

附录二 化工常用数学方法

主稿人 谢国瑞 华东理工大学 教授

1 行列式	附录 2-3	(2) 右端不显含 x 的方程	附录 2-11
1.1 二阶行列式	附录 2-3	(3) 常系数线性方程	附录 2-11
1.2 三阶行列式	附录 2-3	(4) 变系数线性齐次方程	附录 2-11
(1) 定义	附录 2-3	(5) 变系数线性非齐次方程	附录 2-11
(2) 性质	附录 2-3	(6) 其他可积方程	附录 2-11
1.3 高阶行列式	附录 2-4	3.3 常系数线性方程	附录 2-11
(1) n 阶行列式	附录 2-4	(1) 二阶齐次方程	附录 2-11
(2) 范德蒙行列式	附录 2-4	(2) 二阶非齐次方程	附录 2-12
2 傅里叶级数及积分变换	附录 2-4	(3) 高阶方程	附录 2-12
2.1 傅里叶级数	附录 2-4	(4) 拉普拉斯变换的应用	附录 2-12
(1) 定义	附录 2-4	(5) 欧拉方程	附录 2-12
(2) 收敛性	附录 2-4	3.4 对称形微分方程组	附录 2-12
2.2 拉普拉斯变换	附录 2-5	4 特殊函数	附录 2-13
(1) 定义	附录 2-5	4.1 伽马函数 (Γ 函数)	附录 2-13
(2) 主要性质	附录 2-5	(1) 定义	附录 2-13
(3) 简表	附录 2-6	(2) 常用公式	附录 2-13
2.3 傅里叶变换	附录 2-6	(3) 其他结果	附录 2-13
(1) 定义	附录 2-6	4.2 贝塔函数 (β 函数)	附录 2-13
(2) 主要性质	附录 2-7	(1) 定义	附录 2-13
(3) 简表	附录 2-7	(2) 常用公式	附录 2-13
3 常微分方程	附录 2-8	(3) 其他结果	附录 2-13
3.1 一阶方程	附录 2-8	4.3 贝塞尔函数	附录 2-14
(1) 变量可分离方程	附录 2-8	(1) 表达式	附录 2-14
(2) 齐次方程	附录 2-8	(2) 性质	附录 2-14
(3) 线性方程	附录 2-9	(3) 递推关系	附录 2-14
(4) 全 (恰当) 微分方程	附录 2-9	4.4 勒让德多项式	附录 2-14
(5) 可将 y 解出的方程	附录 2-9	(1) 表达式	附录 2-14
(6) 可将 x 解出的方程	附录 2-9	(2) 性质	附录 2-15
(7) 不显含 y 的方程	附录 2-9	(3) 递推关系与导数公式	附录 2-15
(8) 不显含 x 的方程	附录 2-9	5 向量 (矢量) 计算	附录 2-15
(9) 积分因子	附录 2-10	5.1 向量代数	附录 2-15
(10) 黎卡堤方程	附录 2-10	(1) 向量的基本公式	附录 2-15
(11) 奇解及其求法	附录 2-10	(2) 线性运算, 线性相关	附录 2-16
3.2 二阶方程	附录 2-10	(3) 数量积 (内积, 点积)	附录 2-16
(1) 右端不显含 y 的方程	附录 2-11	(4) 向量积 (外积, 叉积)	附录 2-17

附录2-2

(5) 三向量混合积	附录 2-17	(2) 线性运算	附录 2-25
(6) 三重向量积	附录 2-17	(3) 线性相关与线性无关	附录 2-25
(7) 几个公式	附录 2-17	(4) 极大线性无关子集	附录 2-26
5.2 向量微分	附录 2-17	(5) 矩阵的秩	附录 2-26
(1) 一般微分法公式	附录 2-17	(6) 正交性	附录 2-26
(2) 向径形式函数的求导公式	附录 2-18	8.3 矩阵运算	附录 2-26
(3) 向量函数的几个常用性质	附录 2-18	(1) 矩阵代数	附录 2-26
5.3 向量积分	附录 2-18	(2) 初等变换与初等矩阵	附录 2-28
(1) 不定积分	附录 2-18	(3) 矩阵微积分	附录 2-28
(2) 定积分	附录 2-18	(4) 特殊矩阵	附录 2-29
(3) 平面面积向量	附录 2-18	(5) 相似变换、正交变换	附录 2-30
6 场论	附录 2-18	(6) 逆矩阵	附录 2-30
6.1 梯度	附录 2-18	(7) 特征值、特征向量	附录 2-30
(1) 数量场的梯度	附录 2-18	8.4 线性代数方程组	附录 2-31
(2) 运算性质	附录 2-18	(1) $n \times n$ 方程组	附录 2-31
(3) 方向导数	附录 2-18	(2) $m \times n$ 方程组	附录 2-32
(4) 特性	附录 2-19	8.5 二次形式	附录 2-32
6.2 旋度、散度	附录 2-19	(1) 二次形式与实对称矩阵	附录 2-32
(1) 向量场的旋度	附录 2-19	(2) 化二次形式为标准形	附录 2-33
(2) 旋度运算性质	附录 2-19	(3) 同时化两个二次形式成标准形	附录 2-33
(3) 向量场的散度	附录 2-19	(4) 正定二次形式	附录 2-33
(4) 散度运算性质	附录 2-19	9 数值计算方法	附录 2-33
(5) 混合运算	附录 2-19	9.1 误差	附录 2-33
6.3 特殊向量场	附录 2-19	(1) 误差与有效数字	附录 2-33
(1) 有势场	附录 2-19	(2) 近似数的算术运算法则	附录 2-34
(2) 无源场	附录 2-19	(3) 数值计算中的若干注意事项	附录 2-34
(3) 调和场	附录 2-19	9.2 解线性代数方程组的直接法	附录 2-34
6.4 正交曲线坐标	附录 2-20	(1) 高斯消元法	附录 2-34
6.5 积分定理	附录 2-20	(2) 主元素法	附录 2-34
(1) 散度定理及有关定理	附录 2-20	(3) 解三对角线性方程组的追赶法	附录 2-35
(2) 斯托克斯定理	附录 2-21	(4) 解对称正定线性方程组的乔莱斯基法	附录 2-35
7 偏微分方程	附录 2-21	9.3 非线性方程的数值解法	附录 2-36
7.1 一阶方程	附录 2-21	(1) 弦位法	附录 2-36
(1) 线性方程	附录 2-21	(2) 切线法 (牛顿法)	附录 2-36
(2) 拟线性方程	附录 2-22	(3) 牛顿-拉夫逊法	附录 2-36
(3) 特殊类型非线性方程的全积分	附录 2-22	(4) 解非线性方程组的其他方法	附录 2-36
7.2 数学物理方程	附录 2-22	9.4 插值与拟合	附录 2-37
(1) 波动方程	附录 2-22	(1) 拉格朗日插值公式	附录 2-37
(2) 拉普拉斯方程 (调和方程)	附录 2-23	(2) 三次样条插值公式	附录 2-37
(3) 热传导方程 (扩散方程)	附录 2-24	(3) 曲线拟合的最小二乘法	附录 2-37
8 矩阵、线性代数方程组	附录 2-25	(4) 用正交函数作最小二乘拟合	附录 2-38
8.1 矩阵及其秩	附录 2-25	9.5 数值微积分	附录 2-38
(1) 矩阵	附录 2-25	(1) 用三次样条函数求数值导数	附录 2-38
(2) 行列式	附录 2-25	(2) 数值积分	附录 2-38
(3) 矩阵的秩	附录 2-25	9.6 常微分方程数值解法 (初值问题)	附录 2-39
8.2 n 维向量	附录 2-25		
(1) n 维向量	附录 2-25		

(1) 一阶方程	附录 2-39
(2) 一阶方程组	附录 2-39
(3) 二阶方程	附录 2-40
9.7 边值问题的数值解	附录 2-40
(1) 差分法	附录 2-40
(2) 拟线性化法 (广义牛顿-拉夫逊法)	附录 2-41
(3) 近似函数法	附录 2-41
10 最优化方法	附录 2-42
10.1 线性规划	附录 2-42
(1) 线性规划的标准形式	附录 2-42
(2) 单纯形法	附录 2-42
(3) 对偶单纯形法	附录 2-45

10.2 无约束最优化方法	附录 2-46
(1) 一维搜索方法	附录 2-46
(2) 最优梯度法	附录 2-48
(3) 牛顿法	附录 2-48
(4) 共轭梯度法	附录 2-48
(5) 拟牛顿法	附录 2-48
(6) 非线性最小二乘法	附录 2-49
(7) 单纯形调优法	附录 2-50
10.3 约束最优化方法	附录 2-50
(1) 变量变换	附录 2-50
(2) 罚函数法 (外点法)	附录 2-50
(3) 障碍函数法 (内点法)	附录 2-51
参考文献	附录 2-51

1 行列式

1.1 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

1.2 三阶行列式

(1) 定义

①

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

② 对角线展开

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{实线上三数} \\ \text{之积前加正号} \\ + a_1 b_2 c_3 \\ + a_2 b_3 c_1 \\ + a_3 b_1 c_2 \\ \text{虚线上三数} \\ \text{之积前加负号} \\ - a_1 b_3 c_2 \\ - a_2 b_1 c_3 \\ - a_3 b_2 c_1 \end{array}$$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

③ 按某行 (或列) 展开

三阶行列式按行 (或列) 的展开式共有 6 种, 例如按第 2 行展开, 有

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

上式右端各项前所加的符号取“正号”或“负号”, 是根据该项因子的单个元素在左端行列式中所处的位置决定, 其对应关系如下表:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

(2) 性质

① 依次序将各行换成列, 行列式的值不变, 即有

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

② 两行 (或列) 对调, 行列式的值变号, 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

推论: 若两行 (或列) 元素相同, 则行列式的值为零。

例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

③ 某一行 (或列) 所有元素均乘同一个数 k , 所得行列式的值为原行列式之值的 k 倍, 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

附录二 化工常用数学方法

主稿人 谢国瑞 华东理工大学 教授

1 行列式	附录 2-3	(2) 右端不显含 x 的方程	附录 2-11
1.1 二阶行列式	附录 2-3	(3) 常系数线性方程	附录 2-11
1.2 三阶行列式	附录 2-3	(4) 变系数线性齐次方程	附录 2-11
(1) 定义	附录 2-3	(5) 变系数线性非齐次方程	附录 2-11
(2) 性质	附录 2-3	(6) 其他可积方程	附录 2-11
1.3 高阶行列式	附录 2-4	3.3 常系数线性方程	附录 2-11
(1) n 阶行列式	附录 2-4	(1) 二阶齐次方程	附录 2-11
(2) 范德蒙行列式	附录 2-4	(2) 二阶非齐次方程	附录 2-12
2 傅里叶级数及积分变换	附录 2-4	(3) 高阶方程	附录 2-12
2.1 傅里叶级数	附录 2-4	(4) 拉普拉斯变换的应用	附录 2-12
(1) 定义	附录 2-4	(5) 欧拉方程	附录 2-12
(2) 收敛性	附录 2-4	3.4 对称形微分方程组	附录 2-12
2.2 拉普拉斯变换	附录 2-5	4 特殊函数	附录 2-13
(1) 定义	附录 2-5	4.1 伽马函数 (Γ 函数)	附录 2-13
(2) 主要性质	附录 2-5	(1) 定义	附录 2-13
(3) 简表	附录 2-6	(2) 常用公式	附录 2-13
2.3 傅里叶变换	附录 2-6	(3) 其他结果	附录 2-13
(1) 定义	附录 2-6	4.2 贝塔函数 (β 函数)	附录 2-13
(2) 主要性质	附录 2-7	(1) 定义	附录 2-13
(3) 简表	附录 2-7	(2) 常用公式	附录 2-13
3 常微分方程	附录 2-8	(3) 其他结果	附录 2-13
3.1 一阶方程	附录 2-8	4.3 贝塞尔函数	附录 2-14
(1) 变量可分离方程	附录 2-8	(1) 表达式	附录 2-14
(2) 齐次方程	附录 2-8	(2) 性质	附录 2-14
(3) 线性方程	附录 2-9	(3) 递推关系	附录 2-14
(4) 全 (恰当) 微分方程	附录 2-9	4.4 勒让德多项式	附录 2-14
(5) 可将 y 解出的方程	附录 2-9	(1) 表达式	附录 2-14
(6) 可将 x 解出的方程	附录 2-9	(2) 性质	附录 2-15
(7) 不显含 y 的方程	附录 2-9	(3) 递推关系与导数公式	附录 2-15
(8) 不显含 x 的方程	附录 2-9	5 向量 (矢量) 计算	附录 2-15
(9) 积分因子	附录 2-10	5.1 向量代数	附录 2-15
(10) 黎卡堤方程	附录 2-10	(1) 向量的基本公式	附录 2-15
(11) 奇解及其求法	附录 2-10	(2) 线性运算, 线性相关	附录 2-16
3.2 二阶方程	附录 2-10	(3) 数量积 (内积, 点积)	附录 2-16
(1) 右端不显含 y 的方程	附录 2-11	(4) 向量积 (外积, 叉积)	附录 2-17

附录2-2

(5) 三向量混合积	附录 2-17	(2) 线性运算	附录 2-25
(6) 三重向量积	附录 2-17	(3) 线性相关与线性无关	附录 2-25
(7) 几个公式	附录 2-17	(4) 极大线性无关子集	附录 2-26
5.2 向量微分	附录 2-17	(5) 矩阵的秩	附录 2-26
(1) 一般微分公式	附录 2-17	(6) 正交性	附录 2-26
(2) 向径形式函数的求导公式	附录 2-18	8.3 矩阵运算	附录 2-26
(3) 向量函数的几个常用性质	附录 2-18	(1) 矩阵代数	附录 2-26
5.3 向量积分	附录 2-18	(2) 初等变换与初等矩阵	附录 2-28
(1) 不定积分	附录 2-18	(3) 矩阵微积分	附录 2-28
(2) 定积分	附录 2-18	(4) 特殊矩阵	附录 2-29
(3) 平面面积向量	附录 2-18	(5) 相似变换、正交变换	附录 2-30
6 场论	附录 2-18	(6) 逆矩阵	附录 2-30
6.1 梯度	附录 2-18	(7) 特征值、特征向量	附录 2-30
(1) 数量场的梯度	附录 2-18	8.4 线性代数方程组	附录 2-31
(2) 运算性质	附录 2-18	(1) $n \times n$ 方程组	附录 2-31
(3) 方向导数	附录 2-18	(2) $m \times n$ 方程组	附录 2-32
(4) 特性	附录 2-19	8.5 二次形式	附录 2-32
6.2 旋度、散度	附录 2-19	(1) 二次形式与实对称矩阵	附录 2-32
(1) 向量场的旋度	附录 2-19	(2) 化二次形式为标准形	附录 2-33
(2) 旋度运算性质	附录 2-19	(3) 同时化两个二次形式成标准形	附录 2-33
(3) 向量场的散度	附录 2-19	(4) 正定二次形式	附录 2-33
(4) 散度运算性质	附录 2-19	9 数值计算方法	附录 2-33
(5) 混合运算	附录 2-19	9.1 误差	附录 2-33
6.3 特殊向量场	附录 2-19	(1) 误差与有效数字	附录 2-33
(1) 有势场	附录 2-19	(2) 近似数的算术运算法则	附录 2-34
(2) 无源场	附录 2-19	(3) 数值计算中的若干注意事项	附录 2-34
(3) 调和场	附录 2-19	9.2 解线性代数方程组的直接法	附录 2-34
6.4 正交曲线坐标	附录 2-20	(1) 高斯消元法	附录 2-34
6.5 积分定理	附录 2-20	(2) 主元素法	附录 2-34
(1) 散度定理及有关定理	附录 2-20	(3) 解三对角线性方程组的追赶法	附录 2-35
(2) 斯托克斯定理	附录 2-21	(4) 解对称正定线性方程组的乔莱斯基法	附录 2-35
7 偏微分方程	附录 2-21	9.3 非线性方程的数值解法	附录 2-36
7.1 一阶方程	附录 2-21	(1) 弦位法	附录 2-36
(1) 线性方程	附录 2-21	(2) 切线法 (牛顿法)	附录 2-36
(2) 拟线性方程	附录 2-22	(3) 牛顿-拉夫逊法	附录 2-36
(3) 特殊类型非线性方程的全积分	附录 2-22	(4) 解非线性方程组的其他方法	附录 2-36
7.2 数学物理方程	附录 2-22	9.4 插值与拟合	附录 2-37
(1) 波动方程	附录 2-22	(1) 拉格朗日插值公式	附录 2-37
(2) 拉普拉斯方程 (调和方程)	附录 2-23	(2) 三次样条插值公式	附录 2-37
(3) 热传导方程 (扩散方程)	附录 2-24	(3) 曲线拟合的最小二乘法	附录 2-37
8 矩阵、线性代数方程组	附录 2-25	(4) 用正交函数作最小二乘拟合	附录 2-38
8.1 矩阵及其秩	附录 2-25	9.5 数值微积分	附录 2-38
(1) 矩阵	附录 2-25	(1) 用三次样条函数求数值导数	附录 2-38
(2) 行列式	附录 2-25	(2) 数值积分	附录 2-38
(3) 矩阵的秩	附录 2-25	9.6 常微分方程数值解法 (初值问题)	附录 2-39
8.2 n 维向量	附录 2-25		
(1) n 维向量	附录 2-25		

(1) 一阶方程	附录 2-39
(2) 一阶方程组	附录 2-39
(3) 二阶方程	附录 2-40
9.7 边值问题的数值解	附录 2-40
(1) 差分法	附录 2-40
(2) 拟线性化法 (广义牛顿-拉夫逊法)	附录 2-41
(3) 近似函数法	附录 2-41
10 最优化方法	附录 2-42
10.1 线性规划	附录 2-42
(1) 线性规划的标准形式	附录 2-42
(2) 单纯形法	附录 2-42
(3) 对偶单纯形法	附录 2-45

10.2 无约束最优化方法	附录 2-46
(1) 一维搜索方法	附录 2-46
(2) 最优梯度法	附录 2-48
(3) 牛顿法	附录 2-48
(4) 共轭梯度法	附录 2-48
(5) 拟牛顿法	附录 2-48
(6) 非线性最小二乘法	附录 2-49
(7) 单纯形调优法	附录 2-50
10.3 约束最优化方法	附录 2-50
(1) 变量变换	附录 2-50
(2) 罚函数法 (外点法)	附录 2-50
(3) 障碍函数法 (内点法)	附录 2-51
参考文献	附录 2-51

1 行列式

1.1 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

1.2 三阶行列式

(1) 定义

①

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

② 对角线展开

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{实线上三数} \\ \text{之积前加正号} \\ + a_1 b_2 c_3 \\ + a_2 b_3 c_1 \\ + a_3 b_1 c_2 \\ \text{虚线上三数} \\ \text{之积前加负号} \\ - a_1 b_3 c_2 \\ - a_2 b_1 c_3 \\ - a_3 b_2 c_1 \end{array}$$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

③ 按某行 (或列) 展开

三阶行列式按行 (或列) 的展开式共有 6 种, 例如按第 2 行展开, 有

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

上式右端各项前所加的符号取“正号”或“负号”, 是根据该项因子的单个元素在左端行列式中所处的位置决定, 其对应关系如下表:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

(2) 性质

① 依次序将各行换成列, 行列式的值不变, 即有

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

② 两行 (或列) 对调, 行列式的值变号, 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

推论: 若两行 (或列) 元素相同, 则行列式的值为零。

例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

③ 某一行 (或列) 所有元素均乘同一个数 k , 所得行列式的值为原行列式之值的 k 倍, 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

推论: 若有两行(或列)的元素对应成比例, 则行列式的值为零, 例如

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} kc_1 & b_1 & c_1 \\ kc_2 & b_2 & c_2 \\ kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

④若某一行(或列)的每个元素都可看成二项之和, 则该行(列)式可写作两个行列式之和, 例如

$$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

推论: 将某一行(或列)所有元素均乘以同一数后加到另一行(或列)的对应元素上, 行列式的值不变, 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+kc_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+kc_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+kc_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

1.3 高阶行列式

(1) n 阶行列式

四阶和更高阶数的行列式, 称为高阶行列式, 三阶行列式之按某行(或列)展开的方法对高阶行列式也是适用的。例如, 对 n 阶行列式按第 1 行展开, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

三阶行列式的性质, 对高阶行列式也成立。

(2) 范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

2 傅里叶级数及积分变换

2.1 傅里叶级数

(1) 定义

①设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数, 且在 $[-l, l]$ 上绝对可积, 则称三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right)$$

为 $f(x)$ 的傅里叶级数, 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

②在以上①的条件下, 如果 $f(x)$ 还是奇函数, 则

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

在以上①的条件下, 如果 $f(x)$ 还是偶函数, 则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l}x$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

(2) 收敛性

若以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$, 在区间 $[-l, l]$ 上至多只有有限个第一类间断点及极值点, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数必收敛, 且在 $[-l, l]$ 上有

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right)$$

多只有有限个第一类间断点外处处连续。

③存在常数 M 及 $\alpha \geq 0$ (称 α 为 $f(t)$ 的增长指数), 使 $t > 0$ 时成立 $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, 则下列一对公式成立

$$= \begin{cases} f(x) & x \text{ 是 } (-l, l) \text{ 内 } f(x) \text{ 的连续点} \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} & x \text{ 是 } (-l, l) \text{ 内 } f(x) \text{ 的间断点} \\ \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2} & x = \pm l \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{st} ds = f(t) \quad (c = \operatorname{Re} s > \alpha)$$

这时, 称 $f(x)$ 的傅里叶级数为 $f(x)$ 的傅里叶展开, 有时并记为: (尽管这个级数的和, 在有限个点处可能并不等于 $f(x)$)

此时, 称 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换(象函数), 记为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

2.2 拉普拉斯变换

称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的(逆或)反拉普拉斯变换(象原函数), 记为

(1) 定义

设函数 $f(t)$ 满足

① $t < 0$ 时, $f(t) = 0$

② $t \geq 0$ 时, $f(t)$ 在任一有限区间上分段单调且除至

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

(2) 主要性质

设 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$, 则

编号	运 算	象原函数	相应的象函数的关系
1	线性(a, b 是常数)	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
2a	微分 ...若对一切 $t > 0$, $f'(t)$ 存在	$f'(t)$	$sF(s) - f(0+0)$
2b	...若对一切 $t > 0$, $f^{(r)}(t)$ 存在	$f^{(r)}(t) (r=1, 2, \dots)$	$s^r F(s) - s^{r-1} f(0+0) - s^{r-2} f'(0+0) - \dots - f^{(r-1)}(0+0)$
2c	...若对一切 $t > 0$, $f(t)$ 有界, 又在 $t=t_1, t_2, \dots$ 处 $f(t)$ 有单侧极限, 以及 $f'(t)$ 除这些点外, 在 $t > 0$ 时存在	$f'(t)$	$sF(s) - f(0+0) - \sum_k e^{-t_k s} [f(t_k+0) - f(t_k-0)]$
3	积分	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
4	尺度变换 (相似定理)	$f(at) (a > 0)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
5	平移(或延迟)	$f(t-b) (b > 0)$	$e^{-bs} F(s)$
6	卷积 (或褶积)	$f(t) * g(t) \stackrel{\Delta}{=} \int_0^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$ $\stackrel{\Delta}{=} g(t) * f(t)$	$F(s)G(s)$
7	极限 (a 与 t, s 无关)	$\lim_{a \rightarrow a_0} f(t, a)$	$\lim_{a \rightarrow a_0} F(s, a)$
8a	关于参量 a (与 t, s 无关) 的微分和积分	$\frac{\partial}{\partial a} f(t, a)$	$\frac{\partial}{\partial a} F(s, a)$
8b		$\int_{a_1}^{a_2} f(t, a) da$	$\int_{a_1}^{a_2} F(s, a) da$
9a	对拉普拉斯变换的微分	$-tf(t)$	$\frac{d}{ds} F(s)$
9b		$(-1)^r t^r f(t)$	$\frac{d^r}{ds^r} F(s)$
10	对拉普拉斯变换的积分	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^{\infty} F(s) ds$
11	平移	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$

(3) 简表

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds \quad F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{s} \sqrt{\frac{a}{s}} e^{-\frac{a}{s}}$
$t^m (m > -1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{a}{s}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{erf}(at) (a > 0)$	$\frac{1}{s} e^{\frac{a^2}{4s}} \operatorname{erfc}\left(\frac{s}{2a}\right)$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\operatorname{erf}(a\sqrt{t}) (a > 0)$	$\frac{a}{s} \sqrt{\frac{a^2 + s}{s}}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\operatorname{erfc}(a\sqrt{t}) (a > 0)$	$\frac{\sqrt{a^2 + s} - a}{s} \sqrt{\frac{a^2 + s}{s}}$
$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) (a > 0)$	$\frac{1}{s} (1 - e^{-2a\sqrt{s}})$
$\operatorname{ch} at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) (a > 0)$	$\frac{1}{s} e^{-2a\sqrt{s}}$
$e^{-bt} \sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2 + a^2}$	$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$
$e^{-bt} \cos at$	$\frac{(s+b)}{(s+b)^2 + a^2}$	$J_\nu(at) (Re \nu > -1)$	$\frac{a^\nu}{\sqrt{s^2 + a^2} (s + \sqrt{s^2 + a^2})^\nu} (Re s \geq Im a)$
$e^{-bt} t^m (m > -1)$	$\frac{\Gamma(m+1)}{(s+b)^{m+1}}$	$\frac{J_\nu(at)}{t} (Re \nu > 0)$	$\frac{a^\nu}{v(s + \sqrt{s^2 + a^2})^\nu} (Re s \geq Im a)$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$t^\nu J_\nu(at) (Re \nu > -\frac{1}{2})$	$\frac{(2a)^\nu}{\sqrt{\pi}} \Gamma(v + \frac{1}{2}) (s^2 + a^2)^{-v - \frac{1}{2}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-k\sqrt{s}}$	$J_0(2\sqrt{at})$	$\frac{1}{s} e^{-\frac{a}{s}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-2a\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{\frac{a^2}{s}} \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{s}}\right)$		

注: $\Gamma(x)$ 、 $J_\nu(x)$ 分别为 Γ 函数及 ν 阶第一类贝塞尔函数, 见本篇 4; $\operatorname{erf}(x)$ 及 $\operatorname{erfc}(x)$ 分别是误差函数及余误差函数, 定义式为:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

2.3 傅里叶变换

(1) 定义

设函数 $f(x)$ 满足

$$\textcircled{1} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \text{ 存在}$$

② $f(x)$ 在任一有限区间上分段单调且除至多只有有限个第一类间断点外处处连续, 则下列一对公式成立

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = F(\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = f(x)$$

此时, 称 $F(\omega)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶变换, 记为

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)]$$

称 $f(x)$ 为 $F(\omega)$ 的(逆或)反傅里叶变换, 记为

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

(2) 主要性质

设 $\mathcal{F}[f(x)] = F(\omega)$, $\mathcal{F}[g(x)] = G(\omega)$, 则

编号	运算	象原函数	象函数
1	线性 (a, b 是常数)	$af(x) + bg(x)$	$aF(\omega) + bG(\omega)$
2	微分 若对一切 $x, f^{(r)}(x)$ 存在, 且所有 较低阶导数在 $ x \rightarrow \infty$ 时 趋于零	$f^{(r)}(x)$ $(-ix)^r f(x)$	$(i\omega)^r F(\omega)$ ($r=0, 1, 2, \dots$) $\frac{d^r F(\omega)}{d\omega^r}$
3	尺度变换 (相似定理)	$f(ax)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
4	平移 (或延迟)	$f(x-a)$	$e^{-ia\omega} F(\omega)$
5	卷积 (或褶积)	$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du$	$F(\omega) \cdot G(\omega)$
6	连续性	$f(x, a) \rightarrow f(x)$	$F(\omega, a) \rightarrow F(\omega)$
7	翻转	$f(-x)$	$F(-\omega)$
8	共轭	$\overline{f(x)}$	$\overline{F(-\omega)}$
9	平移 (或调频)	$e^{-iax} f(x)$	$F(\omega-a)$
10	帕塞法耳等式	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) ^2 dx$ $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) ^2 d\omega$	
11	奇偶虚实	若 $f(x)$ 是实的偶函数, 则 $F(\omega)$ 是实的偶函数, 反之亦真; 若 $f(x)$ 是实的奇函数, 则 $F(\omega)$ 是虚的奇函数, 反之亦真	

(3) 简表

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

	$f(x)$	$F(\omega)$
1	方形脉冲 $f(x) = \delta_A(x)$ $= \begin{cases} \frac{A}{a}, & x \leq \frac{a}{2} \\ 0, & x > \frac{a}{2} \end{cases}$ 其中, A 为正常数, 表示脉冲面积, a 为正常数, 表示脉宽	$\frac{A}{a} \cdot \frac{2 \sin \frac{a}{2} \omega}{\omega}$
2	单位脉冲 在 $\delta_A(x)$ 中, $A=1, a \rightarrow 0$ 时, 称为单位脉冲, 记为 $\delta(x)$, 即 $\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_1(x),$ 或简记为 $\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x=0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$	1
3	单位函数 $f(x)=1$	$2\pi \delta(\omega)$
4	三角脉冲 $f(x) = \begin{cases} 0, & x > \delta \\ 1 - \frac{ x }{\delta}, & x \leq \delta \end{cases}$	$\frac{4 \sin^2 \frac{\delta \omega}{2}}{\delta \omega^2}$
5	钟形脉冲 $f(x) = e^{-a^2 x^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$
6	半余弦脉冲 $f(x) = \begin{cases} 0, & x > \frac{\pi}{2\omega_0} \\ \cos \omega_0 x, & x \leq \frac{\pi}{2\omega_0} \end{cases}$	$2\omega_0 \frac{\cos \frac{\pi \omega}{2\omega_0}}{\omega_0^2 - \omega^2}$
7	指数衰减脉冲 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-ax}, & x \geq 0 \end{cases} (a > 0)$	$\frac{1}{a + i\omega}$
8	单位跃阶函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i\omega}$
9	傅里叶核 $f(x) = \frac{\sin \delta x}{\pi x}$	$F(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \leq \delta \\ 0, & \omega > \delta \end{cases}$
10	$f(x) = \frac{2 \sin^2 \left(\frac{\delta x}{2} \right)}{\pi \delta x^2}$	$F(\omega) = \begin{cases} 1 - \frac{ \omega }{\delta}, & \omega \leq \delta \\ 0, & \omega > \delta \end{cases}$

续表

	$f(x)$	$F(\omega)$
11	$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \omega }$
12	$\frac{1}{\sqrt{ x }}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{ \omega }}$
13	$\begin{cases} e^{iax} \cdot e^{-bx}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\frac{i}{a+ib-\omega}$
14	$\frac{e^{-a x }}{\sqrt{ x }}$	$\sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{\sqrt{\omega^2+a^2}+a}}{\sqrt{\omega^2+a^2}}$
15	$\frac{\cos\left(-\frac{a}{\sqrt{ x }}\right)}{\sqrt{ x }}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{ \omega }} (\cos \sqrt{2a \omega } - \sin \sqrt{2a \omega })$
16	$\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} \pi x}, -\pi < a < \pi$	$\frac{\sin a}{\operatorname{ch} \omega + \cos a}$
17	$\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch} \pi x}, -\pi < a < \pi$	$-2i \frac{\sin \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{\omega}{2}}{\operatorname{ch} \omega + \cos a}$
18	$\frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} \pi x}, -\pi < a < \pi$	$2 \frac{\cos \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{\omega}{2}}{\operatorname{ch} \omega + \cos a}$
19	$\frac{1}{\operatorname{ch} ax}$	$\frac{\pi}{a} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi \omega}{2a}}$
20	$\sin ax^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4a} + \frac{\pi}{4}\right)$
21	$\cos ax^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
22	$\frac{\sin ax}{x}$	$\begin{cases} \pi, \omega \leq a \\ 0, \omega > a \end{cases}$
23	$\frac{\sin ax}{\sqrt{ x }}$	$i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{ \omega+a }} - \frac{1}{\sqrt{ \omega-a }} \right)$
24	$\frac{\cos ax}{\sqrt{ x }}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{ \omega+a }} + \frac{1}{\sqrt{ \omega-a }} \right)$
25	$\frac{\sin^2 ax}{x^2}$	$\begin{cases} \pi \left(a - \frac{ \omega }{2} \right), \omega \leq 2a \\ 0, \omega > 2a \end{cases}$

3 常微分方程

3.1 一阶方程

(1) 变量可分离方程

① 变量可分离方程 $y' = f(x)g(y)$

$$\text{解 } \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$$

② $y' = f(ax+by+c)$

解 作因变量代换 $u = ax+by+c$, 方程被化成①的形式 $\frac{du}{dx} = a + bf(u)$, 而得

$$\int \frac{du}{a + bf(u)} = x + c$$

(2) 齐次方程

① 齐次型方程 $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 解 作因变量代换 $u = \frac{y}{x}$, 方程被化成

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

而得

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + c$$

② $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

解法 若行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

引进新变量 t, u ,

$$x = t + \alpha, y = u + \beta$$

其中 α, β 满足方程组

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

方程被化成①的形式:

$$\frac{du}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 u}{a_2 t + b_2 u}\right);$$

若 $\Delta \neq 0$, 但 $b_1 \neq 0$, 则令 $u = a_1 x + b_1 y + c_1$;

若 $\Delta \neq 0$, 但 $b_2 \neq 0$, 则令 $u = a_2 x + b_2 y + c_2$;

(3) 线性方程

① 线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$

$$\text{解 } y = e^{-\int P dx} \left(\int Q e^{\int P dx} dx + c \right)$$

② 伯努利方程 $y' + P(x)y = Q(x)y^n$
($n \neq 0, 1$)

解法 两端乘以 $(1-n)y^{-n}$, 作因变量代换 $u = y^{1-n}$ 后可化成线性方程, 其通解公式为

$$y^{(1-n)} e^{\int (1-n)P dx} = (1-n) \int Q e^{\int (1-n)P dx} dx + c$$

(4) 全(恰当)微分方程

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

式中 M, N 满足 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

解法 方程可写成

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y) = 0$$

式中 dU 是全(恰当)微分, 而得方程之解为

$$U(x, y) = c$$

(5) 可将 y 解出的方程

$$y = f(x, p)$$

式中 $p = \frac{dy}{dx}$

① 方程 $y = f(x, p)$

解法 方程两边对 x 求导, 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}$$

即

$$\left(p - \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx - \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0$$

若能由此得通解

$$p = \varphi(x, c) \text{ 或 } x = \psi(p, c)$$

则原方程的解为

$$y = f(x, \varphi(x, c)) \text{ 或 } \begin{cases} x = \psi(p, c) \\ y = f(\psi(p, c), p) \end{cases}$$

② 拉格朗日方程 $y = xf_1(p) + f_2(p)$

解法 化成 x 的线性方程

$$\frac{dx}{dp} - \frac{f'_1(p)}{p - f_1(p)} x = \frac{f'_2(p)}{p - f_1(p)}$$

后继续求解。

③ 克莱洛方程 $y = xp + f(p)$

解 化成方程

$$(x + f'(p)) \frac{dp}{dx} = 0$$

令 $\frac{dp}{dx} = 0$, 即 $p = c$, 代入原方程, 即得通解(这类方程还可能奇解, 见(11))

$$y = cx + f(c)$$

(6) 可将 x 解出的方程

$$x = f(y, p), \text{ 式中 } p = \frac{dy}{dx}$$

解法 方程两边对 x 求导, 利用 $y'' = p \frac{dp}{dy}$ 将方程化成

$$\left(p \frac{\partial f}{\partial y} - 1 \right) dy + p \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0$$

若可求出此方程的通解

$$y = \varphi(p, c) \text{ 或 } p = \psi(y, c)$$

则原方程的解为

$$\begin{cases} x = f(\varphi(p, c), p) \\ y = \varphi(p, c) \end{cases} \text{ 或 } x = f(y, \psi(y, c))$$

(7) 不显含 y 的方程

$$f(x, y') = 0$$

解 若引入适当的参数 t , 能化方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

则原方程的解为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + c \end{cases}$$

(8) 不显含 x 的方程

$$f(y, y') = 0$$

解 若引入适当的参数 t , 能化方程为

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

则原方程的解为

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + c \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

(9) 积分因子

含积分因子的方程 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

解法 设式中 $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, 但存在 $\mu(x, y)$, 使成立

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

则称 $\mu(x, y)$ 为原方程的积分因子。对这类方程, 在找出积分因子后, 再按(4)的方法求解。

一些情况下, 积分因子 $\mu(x, y)$ 可简单地写出

$$\textcircled{1} \text{ 在 } xM + yN = 0 \text{ 时, } \mu(x, y) = \frac{1}{xM - yN}$$

$$\textcircled{2} \text{ 在 } xM - yN = 0 \text{ 时, } \mu(x, y) = \frac{1}{xM + yN}$$

$\textcircled{3}$ 在 $xM + yN \neq 0$ 但 M, N 是同次的齐次式时,

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xM + yN}$$

$\textcircled{4}$ 在 $xM - yN \neq 0$ 但 $M(x, y) = yM_1(xy)$ 、

$$N(x, y) = xN_1(xy) \text{ 时, } \mu(x, y) = \frac{1}{xM - yN}$$

$$\textcircled{5} \text{ 若 } \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = f(x),$$

$$\text{则 } \mu(x, y) = e^{\int f(x) dx}$$

$$\textcircled{6} \text{ 若 } \frac{1}{M} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = f(y),$$

$$\text{则 } \mu(x, y) = e^{\int f(y) dy}$$

$\textcircled{7}$ 若存在适合

$$nxM - myN + xy \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = 0$$

的常数 m 和 n (用比较系数法确定), 则 $\mu(x, y) = x^m y^n$

$\textcircled{8}$ 若

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x} \end{cases}$$

$$\text{则 } \mu(x, y) = \frac{1}{M^2 + N^2}$$

$\textcircled{9}$ 若 $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = Mf_1(y) - Nf_2(x)$, 则原方程具

有形如 $m(x)n(y)$ 的积分因子

(10) 黎卡堤方程

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x),$$

式中 $p(x) \neq 0, r(x) \neq 0$

解法 若已知方程的一个特解 $y = y_1(x)$, 作变换

$$y = y_1(x) + \frac{1}{u}$$

可将原方程化为未知函数 u 的线性方程

$$\frac{du}{dx} + (q(x) + 2p(x)y_1)u = -p(x)$$

或用变换

$$y = y_1(x) + u$$

化为伯努利方程

$$\frac{dy}{dx} - (q(x) + 2p(x)y_1)u = p(x)u^2$$

后再行求解。

(11) 奇解及其求法

微分方程 $F(x, y, y') = 0$ 的一族积分曲线(通解)的包络, 称为这个微分方程的奇解。奇解是方程的解, 同时过奇解上每一点都不止有一条积分曲线, 即在奇解上的每一点, 方程的解不是唯一的。

① c -判别曲线法

设已知一阶方程 $F(x, y, y') = 0$ 的通解为 $g(x, y, c) = 0$, 其中 c 是任意常数。在把 c 看作参数, 则从方程组

$$\begin{cases} g(x, y, c) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

中消去 c 而得出的所有曲线, 均称为曲线族 $g(x, y, c) = 0$ 的 c -判别曲线, 其中也包含着它的包络。但应注意 c -判别曲线不一定是曲线族的包络, 其中究竟哪一条是包络尚须代入原方程进行检验, 若是原方程的解, 则是奇解(即是 $g(x, y, c) = 0$ 的包络), 否则就不是奇解。

② p -判别曲线法

对于一阶方程 $F(x, y, p) = 0$, 若令 $y' = p$, 则方程的奇解必包含在对方程组

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0 \end{cases}$$

消去 p 后所得的曲线(称为 p -判别曲线)中, 关于 p -判别曲线是否为奇解, 也需作实际检验, 若它是原方程的解且在每一点都违反唯一性则是奇解, 否则就不是奇解。

3.2 二阶方程

在一般的二阶常微分方程 $F(x, y, y', y'') = 0$ 中, 设可就最高阶导数解出, 则方程成为

$$y'' = f(x, y, y')$$

(1) 右端不显含 y 的方程

$$\textcircled{1} y'' = g(x)$$

$$\text{解 } y = \int \left[\int g(x) dx \right] dx + c_1 x + c_2$$

$$\textcircled{2} y'' = g(y')$$

解法 令 $y' = p$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx}$, 代入原方程解出 p , 再从 $y' = p$ 解得 y

$$\textcircled{3} y'' = g(x, y')$$

解法 同②

(2) 右端不显含 x 的方程

$$\textcircled{1} y'' = g(y)$$

$$\text{解 } x = \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 + 2 \int g(y) dy}} + c_2$$

$$\textcircled{2} y'' = g(y, y')$$

解法 令 $y' = p$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$ 代入方程即可求解

(3) 常系数线性方程

$$y'' + py' + qy = r(x), \text{ 式中 } p, q \text{ 是常数}$$

解法 见 3.3(1), (2).

(4) 变系数线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

解法 若已知 y_1 是一个特解, 则另一与之线性无关的特解 y_2 可求出, 为

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} dx$$

而方程的通解为

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

(5) 变系数线性非齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = r(x)$$

解法 若已知对应齐次方程两个线性无关的解 y_1, y_2 , 则可写出对应齐次(homogeneous)方程的通解

$$y_h(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad c_1, c_2 \text{ 是常数}$$

以及方程的一个特(particular)解 $y_p(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2$, 式中的函数 v_1 及 v_2 由下列方程组

$$\begin{cases} v'_1 y_1 + v'_2 y_2 = 0 \\ v'_1 y'_1 + v'_2 y'_2 = r(x) \end{cases}$$

确定, 即

$$v'_1 = \frac{-y_2 r(x)}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1}, v'_2 = \frac{y_1 r(x)}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1}$$

而方程的通解为

$$y = y_p + y_h$$

(6) 其他可积方程

$$\textcircled{1} y'' = f(ax + by)$$

解法 令 $ax + by = u$, 方程化成 $u'' = bf(u)$

$$\textcircled{2} y'' + P(x)y' + Q(x)(y')^2 = 0$$

解法 可看作(1), 解得

$$y = \int e^{-\int P dx} \left(\int Q e^{\int P dx} dx + c_1 \right)^{-1} dx + c_2$$

$$\textcircled{3} y'' + P(y)y' + Q(y)(y')^2 = 0$$

解法 可看作(2), 解得

$$x = \int e^{\int Q dy} \left(- \int P e^{\int Q dy} dy + c_1 \right)^{-1} dy + c_2$$

$$\textcircled{4} y'' + P(y)(y')^2 + Q(y) = 0$$

解法 可看作(2), 解得

$$x = \int e^{\int P dy} \left(-2 \int Q e^{\int P dy} dy + c_1 \right)^{-\frac{1}{2}} dy + c_2$$

$$\textcircled{5} y'' + P(x)y' + Q(y)(y')^2 = 0$$

解法 令 $y' = \frac{u}{v}$, 代入后再令 $v \frac{du}{dx} + P(x)uv = 0$,

可得

$$\int e^{\int Q dy} dy = c_1 \int e^{-\int P dx} dx + c_2$$

$$\textcircled{6} (1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

解法 令 $x = \sin t$, 方程被化成

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = 0$$

3.3 常系数线性方程

(1) 二阶齐次方程

$y'' + py' + qy = 0$, 式中 p, q 为常数, 特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的根为 λ_1, λ_2

① 实根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 方程的通解为

$$y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$$

②实根 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, 方程的通解为

$$y=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}$$

③复根 $\lambda_1=a+bi, \lambda_2=a-bi$, 方程的通解为

$$y=e^{ax}(c_1\cos bx+c_2\sin bx)$$

(2) 二阶非齐次方程

$$y''+py'+qy=r(x), \text{ 式中 } p, q \text{ 为常数.}$$

设 y_p 表示方程的某个特解(特积分), λ_1, λ_2 为其对应齐次方程之特征方程的根, $y_h(x)$ 是对应齐次方程的通解, 则方程的通解为

$$y=y_p+y_h$$

求方程特解 $y_p(x)$ 的方法有

①待定系数法

对特殊形式的右端项 $r(x)$, 可将特解 $y_p(x)$ 的待定表达式及其相应的各阶导数代入原微分方程, 比较同类项的系数, 即可确定 $y_p(x)$ 待定表达式中各系数之值而得特解 $y_p(x)$, 部分情况下特解的待定表达式见下表:

$r(x)$ 的形式	$y_p(x)$ 带待定系数的形式
$P_n(x)$ (n 次多项式)	$Q_n(x)$ (带待定系数的 n 次多项式), 当 $q \neq 0$ $xQ_n(x)$ 当 $q = 0$
ke^{ax}	$\frac{k}{a^2+pa+q}e^{ax}$, 当 $a \neq \lambda_1, \lambda_2$ $\frac{k}{2a+p}xe^{ax}$, 当 $a = \lambda_1 \neq \lambda_2$ $\frac{k}{2}x^2e^{ax}$, 当 $a = \lambda_1 = \lambda_2$
$P_n(x)e^{ax}$	$Q_n(x)e^{ax}$, 当 $a \neq \lambda_1, \lambda_2$ $xQ_n(x)e^{ax}$, 当 $a = \lambda_1 \neq \lambda_2$ $x^2Q_n(x)e^{ax}$, 当 $a = \lambda_1 = \lambda_2$
$e^{ax}(k\cos\beta x+l\sin\beta x)$	$e^{ax}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$, 当 $a \pm i\beta \neq \lambda_1$ 或 λ_2 $xe^{ax}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$, 当 $a \pm i\beta = \lambda_1$ 或 λ_2 式中 A, B 是待定常数

②常数变易法

同 3.2(5) 求 $y_p(x)$ 的方法。

(3) 高阶方程

对三阶以上的常系数线性齐次及非齐次方程, 其解法均只是以上(1)、(2)中解法的推广。

(4) 拉普拉斯变换的应用

常系数线性常微分方程的初值问题, 可用拉普拉斯变换方便地求解。

例 求满足 $y''-3y'+2y=2e^{-x}$, $y(0)=2$, $y'(0)=-1$ 的解。

解 对方程两边作拉普拉斯变换, 并记 $\bar{y}(s) = \mathcal{L}[y(x)]$, 得

$$\begin{aligned} [s^2\bar{y}-sy(0)-y'(0)]-3[s\bar{y}-y(0)]+2\bar{y} \\ = \frac{2}{s+1} \end{aligned}$$

代入初始条件后可解得

$$\begin{aligned} \bar{y}(s) &= \frac{2s^2-5s-5}{(s+1)(s-1)(s-2)} \\ &= \frac{1}{3(s+1)} + \frac{4}{s-1} - \frac{7}{3(s-2)} \end{aligned}$$

求逆拉普拉斯变换, 得到初值问题的解

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{-x} + 4e^x - \frac{7}{3}e^{2x}$$

(5) 欧拉方程

$$\begin{aligned} x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + p_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \cdots \\ + p_{n-1} x y' + p_n y = r(x) \end{aligned}$$

式中 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 都是常数, 作自变量代换 $x=e^t$ 即 $t=\ln x$, 可化成常系数线性微分方程。

3.4 对称形微分方程组

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

解法

(1) 若 P, Q 中均不含 z , 则可先解

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}$$

再将结果代入另一等式去求解, 这样可得两个独立的通解

(2) 选定适当常数 l, m, n , 利用公式

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{l dx + m dy + n dz}{l P + m Q + n R}$$

再继续求解。

例 求解方程组

$$\begin{cases} (z-y)^2 \frac{dy}{dx} = z \\ (z-y)^2 \frac{dz}{dx} = y \end{cases}$$

解 把方程改写成对称形式

$$\frac{dx}{(x-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

从后一等式, 给出

$$ydy - zdx = 0$$

而得首次积分 $y^2 - z^2 = c_1$

其次, 把两个关系式, 按分子分母相减得

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy-dz}{z-y} \quad \text{即} \quad dx + (z-y)d(z-y) = 0$$

而得另一首次积分

$$2x + (z-y)^2 = c_2$$

解毕。但由于过程中曾以 $(y-z)^2$ 去除, 故失去了依赖于一个参数的一族解 $x=c, y=z$, 当然, 如果认定 x 为自变量, 这些解是不存在的。

4 特殊函数

4.1 伽马函数 (Γ 函数)

(1) 定义

① 定义

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$$

右端的表达式称为第二类欧拉积分。

② 扩充 利用下面的公式, 对 $x < 0$ 但非为整数时, 定义

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

(2) 常用公式

① $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) (x > 0)$ (递推公式)

② $\Gamma(1) = 1$, 由①并可得

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n \text{ 为正整数})$$

特别有 $\Gamma(2) = 1$ 。

$$\textcircled{3} \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (\text{余元公式})$$

特别有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x}$$

$$\textcircled{4} 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x)$$

(倍元公式)

(3) 其他结果

$$\textcircled{1} \Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{m}\right)\Gamma\left(x + \frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(x + \frac{m-1}{m}\right)$$

$$= m^{\frac{1}{2}-mx}(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(mx) \quad (m=2, 3, \cdots) \quad (\text{高斯乘法定理})$$

显然, 倍元公式是其 $m=2$ 的特例。

② 斯特林公式 (渐近级数)

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \frac{571}{2488320x^4} + \cdots \right)$$

特别: 当正整数 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

$$\textcircled{3} \Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt = -\gamma$$

式中的 γ 为欧拉常数,

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

$$= 0.577215664901532 \cdots$$

$$\textcircled{4} \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \gamma$$

4.2 贝塔函数 (β 函数)

(1) 定义

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (p > 0, q > 0)$$

右端的表达式称为第一类欧拉积分。

(2) 常用公式

$$\textcircled{1} B(p, q) = B(q, p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

(与 Γ 函数的关系)

$$\textcircled{2} B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1)$$

($p > 0, q > 1$) (递推关系)

(3) 其他结果

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \frac{p+q}{q} B(p, q+1) &= \frac{p+q}{p} B(p+1, q) \\ &= B(p, q) = B(p+1, q) + B(p, q+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} B(p, q) B(p+q, r) &= B(q, r) B(q+r, p) \\ &= B(r, p) B(r+p, q) \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} B(p, p) = 2^{1-2p} B\left(p, \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \frac{1}{B(n, m)} &= m \binom{n+m-1}{n-1} = n \binom{n+m-1}{m-1} \\ (m, n \text{ 为正整数}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{式中} \binom{\alpha}{k} &= \frac{(\alpha)_k}{k!}, (\alpha)_k = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k)} \end{aligned}$$

4.3 贝塞尔函数

(1) 表达式

①第一类贝塞尔函数

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}$$

②第二类贝塞尔函数(诺依曼函数)

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu \pi} [J_\nu(x) \cos \nu \pi - J_{-\nu}(x)]$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x)$$

上两式中 ν 不是整数, n 是整数。

③第三类贝塞尔函数(汉克尔函数)

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x) \quad (i = \sqrt{-1})$$

(2) 性质

设 ν 为任意的常数而 n 是整数

①所有这三类 ν 阶贝塞尔函数都是 ν 阶贝塞尔方程

$$x^2 y'' + xy'' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

的解。

②线性相关

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$$

③线性无关

$J_\nu(x), Y_\nu(x), H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x)$ 两两线性无关, 在 ν 非为整数时, $J_\nu(x)$ 与 $J_{-\nu}(x)$ 从而 $Y_\nu(x)$ 与 $Y_{-\nu}(x)$ 也线

性无关。

(3) 递推关系

①关于 $J_\nu(x)$, 有

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-\nu} J_\nu(x)) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

从而容易推得

$$xJ'_\nu(x) + \nu J_\nu(x) = xJ_{\nu-1}(x)$$

$$xJ'_\nu(x) - \nu J_\nu(x) = -xJ_{\nu+1}(x)$$

以及, 特别地有

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x)$$

$$\frac{d}{dx}(xJ_1(x)) = xJ_0(x)$$

②关于 $Y_\nu(x)$, 也有

$$Y_{\nu-1}(x) + Y_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^\nu Y_\nu(x)) = x^\nu Y_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-\nu} Y_\nu(x)) = -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x)$$

③关于 $H_\nu^{(j)}(x)$ 也成立类似的关系, 分别对 $j=1$ 或 2

有

$$H_{\nu-1}^{(j)}(x) + H_{\nu+1}^{(j)}(x) = \frac{2\nu}{x} H_\nu^{(j)}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^\nu H_\nu^{(j)}(x)) = x^\nu H_{\nu-1}^{(j)}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-\nu} H_\nu^{(j)}(x)) = -x^{-\nu} H_{\nu+1}^{(j)}(x)$$

4.4 勒让德多项式

(1) 表达式

①微分表示式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2-1)^n) \quad (\text{罗德里格公式})$$

②积分表示式

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos \theta)^n d\theta \quad (\text{希里夫利公式})$$

③多项式表示

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^k k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}$$

式中 $[\frac{n}{2}]$ 表示不超过 $\frac{n}{2}$ 的最大整数。