附录二　化工常用数学方法

主稿人　谢国瑞　华东理工大学　教授

1 行列式

1.1 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

1.2 三阶行列式

(1) 定义

①

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$$

②对角线展开

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix}\text{实线上三数} \\ \text{之积前加正号}\end{matrix} \begin{matrix} +a_1b_2c_3 \\ +a_2b_3c_1 \\ +a_3b_1c_2 \end{matrix}$$

$$+ \qquad \begin{matrix}\text{虚线上三数} \\ \text{之积前加负号}\end{matrix} \begin{matrix} -a_1b_3c_2 \\ -a_2b_1c_3 \\ -a_3b_2c_1 \end{matrix}$$

$$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$$

③按某行（或列）展开

三阶行列式按行（或列）的展开式共有 6 种，例如按第 2 行展开，有

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

上式右端各项前所加的符号取“正号”或“负号”，是根据该项因子的单个元素在左端行列式中所处的位置决定，其对应关系如下表：

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

(2) 性质

①依次序将各行换成列，行列式的值不变，即有

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

②两行（或列）对调，行列式的值变号，例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

推论：若两行（或列）元素相同，则行列式的值为零。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}=0$$

③某一行（或列）所有元素均乘同一个数 k，所得行列式的值为原行列式之值的 k 倍，例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

附录二　化工常用数学方法

主稿人　谢国瑞　华东理工大学　教授

1 行列式

1.1 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

1.2 三阶行列式

(1) 定义

①

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$$

②对角线展开

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

实线上三数之积前加正号 $+a_1b_2c_3$ $+a_2b_3c_1$ $+a_3b_1c_2$

$+$ 虚线上三数之积前加负号 $-a_1b_3c_2$ $-a_2b_1c_3$ $-a_3b_2c_1$

$$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$$

③按某行（或列）展开

三阶行列式按行（或列）的展开式共有 6 种，例如按第 2 行展开，有

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

上式右端各项前所加的符号取“正号”或“负号”，是根据该项因子的单个元素在左端行列式中所处的位置决定，其对应关系如下表：

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

(2) 性质

①依次序将各行换成列，行列式的值不变，即有

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

②两行（或列）对调，行列式的值变号，例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

推论：若两行（或列）元素相同，则行列式的值为零。例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}=0$$

③某一行（或列）所有元素均乘同一个数 k，所得行列式的值为原行列式之值的 k 倍，例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

推论：若有两行（或列）的元素对应成比例，则行列式的值为零，例如

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} kc_1 & b_1 & c_1 \\ kc_2 & b_2 & c_2 \\ kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

④若某一行（或列）的每个元素都可看成二项之和，则该行列式可写作两个行列式之和，例如

$$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

推论：将某一行（或列）所有元素均乘以同一数后加到另一行（或列）的对应元素上，行列式的值不变，例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+kc_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+kc_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+kc_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

1.3 高阶行列式

（1）n 阶行列式

四阶和更高阶数的行列式，称为高阶行列式，三阶行列式之按某行（或列）展开的方法对高阶行列式也是适用的。例如，对 n 阶行列式按第 1 行展开，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\ (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+\ (-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

三阶行列式的性质，对高阶行列式也成立。

（2）范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

2 傅里叶级数及积分变换

2.1 傅里叶级数

（1）定义

①设 $f(x)$是以 $2l$ 为周期的函数，且在$[-l,l]$上绝对可积，则称三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

为 $f(x)$的傅里叶级数，记为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

②在以上①的条件下，如果 $f(x)$还是奇函数，则

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

在以上①的条件下，如果 $f(x)$还是偶函数，则

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

（2）收敛性

若以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$，在区间$[-l,l]$上至多只有有限个第一类间断点及极值点，则 $f(x)$的傅里叶级数必收敛，且在$[-l,l]$上有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$=\begin{cases} f(x) & x\text{ 是}(-l,l)\text{内 }f(x)\text{的连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x\text{ 是}(-l,l)\text{内 }f(x)\text{的间断点} \\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} & x=\pm l \end{cases}$$

这时，称 $f(x)$ 的傅里叶级数为 $f(x)$ 的傅里叶展开，有时并记为：(尽管这个级数的和，在有限个点处可能并不等于 $f(x)$)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

2.2 拉普拉斯变换

(1) 定义

设函数 $f(t)$ 满足

①$t<0$ 时，$f(t)=0$

②$t\geqslant 0$ 时，$f(t)$ 在任一有限区间上分段单调且除至多只有有限个第一类间断点外处处连续。

③存在常数 M 及 $\alpha\geqslant 0$(称 α 为 $f(t)$ 的增长指数)，使 $t>0$ 时成立 $|f(t)|\leqslant Me^{\alpha t}$，则下列一对公式成立

$$\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\mathrm{d}t=F(s)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s=f(t)\qquad (c=Re\ s>\alpha)$$

此时，称 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换(象函数)，记为

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$$

称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的(逆或)反拉普拉斯变换(象原函数)，记为

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

(2) 主要性质

设 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，$\mathcal{L}[g(t)]=G(s)$，则

编号	运　　算	象原函数	相应的象函数的关系
1	线性(a、b 是常数)	$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
2a 2b 2c	微分 …若对一切 $t>0$，$f'(t)$ 存在 …若对一切 $t>0$，$f^{(r)}(t)$ 存在 …若对一切 $t>0$，$f(t)$ 有界，又在 $t=t_1$，t_2，…处 $f(t)$ 有单侧极限，以及 $f'(t)$ 除这些点外，在 $t>0$ 时存在	$f'(t)$ $f^{(r)}(t)(r=1,2,\cdots)$ $f'(t)$	$sF(s)-f(0+0)$ $s^rF(s)-S^{r-1}f(0+0)-s^{r-2}f'(0+0)-\cdots f^{(r-1)}(0+0)$ $sF(s)-f(0+0)-\sum_k e^{-t_k s}[f(t_k+0)-f(t_k-0)]$
3	积分	$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
4	尺度变换 (相似定理)	$f(at)(a>0)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
5	平移(或延迟)	$f(t-b)(b>0)$	$e^{-bs}F(s)$
6	卷积 (或褶积)	$f(t)*g(t)\overset{\Delta}{=}\int_0^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\overset{\Delta}{=}g(t)*f(t)$	$F(s)G(s)$
7	极限 (a 与 t、s 无关)	$\lim\limits_{a\to a_0}f(t,a)$	$\lim\limits_{a\to a_0}F(s,a)$
8a 8b	关于参量 a(与 t、s 无关)的微分和积分	$\frac{\partial}{\partial a}f(t,a)$ $\int_{a_1}^{a_2}f(t,a)\mathrm{d}a$	$\frac{\partial}{\partial a}F(s,a)$ $\int_{a_1}^{a_2}F(s,a)\mathrm{d}a$
9a 9b	对拉普拉斯变换的微分	$-tf(t)$ $(-1)^r t^r f(t)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)$ $\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}s^r}F(s)$
10	对拉普拉斯变换的积分	$\frac{1}{t}f(t)$	$\int_s^{\infty}F(s)\mathrm{d}s$
11	平移	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$

（3）简表

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)e^{st}\mathrm{d}s \qquad F(s)=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}e^{-\frac{a}{s}}$
$t^{m}(m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{a}{s}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\mathrm{erf}(at)(a>0)$	$\frac{1}{s}e^{\frac{s^2}{4a^2}}\mathrm{erfc}\left(\frac{s}{2a}\right)$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\mathrm{crf}(a\sqrt{t})(a>0)$	$\frac{a}{s\sqrt{a^2+s}}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\mathrm{erfc}(a\sqrt{t})(a>0)$	$\frac{\sqrt{a^2+s}-a}{s\sqrt{a^2+s}}$
$\mathrm{sh}\,at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\mathrm{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)(a>0)$	$\frac{1}{s}(1-e^{-2a\sqrt{s}})$
$\mathrm{ch}\,at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)(a>0)$	$\frac{1}{s}e^{-2a\sqrt{s}}$
$e^{-bt}\sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$	$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
$e^{-bt}\cos at$	$\frac{(s+b)}{(s+b)^2+a^2}$	$J_v(at)(Re v>-1)$	$\frac{a^v}{\sqrt{s^2+a^2}(s+\sqrt{s^2+a^2})^v}(Re s\geqslant \lvert I_m a\rvert)$
$e^{-bt}t^{m}(m>-1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{(s+b)^{m+1}}$	$\frac{J_v(at)}{t}(Re v>0)$	$\frac{a^v}{v(s+\sqrt{s^2+a^2})^v}(Re s\geqslant \lvert I_m a\rvert)$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$t^vJ_v(at)(Re v>-\frac{1}{2})$	$\frac{(2a)^v}{\sqrt{\pi}}\Gamma(v+\frac{1}{2})(s^2+a^2)^{-v-\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-k\sqrt{s}}$	$J_0(2\sqrt{at})$	$\frac{1}{s}e^{-\frac{a}{s}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2a\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a^2}{s}}\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{s}}\right)$		

注：$\Gamma(x)$、$J_v(x)$分别为 Γ 函数及 v 阶第一类贝塞尔函数，见本篇 4；erf(x)及 erfc(x)分别是误差函数及余误差函数，定义式为：

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t,\ \mathrm{erfc}(x)=1-\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

2.3 傅里叶变换

（1）定义

设函数 $f(x)$满足

①$\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert f(x)\rvert\mathrm{d}x$存在

②$f(x)$在任一有限区间上分段单调且除至多只有有限个第一类间断点外处处连续，则下列一对公式成立

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x=F(\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega=f(x)$$

此时，称 $F(\omega)$为 $f(x)$的傅里叶变换，记为

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(x)]$$

称 $f(x)$为 $F(\omega)$的(逆或)反傅里叶变换，记为

$$f(x)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$$

（2）主要性质

设 $\mathscr{F}[f(x)]=F(\omega)$，$\mathscr{F}[g(x)]=G(\omega)$，则

编号	运算	象原函数	象函数
1	线性（a、b 是常数）	$af(x)+bg(x)$	$aF(\omega)+bG(\omega)$
2	微分 若对一切 x，$f^{(r)}(x)$ 存在，且所有较低阶导数在 $\lvert x\rvert\to\infty$ 时趋于零	$f^{(r)}(x)$ $(-ix)^r f(x)$	$(i\omega)^r F(\omega)$ $(r=0,1,2\cdots)$ $\dfrac{d^r F(\omega)}{d\omega^r}$
3	尺度变换（相似定理）	$f(ax)$	$\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
4	平移（或延迟）	$f(x-a)$	$e^{ia\omega}F(\omega)$
5	卷积（或褶积）	$f(x)*g(x)\xlongequal{\Delta}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(x-u)du$	$F(\omega)\cdot G(\omega)$
6	连续性	$f(x,a)\to f(x)$	$F(\omega,a)\to F(\omega)$
7	翻转	$f(-x)$	$F(-\omega)$
8	共轭	$\overline{f(x)}$	$\overline{F(-\omega)}$
9	平移（或调频）	$e^{-iax}f(x)$	$F(\omega-a)$
10	帕塞法耳等式	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert f(x)\rvert^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert F(\omega)\rvert^2d\omega$	
11	奇偶虚实	若 $f(x)$ 是实的偶函数，则 $F(\omega)$ 是实的偶函数，反之亦真；若 $f(x)$ 是实的奇函数，则 $F(\omega)$ 是虚的奇函数，反之亦真	

（3）简表

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

	$f(x)$	$F(\omega)$
1	方形脉冲 $f(x)=\delta_A(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{a}, & \lvert x\rvert\leqslant\dfrac{a}{2}\\ 0, & \lvert x\rvert>\dfrac{a}{2}\end{cases}$ 其中，A 为正常数，表示脉冲面积，a 为正常数，表示脉宽	$\dfrac{A}{a}\cdot\dfrac{2\sin\dfrac{a}{2}\omega}{\omega}$
2	单位脉冲 在 $\delta_A(x)$ 中，$A=1$，$a\to0$ 时，称为单位脉冲，记为 $\delta(x)$，即 $\delta(x)=\lim\limits_{a\to0}\delta_1(x)$，或简记为 $\delta(x)=\begin{cases}\infty, & x=0\\ 0, & x\neq0\end{cases}$	1
3	单位函数 $f(x)=1$	$2\pi\delta(\omega)$
4	三角脉冲 $f(x)=\begin{cases}0, & \lvert x\rvert>\delta\\ 1-\dfrac{\lvert x\rvert}{\delta}, & \lvert x\rvert\leqslant\delta\end{cases}$	$\dfrac{4\sin^2\dfrac{\delta\omega}{2}}{\delta\omega^2}$
5	钟形脉冲 $f(x)=e^{-a^2x^2}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$
6	半余弦脉冲 $f(x)=\begin{cases}0, & \lvert x\rvert>\dfrac{\pi}{2\omega_0}\\ \cos\omega_0x, & \lvert x\rvert\leqslant\dfrac{\pi}{2\omega_0}\end{cases}$	$2\omega_0\dfrac{\cos\dfrac{\pi\omega}{2\omega_0}}{\omega_0^2-\omega^2}$
7	指数衰减脉冲 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ e^{-ax} & x\geqslant0\end{cases}(a>0)$	$\dfrac{1}{a+i\omega}$
8	单位跃阶函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geqslant0\end{cases}$	$\dfrac{1}{i\omega}$
9	傅里叶核 $f(x)=\dfrac{\sin\delta x}{\pi x}$	$F(\omega)=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert\leqslant\delta\\ 0, & \lvert\omega\rvert>\delta\end{cases}$
10	$f(x)=\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{\delta x}{2}\right)}{\pi\delta x^2}$	$F(\omega)=\begin{cases}1-\dfrac{\lvert\omega\rvert}{\delta}, & \lvert\omega\rvert\leqslant\delta\\ 0, & \lvert\omega\rvert>\delta\end{cases}$

续表

	$f(x)$	$F(\omega)$
11	$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{\pi}{a}e^{-a\lvert\omega\rvert}$
12	$\dfrac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	$\sqrt{\dfrac{2\pi}{\lvert\omega\rvert}}$
13	$\begin{cases} e^{iax}\cdot e^{-bx}, & x\geqslant 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$	$\dfrac{i}{a+ib-\omega}$
14	$\dfrac{e^{-a\lvert x\rvert}}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	$\sqrt{2\pi}\dfrac{\sqrt{\sqrt{\omega^2+a^2}+a}}{\sqrt{\omega^2+a^2}}$
15	$\dfrac{\cos\left(-\dfrac{a}{\sqrt{\lvert x\rvert}}\right)}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	$\sqrt{\dfrac{2\pi}{\lvert\omega\rvert}}(\cos\sqrt{2a\lvert\omega\rvert}-\sin\sqrt{2a\lvert\omega\rvert})$
16	$\dfrac{\operatorname{sh}ax}{\operatorname{sh}\pi x},-\pi<a<\pi$	$\dfrac{\sin a}{\operatorname{ch}\omega+\cos a}$
17	$\dfrac{\operatorname{sh}ax}{\operatorname{ch}\pi x},-\pi<a<\pi$	$-2i\dfrac{\sin\dfrac{a}{2}\operatorname{sh}\dfrac{\omega}{2}}{\operatorname{ch}\omega+\cos a}$
18	$\dfrac{\operatorname{ch}ax}{\operatorname{ch}\pi x},-\pi<a<\pi$	$2\dfrac{\cos\dfrac{a}{2}\operatorname{ch}\dfrac{\omega}{2}}{\operatorname{ch}\omega+\cos a}$
19	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}ax}$	$\dfrac{\pi}{a}\dfrac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi\omega}{2a}}$
20	$\sin ax^2$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cos\left(\dfrac{\omega^2}{4a}+\dfrac{\pi}{4}\right)$
21	$\cos ax^2$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cos\left(\dfrac{\omega^2}{4a}-\dfrac{\pi}{4}\right)$
22	$\dfrac{\sin ax}{x}$	$\begin{cases} \pi, & \lvert\omega\rvert\leqslant a \\ 0, & \lvert\omega\rvert>a \end{cases}$
23	$\dfrac{\sin ax}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	$i\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lvert\omega+a\rvert}}-\dfrac{1}{\sqrt{\lvert\omega-a\rvert}}\right)$
24	$\dfrac{\cos ax}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lvert\omega+a\rvert}}+\dfrac{1}{\sqrt{\lvert\omega-a\rvert}}\right)$
25	$\dfrac{\sin^2 ax}{x^2}$	$\begin{cases} \pi\left(a-\dfrac{\lvert\omega\rvert}{2}\right), & \lvert\omega\rvert\leqslant 2a \\ 0, & \lvert\omega\rvert>2a \end{cases}$

3 常微分方程

3.1 一阶方程

(1) 变量可分离方程

①变量可分离方程 $y'=f(x)g(y)$

解 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C$

②$y'=f(ax+by+c)$

解 作因变量代换 $u=ax+by+c$，方程被化成①的形式$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+bf(u)$，而得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{a+bf(u)}=x+c$$

(2) 齐次方程

①齐次型方程 $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

解 作因变量代换 $u=\dfrac{y}{x}$，方程被化成

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{f(u)-u}{x}$$

而得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+c$$

②$y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

解法 若行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

引进新变量 t，u，

$$x=t+\alpha,\quad y=u+\beta$$

其中 α、β 满足方程组

$$\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0 \\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0 \end{cases}$$

方程被化成①的形式：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=f\left(\frac{a_1t+b_1u}{a_2t+b_2u}\right);$$

若 $\Delta=0$，但 $b_1\neq0$，则令 $u=a_1x+b_1y+c_1$；

若 $\Delta=0$，但 $b_2\neq0$，则令 $u=a_2x+b_2y+c_2$；

(3) 线性方程

①线性方程　$y'+P(x)y=Q(x)$

解　$y=e^{-\int P\mathrm{d}x}\left(\int Qe^{\int P\mathrm{d}x}dx+c\right)$

②伯努利方程　$y'+P(x)y=Q(x)y^n$

$(n\neq0,1)$

解法　两端乘以 $(1-n)y^{-n}$，作因变量代换 $u=y^{1-n}$ 后可化成线性方程，其通解公式为

$$y^{(1-n)}e^{(1-n)\int P\mathrm{d}x}=(1-n)\int Qe^{(1-n)\int P\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c$$

(4) 全（恰当）微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

式中 M,N 满足 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

解法　方程可写成

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}U(x,y)=0$$

式中 $\mathrm{d}U$ 是全(恰当)微分，而得方程之解为

$$U(x,y)=c$$

(5) 可将 y 解出的方程

$$y=f(x,p)$$

式中 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

①方程 $y=f(x,p)$

解法　方程两边对 x 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

即

$$\left(p-\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathrm{d}x-\frac{\partial f}{\partial p}\mathrm{d}p=0$$

若能由此得通解

$$p=\varphi(x,c)\text{或}x=\psi(p,c)$$

则原方程的解为

$$y=f(x,\varphi(x,c))\text{或}\begin{cases}x=\psi(p,c)\\y=f(\psi(p,c),p)\end{cases}$$

②拉格朗日方程　$y=xf_1(p)+f_2(p)$

解法　化成 x 的线性方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}-\frac{f'_1(p)}{p-f_1(p)}x=\frac{f'_2(p)}{p-f_1(p)}$$

后继续求解。

③克莱洛方程　$y=xp+f(p)$

解　化成方程

$$(x+f'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0$$

令 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0$，即 $p=c$，代入原方程，即得通解(这类方程还可能有奇解，见(11))

$$y=cx+f(c)$$

(6) 可将 x 解出的方程

$$x=f(y,p)\text{，式中 }p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

解法　方程两边对 x 求导，利用 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ 将方程化成

$$\left(p\frac{\partial f}{\partial y}-1\right)\mathrm{d}y+p\frac{\partial f}{\partial p}\mathrm{d}p=0$$

若可求出此方程的通解

$$y=\varphi(p,c)\text{或 }p=\psi(y,c)$$

则原方程的解为

$$\begin{cases}x=f(\varphi(p,c),p)\\y=\varphi(p,c)\end{cases}\quad\text{或}\quad x=f(y,\psi(y,c))$$

(7) 不显含 y 的方程

$$f(x,y')=0$$

解　若引入适当的参数 t，能化方程为

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y'=\psi(t)\end{cases}$$

则原方程的解为

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\int\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t+c\end{cases}$$

(8) 不显含 x 的方程

$$f(y,y')=0$$

解　若引入适当的参数 t，能化方程为

$$\begin{cases} y=\varphi(t) \\ y'=\psi(t) \end{cases}$$

则原方程的解为

$$\begin{cases} x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t+c \\ y=\varphi(t) \end{cases}$$

(9) 积分因子

含积分因子的方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$

解法 设式中$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$,但存在 $\mu(x,y)$,使成立

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

则称 $\mu(x,y)$为原方程的积分因子。对这类方程,在找出积分因子后,再按(4)的方法求解。

一些情况下,积分因子 $\mu(x,y)$可简单地写出

①在 $xM+yN=0$ 时,$\mu(x,y)=\frac{1}{xM-yN}$

②在 $xM-yN=0$ 时,$\mu(x,y)=\frac{1}{xM+yN}$

③在 $xM+yN\neq0$ 但 M,N 是同次的齐次式时,$\mu(x,y)=\frac{1}{xM+yN}$

④在 $xM-yN\neq0$ 但 $M(x,y)=yM_1(xy)$、$N(x,y)=xN_1(xy)$时,$\mu(x,y)=\frac{1}{xM-yN}$

⑤若$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$,

则 $\mu(x,y)=e^{\int f(x)\mathrm{d}x}$

⑥若$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=f(y)$,

则 $\mu(x,y)=e^{\int f(y)\mathrm{d}y}$

⑦若存在适合

$$nxM-myN+xy\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0$$

的常数 m 和 n(用比较系数法确定),则 $\mu(x,y)=x^my^n$

⑧若

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{\partial N}{\partial x} \end{cases}$$

则 $\mu(x,y)=\frac{1}{M^2+N^2}$

⑨若$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=Mf_1(y)-Nf_2(x)$,则原方程具有形如 $m(x)n(y)$的积分因子

(10) 黎卡堤方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^2+q(x)y+r(x),$$

式中 $p(x)\neq0,r(x)\neq0$

解法 若已知方程的一个特解 $y=y_1(x)$,作变换

$$y=y_1(x)+\frac{1}{u}$$

可将原方程化为未知函数 u 的线性方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+(q(x)+2p(x)y_1)u=-p(x)$$

或用变换

$$y=y_1(x)+u$$

化为伯努利方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(q(x)+2p(x)y_1)u=p(x)u^2$$

后再行求解。

(11) 奇解及其求法

微分方程 $F(x,y,y')=0$ 的一族积分曲线(通解)的包络,称为这个微分方程的奇解。奇解是方程的解,同时过奇解上每一点都不止有一条积分曲线,即在奇解上的每一点,方程的解不是唯一的。

①c—判别曲线法

设已知一阶方程 $F(x,y,y')=0$ 的通解为 $g(x,y,c)=0$,其中 c 是任意常数。在把 c 看作参数,则从方程组

$$\begin{cases} g(x,y,c)=0 \\ \frac{\partial g}{\partial c}=0 \end{cases}$$

中消去 c 而得出的所有曲线,均称为曲线族 $g(x,y,c)=0$ 的 c-判别曲线,其中也包含着它的包络。但应注意 c-判别曲线不一定都是曲线族的包络,其中究竟哪一条是包络尚须代入原方程进行检验,若是原方程的解,则是奇解(即是 $g(x,y,c)=0$ 的包络),否则就不是奇解。

②p-判别曲线法

对于一阶方程 $F(x,y,p)=0$,若令 $y'=p$,则方程的奇解必包含在对方程组

$$\begin{cases} F(x,y,p)=0 \\ \frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=0 \end{cases}$$

消去 p 后所得的曲线(称为 p-判别曲线)中,关于 p-判别曲线是否为奇解,也需作实际检验,若它是原方程的解且在每一点都违反唯一性则是奇解,否则就不是奇解。

3.2 二阶方程

在一般的二阶常微分方程 $F(x,y,y',y'')=0$ 中,设可就最高阶导数解出,则方程成为

$$y''=f(x,y,y')$$

(1) 右端不显含 y 的方程

①$y''=g(x)$

解 $y=\int\left[\int g(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x+c_1x+c_2$

②$y''=g(y')$

解法 令 $y'=p$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，代入原方程解出 p，再从 $y'=p$ 解得 y

③$y''=g(x,y')$

解法 同②

(2) 右端不显含 x 的方程

①$y''=g(y)$

解 $x=\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{c_1+2\int g(y)\mathrm{d}y}}+c_2$

②$y''=g(y,y')$

解法 令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$代入方程即可求解

(3) 常系数线性方程

$y''+py'+qy=r(x)$，式中 p,q 是常数

解法 见 3.3(1)，(2)。

(4) 变系数线性齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

解法 若已知 y_1 是一个特解，则另一与之线性无关的特解 y_2 可求出，为

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int P\mathrm{d}x}}{y_1^2}\mathrm{d}x$$

而方程的通解为

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

(5) 变系数线性非齐次方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=r(x)$$

解法 若已知对应齐次方程两个线性无关的解 y_1、y_2，则可写出对应齐次(homogeneous)方程的通解

$$y_h(x)=c_1y_1+c_2y_2\qquad c_1,c_2\ \text{是常数}$$

以及方程的一个特(particular)解 $y_p(x)=v_1y_1+v_2y_2$，式中的函数 v_1 及 v_2 由下列方程组

$$\begin{cases}v'_1y_1+v'_2y_2=0\\ v'_1y'_1+v'_2y'_2=r(x)\end{cases}$$

确定，即

$$v'_1=\frac{-y_2r(x)}{y_1y'_2-y_2y'_1},\quad v'_2=\frac{y_1r(x)}{y_1y'_2-y_2y'_1}$$

而方程的通解为

$$y=y_p+y_h$$

(6) 其他可积方程

①$y''=f(ax+by)$

解法 令 $ax+by=u$，方程化成 $u''=bf(u)$

②$y''+P(x)y'+Q(x)(y')^2=0$

解法 可看作(1)，解得

$$y=\int e^{-\int P\mathrm{d}x}\left(\int Q^{-\int P\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c_1\right)^{-1}\mathrm{d}x+c_2$$

③$y''+P(y)y'+Q(y)(y')^2=0$

解法 可看作(2)，解得

$$x=\int e^{\int Q\mathrm{d}y}\left(-\int Pe^{\int Q\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+c_1\right)^{-1}\mathrm{d}y+c_2$$

④$y''+P(y)(y')^2+Q(y)=0$

解法 可看作(2)，解得

$$x=\int e^{\int P\mathrm{d}y}\left(-2\int Qe^{2\int P\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+c_1\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y+c_2$$

⑤$y''+P(x)y'+Q(y)(y')^2=0$

解法 令 $y'=\frac{u}{v}$，代入后再令 $v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+P(x)uv=0$，可得

$$\int e^{\int Q\mathrm{d}y}\mathrm{d}y=c_1\int e^{-\int P\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c_2$$

⑥$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$

解法 令 $x=\sin t$，方程被化成

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+n^2y=0$$

3.3 常系数线性方程

(1) 二阶齐次方程

$y''+py'+qy=0$，式中 p、q 为常数，特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根为 λ_1、λ_2

①实根 $\lambda_1\neq\lambda_2$，方程的通解为

$$y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$$

②实根 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$,方程的通解为

$$y=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}$$

③复根 $\lambda_1=a+bi,\lambda_2=a-bi$,方程的通解为

$$y=e^{ax}(c_1\cos bx+c_2\sin bx)$$

(2) 二阶非齐次方程

$y''+py'+qy=r(x)$,式中 p、q 为常数。

设 y_p 表示方程的某个特解(特积分),λ_1、λ_2 为其对应齐次方程之特征方程的根,$y_h(x)$是对应齐次方程的通解,则方程的通解为

$$y=y_p+y_h$$

求方程特解 $y_p(x)$的方法有

①待定系数法

对特殊形式的右端项 $r(x)$,可将特解 $y_p(x)$的待定表达式及其相应的各阶导数代入原微分方程,比较各同类项的系数,即可确定 $y_p(x)$待定表达式中各系数之值而得特解 $y_p(x)$,部分情况下特解的待定表达式见下表:

$r(x)$的形式	$y_p(x)$带待定系数的形式
$P_n(x)$(n次多项式)	$Q_n(x)$(带待定系数的 n 次多项式), 当 $q\neq0$ $xQ_n(x)$ 当 $q=0$
$ke^{\alpha x}$	$\dfrac{k}{\alpha^2+p\alpha+q}e^{\alpha x}$,当 $\alpha\neq\lambda_1$、λ_2 $\dfrac{k}{2\alpha+p}xe^{\alpha x}$,当 $\alpha=\lambda_1\neq\lambda_2$ $\dfrac{k}{2}x^2e^{\alpha x}$,当 $\alpha=\lambda_1=\lambda_2$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$Q_n(x)e^{\alpha x}$,当 $\alpha\neq\lambda_1$、λ_2 $xQ_n(x)e^{\alpha x}$,当 $\alpha=\lambda_1\neq\lambda_2$ $x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$,当 $\alpha=\lambda_1=\lambda_2$
$e^{\alpha x}(k\cos\beta x+l\sin\beta x)$	$e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$, 当 $\alpha\pm i\beta\neq\lambda_1$ 或 λ_2 $xe^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$, 当 $\alpha\pm i\beta=\lambda_1$ 或 λ_2 式中 A、B 是待定常数

②常数变易法

同 3.2(5)求 $y_p(x)$的方法。

(3) 高阶方程

对三阶以上的常系数线性齐次及非齐次方程,其解法均只是以上(1)、(2)中解法的推广。

(4) 拉普拉斯变换的应用

常系数线性常微分方程的初值问题,可用拉普拉斯变换方便地求解。

例 求满足 $y''-3y'+2y=2e^{-x}$,$y(0)=2$,$y'(0)=-1$ 的解。

解 对方程两边作拉普拉斯变换,并记$\bar{y}(s)=\mathcal{L}[y(x)]$,得

$$[s^2\bar{y}-sy(0)-y'(0)]-3[s\bar{y}-y(0)]+2\bar{y}$$
$$=\frac{2}{s+1}$$

代入初始条件后可解得

$$\bar{y}(s)=\frac{2s^2-5s-5}{(s+1)(s-1)(s-2)}$$
$$=\frac{1}{3(s+1)}+\frac{4}{s-1}-\frac{7}{3(s-2)}$$

求逆拉普拉斯变换,得到初值问题的解

$$y(x)=\frac{1}{3}e^{-x}+4e^x-\frac{7}{3}e^{2x}$$

(5) 欧拉方程

$$x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+p_2x^{n-2}y^{(n-2)}+\cdots$$
$$+p_{n-1}xy'+p_ny=r(x)$$

式中 p_1、p_2、$\cdots p_n$ 都是常数,作自变量代换 $x=e^t$ 即 $t=\ln x$,可化成常系数线性微分方程。

3.4 对称形微分方程组

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}$$

解法

(1) 若 P、Q 中均不含 z,则可先解

$$\frac{dx}{P(x,y)}=\frac{dy}{Q(x,y)}$$

再将结果代入另一等式去求解,这样可得两个独立的通解

(2) 选定适当常数 l、m、n,利用公式

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\frac{l\,dx+m\,dy+n\,dz}{lP+mQ+nR}$$

再继续求解。

例 求解方程组

$$\begin{cases}(z-y)^2\dfrac{dy}{dx}=z\\[2ex](z-y)^2\dfrac{dz}{dx}=y\end{cases}$$

解 把方程改写成对称形式

$$\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}$$

从后一等式，给出

$$ydy-zdz=0$$

而得首次积分 $y^2-z^2=c_1$

其次，把两个关系式，按分子分母相减得

$$\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dy-dz}{z-y} \quad 即 \quad dx+(z-y)d(z-y)=0$$

而得另一首次积分

$$2x+(z-y)^2=c_2$$

解毕。但由于过程中曾以$(y-z)^2$去除，故失去了依赖于一个参数的一族解 $x=c, y=z$，当然，如果认定 x 为自变量，这些解是不存在的。

4 特殊函数

4.1 伽马函数（Γ 函数）

(1) 定义

①定义

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \quad (x>0)$$

右端的表达式称为第二类欧拉积分。

②扩充 利用下面的公式，对 $x<0$ 但非为整数时，定义

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

(2) 常用公式

①$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)(x>0)$（递推公式）

②$\Gamma(1)=1$，由①并可得

$$\Gamma(n+1)=n! \quad (n \text{ 为正整数})$$

特别有 $\Gamma(2)=1$。

③$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$（余元公式）

特别有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right)=\frac{\pi}{\cos\pi x}$$

④$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)$

（倍元公式）

(3) 其他结果

①$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\dfrac{1}{m}\right)\Gamma\left(x+\dfrac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(x+\dfrac{m-1}{m}\right)$

$=m^{\frac{1}{2}-mx}(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(mx)(m=2,3,\cdots)$（高斯乘法定理）

显然，倍元公式是其 $m=2$ 的特例。

②斯特林公式（渐近级数）

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}x^xe^{-x}\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}-\frac{571}{2488320x^4}+\cdots\right)$$

特别：当正整数 $n\to\infty$ 时，有

$$n! \approx \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$$

③$\Gamma'(1)=\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\ln t dt=-\gamma$

式中的 γ 为欧拉常数，

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$
$$=0.577215664901532\cdots$$

④$\dfrac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}-\gamma$

4.2 贝塔函数（β 函数）

(1) 定义

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \quad (p>0, q>0)$$

右端的表达式称为第一类欧拉积分。

(2) 常用公式

①$B(p,q)=B(q,p)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

（与 Γ 函数的关系）

②$B(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$

$(p>0, q>1)$（递推关系）

(3) 其他结果

①$\frac{p+q}{q}B(p,q+1)=\frac{p+q}{p}B(p+1,q)$
$=B(p,q)=B(p+1,q)+B(p,q+1)$

②$B(p,q)B(p+q,r)=B(q,r)B(q+r,p)$
$=B(r,p)B(r+p,q)$

③$B(p,p)=2^{1-2p}B\left(p,\frac{1}{2}\right)$

④$\frac{1}{B(n,m)}=m\binom{n+m-1}{n-1}=n\binom{n+m-1}{m-1}$

（m、n为正整数）

式中$\binom{\alpha}{k}=\frac{(\alpha)_k}{k!}$，$(\alpha)_k=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$

$=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k)}$

4.3 贝塞尔函数

（1）表达式

①第一类贝塞尔函数

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}$$

②第二类贝塞尔函数（诺依曼函数）

$$Y_\nu(x)=\frac{1}{\sin\nu\pi}[J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)]$$

$$Y_n(x)=\lim_{\nu\to n}Y_\nu(x)$$

上两式中ν不是整数，n是整数。

③第三类贝塞尔函数（汉克尔函数）

$$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iY_\nu(x)$$

$$H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iY_\nu(x)\quad(i=\sqrt{-1})$$

（2）性质

设ν为任意的常数而n是整数

①所有这三类ν阶贝塞尔函数都是ν阶贝塞尔方程

$$x^2y''+xy''+(x^2-\nu^2)y=0$$

的解。

②线性相关

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$$

$$Y_{-n}(x)=(-1)^nY_n(x)$$

③线性无关

$J_\nu(x)$，$Y_\nu(x)$，$H_\nu^{(1)}(x)$，$H_\nu^{(2)}(x)$两两线性无关，在ν非为整数时，$J_\nu(x)$与$J_{-\nu}(x)$从而$Y_\nu(x)$与$Y_{-\nu}(x)$也线性无关。

（3）递推关系

①关于$J_\nu(x)$，有

$$J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\nu J_\nu(x))=x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\nu}J_\nu(x))=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$$

从而容易推得

$$xJ'_\nu(x)+\nu J_\nu(x)=xJ_{\nu-1}(x)$$

$$xJ'_\nu(x)-\nu J_\nu(x)=-xJ_{\nu+1}(x)$$

以及，特别地有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_0(x)=-J_1(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xJ_1(x))=xJ_0(x)$$

②关于$Y_\nu(x)$，也有

$$Y_{\nu-1}(x)+Y_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}Y_\nu(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\nu Y_\nu(x))=x^\nu Y_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\nu}Y_\nu(x))=-x^{-\nu}Y_{\nu+1}(x)$$

③关于$H_\nu^j(x)$也成立类似的关系，分别对$j=1$或2有

$$H_{\nu-1}^j(x)+H_{\nu+1}^j(x)=\frac{2\nu}{x}H_\nu^{(j)}(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\nu H_\nu^j(x))=x^\nu H_{\nu-1}^j(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-\nu}H_\nu^{(j)}(x))=-x^{-\nu}H_{\nu+1}^{(j)}(x)$$

4.4 勒让德多项式

（1）表达式

①微分表示式

$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((x^2-1)^n)$（罗德里格公式）

②积分表示式

$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\theta)^n\mathrm{d}\theta$（希里夫利公式）

③多项式表示

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^nk!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

式中$\left[\frac{n}{2}\right]$表示不超过$\frac{n}{2}$的最大整数。