0002	0.0016	0.0008

(1) 均值为零、标准差为0.00707 且呈正态分布的六个关节伺服定位误差<sup>[1]</sup>;

(2) 在 $(-3 \times 0.00707, 3 \times 0.00707)$  内呈均匀分布的六个关节伺服定位误差;

(3) 连杆参数误差 $(\Delta h_1 \sim \Delta h_5, \Delta s_1 \sim \Delta s_5, \Delta \alpha_1 \sim \Delta \alpha_5)$ , 它们分别在宽度为0.05cm, 0.05cm, 0.05°的公差带内呈均匀分布。

图3 (a) 为上述第一种原始误差所产生的手部参考点的位置误差小于给定误差 R 的概率  $P(\Delta r \leq R)$  的等高线。而这三种原始误差所产生的手部姿态误差小于给定误差 T 的概率  $P(\Delta \varphi \leq T)$ , 在整个规定姿态下的工作空间内变化不大, 分别约为0.94, 0.58, 1.00。

图3 (b)、(c) 给出了当手部参考点在  $x=50, z=35$  时, 上述第一种原始误差所产生的手部位置误差  $\Delta r$  和姿态误差  $\Delta \varphi$  的概率密度函数(频数直方图)。表 1 给出了相应的统计数字特征。

数值计算结果表明: 在相同的机构位形和原始误差条件下(原始误差(1)), 按本文的蒙特卡洛方法获得的手部位姿误差的概率等高线与从文[1]理论误差概率模型获得的等高线基本一致。

5 结束语

(a) 本文给出手部位姿误差数模式(3)和式(4), 简单实用且适应于多种原始误差。

(b) 本文提出的误差概率分析的蒙特卡洛模拟法, 避开了复杂的概率分析和计算且能适用于任意数目任意分布的原始误差的场合。此

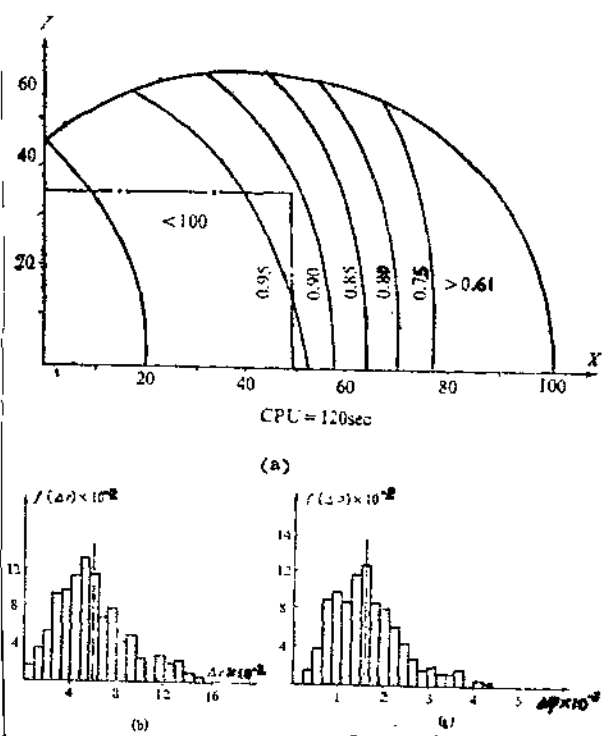


图 3(a) 位置误差等高线, (b) 位置误差概率分布 (c) 姿态误差的概率分布

法不仅能获得手部位姿精度的概率等高线, 而且能获得位姿误差的分布规律和统计数字特征。

(c) 从所得到的手部位姿精度的概率等高线, 可以获取一些定性和定量的信息, 为改进设计或合理使用机器人提供依据。

参 考 文 献

1 Waldron K J, Kumar A. Development of a theory of errors for manipulators. In: Proc 5th

- World Cong on TMM, 1979, 821—826
- 2 Kumar A, Waldron K J. Numerical plotting of surface of positional accuracy of manipulators. MMT, 1981, 16(4), 361—368
  - 3 Kumar A, Prakash S. Analysis of mechanical errors in manipulators. In, Proc 6th World Cong on TMM, 1983, 960—964
  - 4 Wu Chihaur, A kinematic CAD tool for the design and control of a robot manipulator. IJRR, 1984, 58—61
  - 5 徐卫良, 张启先. 机器人机构位姿误差分析的微小位移合成法. 南京工学院学报, 1987; 1(6), 45—54
  - 6 Sugimoto K, Okada T. Compensation of positioning errors caused by geometric deviations in robot system. In, Proc 2th ISRR 1984, 231—236
  - 7 Whitney D E, Loginiski C A, Rourke J M. Industrial robot forward calibration method and results. Trans ASME J DSMC 1986, 108(4), 1—8
  - 8 陈明哲, 张启先. 工业机器人的误差分析. 北京航空学院学报, 1984; 2; 11—22
  - 9 徐卫良. 连杆机构运动误差分析的统计模拟法. 江苏机械, 1986; 1: 7—11
  - 10 徐卫良, 张启先. 空间机构误差的概率分析和蒙特卡罗模拟. 北京航空学院科研报告 BH—B2902, 机械工程学报 (已接受发表).
  - 11 中科院计算中心. 概率统计计算. 北京, 科学出版社, 1979

## MONTE CARLO TECHNIQUE FOR ERROR ANALYSIS OF INDUSTRIAL ROBOT

XU Weiliang      ZHANG Qixian  
(Southeast Univ, Nanjing)      (Beijing Univ of AA)

### Abstract

This paper deals with monte carlo technique for analysing numerically positional and orientational error of industrial robot linkage. By means of the technique, the distribution contours, probability density functions (histogram) and other statistic characteristics of positional and orientational error of robot hand can be obtained through sampling source error with any density function and then simulating error model. For illustration, a 6 DOF robot linkage is taken as a numerical example.

**Keywords:** robot linkage, error, probability, Monte-carlo, numerical calculation.

(上接44页)

## A VISION SYSTEM FOR LOCATING OBJECTS IN 3-D SPACE

YIN Baolin  
(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

### Abstract

This paper discusses a vision system of determining the position and orientation of the object in 3-D space. This vision system is a system of a high level off-line robot programming system. While the hierarchy of the vision sub-system and the interface between this sub-system and the robot programming system are described briefly, the low level vision processing methods and the accuracy of determining the positions using visual information are discussed in detail.

**Keywords:** 3-D vision, verification vision, robot programming.