萬有文庫
第一集一千種
王雲五主編

類論梗概

包姆加脫納著
鄭太朴譯

商務印書館發行

類論梗概

包姆加脫納著
鄭太朴譯

算學小叢書

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

類論梗概

包姆加脫納著

鄭太朴譯

發行兼印刷者　商務印書館
上海寶山路

發行所　商務印書館
上海及各埠

B五一七分

... GROUPS

L. BAUMGA...TNER

Translated by

CHÊNG T'AI P'O

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1930

類 論 梗 概

目 次

類論梗概

第一章

類之概念

數學所研究之對象，亦有爲同類事物或元素所成之系統者，其中每二元素按某種次序以某種方法結合之，所得仍爲一如是之元素。例如由自然數目 1,2,3,… 所成之系統，以加爲結合方法將其中任何二元素結合之，則所得仍爲一自然數目，仍屬於此系統中（如將 3 與 8 結合得 11，仍爲一自然數目也）。但若用減爲結合方法，則結合二元素所得者不必仍屬於此系統中，如將 2 與 5 用減結合之，可得 $2-5=-3$，此數不屬於系統中矣。用加爲結合方法，將二自然數目結合，所得者既仍爲自然數目，則此數目自可仍與他數目結合，如是輾轉相結，無有限止可言。以下更舉數例，以

明此項系統。所舉者如讀者不甚明其對象，則不妨越過之。

第一節 算術中之例

1. 系統為自然數目所成，其元素為 $1,2,3,\cdots$ 結合法用加。例如 $7+2=9$，$10+10=20$（用以結合之二元素自亦可相同）。

2. 系統為自然數目所成，結合法用乘，則任何二數目之結合，所得仍為一自然數目，屬於此系統中者。例如 $4\cdot 6=24$.

3. 系統為一切整數$\cdots\cdots$，$-2,-1,0,1,2,\cdots$ 所成，結合方法為減，則二元素結合之結果，亦仍屬於此系統中。例如 $-6-2=-8$，$1-1=0$.

4. 一切自然數目，零亦在內，用 7 除之所得餘數均同者，名為『以率 7 相合』之數，例如 6 與 13 是，算式作 $6\equiv 13 (mod.\ 7)$.此項數目共可分為 7 種，每種中數目以 7 除之，所得餘數皆同；如 $0, 7, 14, \cdots\cdots$; $1, 8, 15, \cdots\cdots$; $\cdots\cdots$; $6, 13,$

20,……今於每種中取其一數作爲該種之代表,則得七數目成爲一系統,名曰『率 7 之完全餘數系統』。其中最簡單者爲 0,1,2,3,4,5,6,七數目。

今卽取此七數目爲系統,結合法則定如下:將二元素相加,所得者可易之以其種中之相合的數目。例如 6 與 4 相結得 3,因 $6+4=10\equiv3(mod.\ 7)$,8 與 8 結合得 2,因 $8+8=16\equiv2(mod.\ 7)$. 如是,所得者仍屬於系統中。

第二節 函數論中之例

5. 系統由以下四元素所成:

$$f_1(\chi)=\chi,\ \ f_2(\chi)=\frac{1}{\chi},\ f_3(\chi)=-\chi,\ \ f_4(\chi)=-\frac{1}{\chi}.$$

結合法:如將 $f_i(\chi)$ 與 $f_k(\chi)$結合,則應得 $f_k(f_i[\chi])$. 例如將 f_3 與 f_4 結合,得 $f_4(f_3[\chi])=-\frac{1}{-\chi}=\frac{1}{\chi}=f_2(\chi)$; f_2 與 f_2 結合,得 $f_2(f_2)=\frac{1}{\frac{1}{\chi}}=\chi=f_1(\times)$. 任何二函數之結合,所得仍爲

一函數屬於此系統中者；結合之次序，須照前所定法（本例中結合之次序尙可顚倒無妨，但如下例中則不能）。

6. 系統由一切整函數 $g(\chi)$ 所成，於此 χ 爲一複數。此項函數，按之函數論，其所展得之乘方級數，於全個數目平面中收斂。$\chi, a_0+a_1\chi+\cdots+a_n\chi^n$，$e^x$，$sin\,\chi$ 等函數均在此系統中。結合法仍如前例與中所定，如將 $g_1(\chi)$ 與 $g_2(\chi)$ 結合，應得 $g_2(g_1)$。一整函數之整函數仍爲整函數，故任何二函數結合之結果仍屬於此系統中。

第三節　代數及變換論中之例

7. 方程 $\chi^7=1$ 或 $\chi^7-1=0$ 共有七根，卽所謂七次單位根，其中之一爲 1，其餘六根則爲複數。此方程亦可寫作。

$$(\times-1)(\chi^6+\chi^5+\chi^4+\chi^3+\chi^2+\chi+1)=0.$$

因而 $\chi^6+\chi^5+\chi^4+\chi^3+\chi^2+\chi+1=0$

之六根卽爲原方程之六單位根。今設其中之一爲

E，則

$$\varepsilon^7=1,\ \varepsilon^6+\varepsilon^5+\varepsilon^4+\varepsilon^3+\varepsilon^2+\varepsilon+1=0,$$

又 $(\varepsilon^2)^6+(\varepsilon^2)^5+(\varepsilon^2)^4+(\varepsilon^2)^3+(\varepsilon^2)^2+(\varepsilon^2)+1=0,$

因 $(\varepsilon^2)^6=\varepsilon^{12}=\varepsilon^5(\varepsilon^2)^5=\varepsilon^{10}=\varepsilon^3$ 等等，從可知ε^2亦爲一根。仿此，可知 ε^3，ε^4 等亦爲其根，故六單位根乃是 $\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3,\varepsilon^4,\varepsilon^5,\varepsilon^6$。

今卽以此爲系統，而結合法則定之如下：將 ε^3 與 ε^6 結合，當得 $(\varepsilon^3)^6$。如是，任何二元素結合之結果必仍爲系統中之元素，例如 ε^3 與 ε^5 得 $(\varepsilon^3)^5=\varepsilon^{15}=\varepsilon^7\varepsilon^7\varepsilon=\varepsilon$。

8. 最重要者爲今所欲舉之例，故稍詳論之。

設有 n 元素 $a,b,c,\cdots\cdots$於此，今將其中每一元素易以其中一元素，俾所得仍爲此 n 元素，如是一變易，名爲此 n 元素之『變互。』普通將原來之元素寫於上，所用以易之之元素卽寫於其下，并用一括號括之，以明一變互。例如五元素 a,b,c,d,e，如欲將 a 易爲 c，b 易爲 d，c 易爲 a，d 易爲 b，e 易爲 e 以得一變互，則可寫作

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & d & a & b & e \end{pmatrix}$$

於此，所重者在某元素易以某元素，故原來元素先後之次序可不計，惟某元素之下爲某元素則不可混而已。因而前式亦可作

$$\begin{pmatrix} c & e & d & b & a \\ a & e & b & d & c \end{pmatrix}$$

若各元素均易以本身，則卽無變易，此變互名曰『全同變互』。以下爲簡易起見，元素均用數目字爲之。

設有二變互於此，則可將其結合之。例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 以及 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

二變互，欲將其結合，可先照第一變互將 1 易爲 3，復照第二變互將 3 易爲 2，則原來元素之 1 經二變互後易爲 2 矣。仿此，原來之 2 經二變互易爲 1，3 易爲 3，

故將二變互結合所得結果仍爲一變互，卽

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

此項結果，可寫作

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

但如前所述，$\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}$亦可寫作$\begin{pmatrix}312\\213\end{pmatrix}$，故前式不如寫爲

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

更爲醒目。所須注意者，二變互結合時，其次序至爲重要，不可相倒，蓋普通次序一倒，結果卽不同也；例如將前二變互之結合次序相倒，卽得：

$$\begin{pmatrix}312\\213\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}312\\213\end{pmatrix}\begin{pmatrix}213\\132\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}312\\132\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}$$

變互尙有一其他寫法，更爲簡單。例如

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&2&1\end{pmatrix}$$

一變互，於中將1易爲 3,3 易爲 4,4 易爲 2,2 易爲 5,5 易爲 1。試將各數目字列於一圓週上，每數目字之後繼以所欲易入者，則得一數目字之循環，恰能將原來之變互表出。寫時不妨將圓週

上之數目字仍平列，惟注意其相繼之次序，至以何字開首，則可隨便。如是，前變互可寫作

$$(1\ 3\ 4\ 2\ 5)\ \text{或}\ (3\ 4\ 2\ 5\ 1)$$

然由一變互所化成之循環中，不必已能將原變互所有之元素盡包入無遺，則未包入之元素須仍化爲循環，至於盡所有之元素爲止。例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

一變互，1 後繼以 4,4 後爲 2,2 後爲 3,3 後又復爲 1，故所得循環(1 4 2 3),不足以盡原有之元素。所餘元素以 5 開始再列之爲循環，則因 5 後繼以 6,6 後復爲 5，所得者爲 (5 6)，如是必尚須將單元素之循環 (7) 加入，方能盡原有之元素。因而原變互化成爲三循環，寫時可幷列之：

$$\begin{pmatrix} 1234567 \\ 4312657 \end{pmatrix} = (1423)\,(56)\,(7) = (7)\,(65)\,(2314)。$$

相異的變互所化成之循環不能相同，此事甚明，故每一變互，亦祗能以一種形式化爲循環。

將變互化爲循環後，其結合法自仍如前，故不贅。

旣明前所述理，則又可得一系統，例如爲三元素 1,2,3 之一切變互所成者。三元素 1,2,3 共可得六變互：

(1) (2)(3), (12)(3), (13)(2), (23)(1), (123), (132)。

結合法如前所述。則可知系統中任何二元素之結合所得仍爲系統中之一元素，卽任何二變互之結合，仍爲此六變互中之一。例如(12)(3)與(123)得(13)(2)。

9. 系統由以下形式之一切變換(相代)所成：

$$\chi'=a\chi+by,$$

$$y'=c\chi+dy,$$

於此 a,b,c,d 爲任何實數，$a:b\neq c:d$. 結合法如下：今設

$$(1)\ \begin{matrix}\chi'=3\chi-\sqrt{2}y\\ y'=\chi+y\end{matrix} \quad \text{與} \quad (2)\ \begin{matrix}\chi'=5\chi+\frac{1}{2}y\\ y'=\chi-4y\end{matrix}$$

爲系統中之二元素，則所謂將(1)與(5)結合者，

卽將(1)中 χ' 與 y' 之值代入(2)中之 χ 與 y 處;因得結果

$$\chi'=5(3\chi-\sqrt{2}y)+\tfrac{1}{2}(\chi+y)=15\tfrac{1}{2}\chi+(\tfrac{1}{2}-5\sqrt{2})y,$$

$$y'=3\chi-\sqrt{2}y)-4(\chi+y)=-\chi-(\sqrt{2}+4)y.$$

此則仍爲系統中之一變換也。

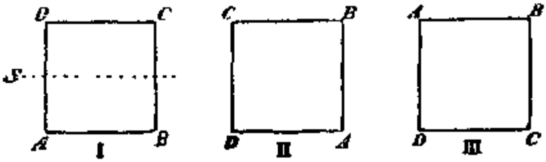
第四節　幾何學中之例

10. 一有法 n 邊形,於其平面中按中心點作 2π 度之旋轉,則其位置仍不變;任何 2π 之倍數之旋轉亦然。今將 $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, ……$\frac{2(n-1)\pi}{n}$,諸旋轉作爲元素,並加入不旋轉或 2π 之倍數旋轉,則得一系統。結合法定爲:如將 $\frac{2k\pi}{n}$ 與 $\frac{2l\pi}{n}$ 結合,則卽是作 $\frac{2k\pi}{n}$ 之旋轉後,再作 $\frac{2l\pi}{n}$ 之旋轉。如是,卽可知系統中任何二元素之結合所得,仍爲系統中之一元素。

11. 系統中除前述諸旋轉外,並加入新元素;

此項新元素爲：此多邊形以其對稱直線爲軸作出平面之旋轉。因 n 邊形有 n 對稱線，故此項旋轉之數共有 n；因而此系統中共有 $2n$ 元素。結合法仍爲二旋轉之先後爲之。則可知此系統中任何二元素之結合所得，仍爲此系統中之一元素。

例如 $n=4$，則爲正方形。$\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 一元素將圖 I 中之 I 旋轉入 II 之位置。又以 DB 對稱線



爲軸將 II 作出平面之旋轉，則 II 成爲 III 之位置。此二元素之結合實仍爲系統中之元素，即是將 I 以 S 爲軸作出平面之旋轉也。

12\. 系統爲一有法四面體之旋轉所成。此系統中共有十二元素：自四角至其相對平面所作之四垂線用爲軸各旋轉 $\frac{2\pi}{3}$ 度，此爲四元素；又仍用