高等数学习题集解答

（根据同济大学数学教研室一九六五年修订本）

数学分析部分

（三）

武汉建材学院基础部
武汉师范学院数学系 合编

高等数学习题集解答

（根据同济大学数学教研室一九六五年修订本）

数 学 分 析 部 分

（三）

武汉建材学院基础部
武汉师范学院数学系 合编

目　录

第二编　数学分析

第十八章 级 数

在题18.1——18.7中，写出已给级数的前五项

18.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

解 $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\cdots$.

18.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$.

解 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot2^3}+\frac{1}{5\cdot2^5}+\frac{1}{7\cdot2^7}+\frac{1}{9\cdot2^9}+\cdots$.

18.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$.

解 $\frac{1+1}{1+1^2}+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\frac{1+5}{1+5^2}+\cdots$.

18.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

解 $\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\frac{5!}{5^5}+\cdots$.

18.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

解 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$.

18.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$.

解 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\cdots$.

18.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$.

解 $\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}-\dfrac{1}{\sqrt{4\cdot 5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5\cdot 6}}-\cdots$.

在题18.8——18.17中，写出已给级数的一般项：

18.8. $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\cdots$.

解 $u_n=\dfrac{1}{2n-1}$.

18.9. $\dfrac{1}{2\ln 2}+\dfrac{1}{3\ln 3}+\dfrac{1}{4\ln 4}+\cdots$.

解 $u_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

18.10. $\dfrac{2}{1}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{4}+\dfrac{6}{5}-\cdots$.

解 $u_n=(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n}$.

18.11. $-\dfrac{1}{2}+0+\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{6}+\cdots$.

解 $u_n=\dfrac{n-2}{n+1}$.

18.12. $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\cdots$.

解 $u_n=\frac{n}{n^2+1}$.

18.13. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\cdots$.

解 $u_n=\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}$.

18.14. $1+\frac{1\cdot2}{1\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot4\cdot7}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{1\cdot4\cdot7\cdot10}+\cdots$.

解 $u_n=\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{1\cdot4\cdots(3n-2)}$.

18.15. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot5}{1\cdot5}+\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot5\cdot9}+\frac{2\cdot5\cdot8\cdot11}{1\cdot5\cdot9\cdot13}+\cdots$.

解 $u_n=\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}$.

18.16. $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^2}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots$.

解 $u_n=\frac{x^{\frac{n}{2}}}{2\cdot4\cdots(2n)}$

18.17. $\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$.

解 $u_n=(-1)^{n+1}\frac{a^{n+1}}{2n+1}$.

在题18.18——18.32中，利用几何级数，调和级数的敛散性，以及无穷级数的基本性质，判定已给级数的敛散性：

18.18. $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots.$

解 $\because u_n=(-1)^n\left(\frac{8}{9}\right)^n$，因此公比$q=-\frac{8}{9}$，

$\therefore |q|=\left|\frac{8}{9}\right|<1$，

$\therefore$级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{8}{9}\right)^n$ 收敛.

18.19. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots.$

解 $\because \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$.

而 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 是调和级数，发散.

故 $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots$ 也是发散的.

18.20. $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots.$

解 $\because \lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}=1\neq 0$,

$\therefore$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots$，发散.

18.21. $1!+2!+3!+4!+\cdots$.

解 $\because \lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty} n!=+\infty$,

$\therefore$ $1!+2!+3!+4!+\cdots$, 发散.

18.22. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$.

解 $\because$ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ 发散,

$\therefore$ $\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots)$ 发散,

即 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$ 发散.

18.23. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\cdots$.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n+2})$.

$\because$ $u_n=1-\frac{1}{n+2}\longrightarrow 1$ $\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}$ 发散.

18.24. $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\cdots$.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2})^n$, $\because q=\frac{3}{2}>1$, $\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2})^n$ 发散.

18.25. $\frac{1}{11}+\frac{2}{12}+\frac{3}{13}+\cdots$.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10+n}$ $\because u_n=\frac{n}{10+n}\longrightarrow 1(n\longrightarrow\infty)$,

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10+n}\right)$ 发散.

18.26. $\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln^2 2}{2^2}+\frac{\ln^3 2}{2^3}+\cdots$.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^n$, $\because$ $q=\frac{\ln 2}{2}<1$,

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^n$ 收敛.

18.27. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\cdots$.

解 $\because u_n=\frac{n}{2n-1}$, $\therefore u_n\longrightarrow\frac{1}{2}(n\longrightarrow\infty)$.

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$ 发散.

18.28. $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$.

解 $\because 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$ 发散,

$\therefore$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$发散.

18.29. $2+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\cdots$.

解 $\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ 发散.

18.30. $(\frac{1}{6}+\frac{8}{9})+(\frac{1}{6^2}+\frac{8^2}{9^2})+(\frac{1}{6^3}+\frac{8^3}{9^3})+\cdots$.

解 $\frac{1}{6}+(\frac{1}{6})^2+(\frac{1}{6})^3+\cdots$和$\frac{8}{9}+(\frac{8}{9})^2+(\frac{8}{9})^3+\cdots$,

都收敛．因此级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{6^n}+\frac{8^n}{9^n})$$ 收敛.

18.31. $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2})+(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3})+\cdots$.

解 $\because \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$, 收敛,

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})$$ 收敛

18.32. $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10\cdot n}+\cdots$的收敛性.

解 $\because$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10\cdot n}+\cdots$,

$$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots)+(\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{10\cdot n}+$$

$$+\cdots)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

虽然 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 收敛，但是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，因此级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10\cdot n}+\cdots \text{是发散的.}$$

在题18.33——18.40中，根据级数收敛的定义判定已给级数的敛散性.

18.33. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

解 $\because S_n=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})=\sqrt{n+1}-1\longrightarrow+\infty$,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$，是发散的.

18.34. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[2n+1]{a}-\sqrt[2n-1]{a}\right)$，其中$a>0$.

解 $\because S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[2i+1]{a}-\sqrt[2i-1]{a}\right)$

$$=(\sqrt[3]{a}-a)+(\sqrt[5]{a}-\sqrt[3]{a})+\cdots+$$

$$+\left(\sqrt[2n+1]{a}-\sqrt[2n-1]{a}\right)$$

$$=\sqrt[2n+1]{a}-a\longrightarrow 1-a,$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[2n+1]{a}-\sqrt[2n-1]{a}\right)$ 收敛.

18.35. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

解 $\because S_n=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i+2}-2\sqrt{i+1}+\sqrt{i})=\sqrt{n+2}-$

$-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-$

$-\sqrt{2}+1\longrightarrow 1-\sqrt{2}$,

$\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ 收敛.

18.36. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$.

解 $\because S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots\cdots+$

$+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}\longrightarrow 1$,

$\therefore$ 级数$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$ 收敛.

18.37. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$.

解 $\because \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$,

$\therefore$ $S_n=\frac{1}{2}\left[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+\right.$

$\left.+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})\right]$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\longrightarrow\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 级数$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots$ 收敛.

18.38. $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+$
$+\cdots\cdots,$

解 $\because \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right),$

$$\therefore\quad S_n=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}\right)+\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)\longrightarrow\frac{1}{5},$$

$\therefore$ 级数$\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots$ 收敛.

18.39. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots.$

解 $\because$ $$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right],$$

$$\therefore\quad S_n=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)(i+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\longrightarrow\frac{1}{4},$$

$\therefore$ 级数 $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots$ 收敛.

18.40. $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$.

解 $\because S_n=\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{6}$,

等式两边乘以 $2\sin\frac{\pi}{12}$:

$$\therefore\ S_n\,2\sin\frac{\pi}{12}=\sum_{i=1}^{n}2\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{i\pi}{6}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\cos\frac{\pi}{12}(2i-1)-\cos\frac{\pi}{12}(2i+1)\right]$$

$$=\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}(2n+1),$$ 没有极限,

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{n\pi}{6}$ 发散,

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{6}$ 也发散.

在题18.41——18.49中，利用比较判定法，判定已给级数的敛散性：

18.41. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$.

解 $\because u_n=\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}=V_n$,

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散， $\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散．

18.42. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$．

解 $\because\ u_n=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}=V_n$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛($p=2>1$)， $\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛．

18.43. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\cdots$．

解 $\therefore\ u_n=\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}=V_n$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛， $\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ 也收敛．

18.44. $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots$．

解 $\because\ u_n=\frac{1+n}{1+n^2}>\frac{n}{n^2+n^2}=\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{2n}=V_n$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散， $\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$ 也发散．

18.45. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{n}{2n-1}+\cdots$．

解 $\because\ u_n=\frac{n}{2n-1}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}=V_n$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ 是发散的，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$ 也发散.

18.46. $\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$.

解 $\because u_n=\frac{1}{(n+1)(n+4)}<\frac{1}{n^2}=V_n$,

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$ 也收敛.

18.47. $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\cdots+\frac{n!}{n^n}+\cdots$.

解 $\because u_n=\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}$,

当n为偶数时 $u_n=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\frac{\left(\frac{n}{2}\right)}{n}\cdot\frac{\frac{n}{2}+1}{n}\cdot$

$$\frac{\frac{n}{2}+2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}<\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}}_{\frac{n}{2}}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdots1\cdot1}_{\frac{n}{2}}$$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$;

当n为奇数时 $u_n=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)}{n}\cdot\frac{\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}{n}\cdot$

$$\frac{\left(\frac{n+1}{2}+2\right)}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}<\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}}_{\frac{n+1}{2}}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdots1\cdot1}_{\frac{n+1}{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}},$$

$\therefore$　当n为偶数，令$n=2m$，则$u_{2m}<\left(\frac{1}{2}\right)^m$；

当n为奇数，令$n=2m-1$，则$u_{2m-1}<\left(\frac{1}{2}\right)^m$，

$\because\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m$收敛，$\therefore\ \sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{2m}$及$\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{2m-1}$都收敛.

因此　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}=\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{2m}+\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{2m-1}$　也收敛.

18.48.　$\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\sin\frac{\pi}{2^3}+\cdots.$

解　$\because u_n=\sin\frac{\pi}{2^n}<\frac{\pi}{2^n}=V_n$，

而　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}=\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$收敛，　故　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$　也收敛

18.49.　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$，设$a>0$.

解　$\because u_n=\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n=V_n$，