2SI/07/71

自1687年牛顿的名著《原理》首次出版以来，牛顿力学经过300年的发展，今天人们才开始对它有比较完整的认识。在这个经典的领域中，仍然有原则性的难题和挑战。

牛顿力学三百年

郝柏林

牛顿的《自然哲学之数学原理》一书拉丁文初版于1687年问世．英文译本在牛顿逝世后两年，即1729年出版。1931年上海商务印书馆印行的《万有文库》曾收入郑太朴译自德文的中文本，共分十册．300年来，用大写字母起头的拉丁文"原理"(*Principia*)一字，一直在哲学和自然科学文献中特指牛顿的这一部经典著作。可以毫不夸大地说，这部书决定了整个西方近代自然科学的发展模式。

牛顿诞生在伽利略去世的那一年，即1642年的12月25日(按新历计算，是1643年1月4日)．从1679年开始，在与胡克(R. Hooke)的通讯和争论中，牛顿深入研究了行星的轨道运动问题．1684年底，牛顿因哈雷(E. Halley)的求教而撰写了"论运动"一文．然而，只是在《原理》一书中，牛顿才完整地表述了他的绝对时空观、运动三定律和万有引力定律。因此，以《原理》一书的出版，标志牛顿力学的诞生，是极为自然的。

牛顿力学的发展史，早有大量论文和专著，不是这篇短文的评述对象。本文主旨，是说明经过近300年的发展，现代自然科学才清楚认识到，我们对于牛顿力学原来只懂得了极小的一部分。人们从大学课本中学到的关于牛顿力学的基本概念，竟然只适用于极为稀少的特例，而力学系统的典型行为在大多数教科书中根本没有提到。这种认识迄今还停留在较为狭窄的专家圈子中。有必要使它逐渐成为广大自然科学工作者的共同的认识，并且引起哲学界的注意。

太阳系的稳定性

天体运行始终是牛顿力学的第一块试金石．《原理》一书第三篇专门讨论了"宇宙系统"．不过牛顿当时所研究的"宇宙"，只是到土星为止的太阳系，包括六大行星和它们的某些卫星。1781年发现天王星时，牛顿已经去世54年。天体力学在拉普拉斯(P. S. Laplace, 1749～1827)的五卷巨著(出版于1798～1825年期间)中，发展到甚为详尽的程度．拉普拉斯应用微扰论级数计算天体轨道，确定了扰动的周期性质，论证了土星环不可能是一个实体，对于木星的几个卫星的运动，也得到了与观察一致的计算结果。他甚至证明了一个太阳系稳定性的定理，拉普拉斯对于牛顿力学的确定论威力深信不疑，曾经宣称只要给定了初始条件，就可以预言太阳系的整个未来。

拉格朗日(J.-L. Lagrange, 1736～1813)开始用变分方法于牛顿力学．和《原理》书中的几何方法不同，拉格朗日使解析方法登峰造极，他的专著"解析力学"中竟然没有插图。经过许多人的努力之后，牛顿力学的基本出发点可以用变分原理表述得极为简练。力学系统由广义坐标和广义速度的某个函数(拉氏函数)刻画。保证这个函数在一定区间上的积分达到极值(极大或极小)的条件，就是运动方程。这

郝柏林，中国科学院数理学部委员，理论物理研究所研究员，本刊副主编。

Hao Bailin, Research Prof., Institute of Theoretical Physics, Division Member of Mathematics and Physics, Academia Sinica, Beijing; Co-Editor in Chief of *Science* (*Ke Xue*).

种普遍的表述，提供了建立新的物理理论的一般框架。后来，从狭义相对论到弱电统一理论，都采用了这种数学形式。拉格朗日也证明过自己的太阳系稳定性定理。

1846年根据对天王星轨道所受扰动的理论计算，预言并且观察到了海王星。这一发现可以说是经典的牛顿力学的辉煌顶点。(1930年用类似的方法，找到了太阳系的第九颗行星——冥王星)。从19世纪中期开始，那些最终导致量子力学、狭义相对论和广义相对论诞生的实验事实逐步显现出来。20世纪初建立的这几个新理论，当然是对牛顿力学的最伟大的发展。然而，我们还是回到这篇文章开头所提到的、尚未被人们所充分认识的那个侧面。

对太阳系稳定性的不同提法，可能导致不同的结论。例如，考虑扰动的近似程度不同，或要求稳定时间有限与无穷，当然后果会有差别。一种合理的抽象模型是把太阳系作为 N 体问题。$N-1$个小质量的行星，围绕着大质量的中心质点运动。它们遵从牛顿的运动定律，按照牛顿万有引力定律互相吸引。假定这个 N体系统中的质点过去从来没有发生过碰撞，问这样的系统在今后无限长的时间中，会不会发生质点碰撞或逃逸？

19世纪的数学家们已经知道，N 体问题属于不可积分(见下一节)的难题，只能寻求近似解。迪里克莱(P. G. L. Dirichlet)曾经在1858年宣称找到了逼近 N体问题解的方法。他在翌年去世，使这一方法成了千古之谜。20年后，韦尔斯特拉斯(K. Weierstrass)构造了 N 体问题的级数解，但不能证明级数是否收敛。1885年他通过另一位数学家，把这一问题呈交给瑞典国王奥斯卡二世，作为征奖论文题目。法国科学家庞加莱 (H. Poincaré, 1854～1912)的长达200多页的得奖论文，虽然没有解决这个问题，却揭开了牛顿力学的新篇章。他的结论甚至是近乎否定的：N 体问题的级数解由于小分母问题而很可能不收敛。庞加莱在研究过程中阐明了不可积系统运动的复杂性。它的工作后来总结在三卷《天体力学的新方法》(1892，1893，1899)中。

我们简单解释一下小分母问题。N 体问题在“零级近似”下，忽略小质量之间的互相作用，成为 $N-1$ 个二体问题。每个二体问题给出一定频率的周期解。加入相互作用之后，如果某些频率之间存在简单的比例关系，就会出现共振现象。太阳系中就有不少这种接近共振的情形。例如，按角位移计算，木星每天运行 299.1 秒，而土星运行 120.5秒，几乎满足

$$2\omega_{木}-5\omega_{土}\approx 0$$

这类差值进入级数展开式，成为小分母，危及收敛性，不过韦尔斯特拉斯当年就曾指出，庞加莱本人也承认，这些论据并不足以证明级数就是不收敛的。

由于量子理论和相对论的迅猛发展，以及日新月异的技术进步，吸引了绝大多数物理学家的注意力，19世纪末就提出来的这个尖锐问题，被留给数学家们去静心研究。20世纪60年代初，终于出现了牛顿力学发展史上最重大的突破——KAM 定理。经典的太阳系稳定性问题，才在一定意义上得到了正面解决。近20多年，物理学家们一直在消化、引伸或者“破坏”这个定理。不过，为了稍事介绍 KAM 理论，我们必须回顾力学系统的可积分问题。

不可积分的力学系统

英国天文学家哈密顿 (W. R. Hamilton，1805～1865) 继续发展变分方法来研究牛顿力学。他用广义坐标和广义动量来表示系统的能量，现在通称为哈密顿函数。对于自由度为 N 的系统，N个广义坐标和 N 个广义动量，张成 $2N$ 维的相空间。牛顿力学成为相空间中的几何学。用现代观点说，这是一种辛(symplectic) 几何学，它源于哈密顿运动方程组的反对称性质。这是 $2N$ 个一阶常微分方程，来自后来以哈密顿命名的变分原理。哈密顿方程的数学形式便于对力学系统作一种重要分类。如果可以实现一系列坐标和动量的变换，在每一步变换下都保持相应的哈密顿方程成立，使得哈密顿函数最终只依赖于 N 个新的广义动量(这时特称为“作用量变量”)，而新的广义坐标 (“角度变量”)完全不出现在其中。这 N 个新的广义动量就是运动不变量(也叫运动积分)，而且运动方程可以简单地积分出来。即使不能明显解出来，也表示成为一批积分。这样的力学系统称为可积分的系统。可积分系统的典型行为是周期和准周期运动。所谓准周期运动，发生在各种频率成分之比不是有理数(如$\omega_{土}/\omega_{木}\approx 2/5$)时。

所有自由度为 1 的系统都是可积的。19世纪的数学家，象雅可比 (C. G. J. Jacobi, 1804～1815)，刘维 (J. Liouville)，卡瓦列夫斯卡娅(S. Kovalevski)，曾经花了大量精力去寻求可积系统。然而，N 体问题是不可积分的，甚至限制于平面之中的三体问题也是不可积分的。到了庞加莱的时代已经清楚，力学系统一般说来是不可积分的：除了最平常的运动积分 (如能量)，根本不存在 N个运动不变量。

不可积分系统的运动图象十分复杂，数学处理也极为困难。1941年西格尔(C. L. Siegel)曾经写道：“……这看来超乎已知分析方法的威力”。阿诺德(V. I. Arnold)在60年代初回顾历史时也说过：“动力学中的不可积分问题曾非现代数学工具所及”。其实，在庞加莱的著作中

对于不可积系统的运动图象已经有相当深刻的认识。然而，在绝大多数为物理系学生用的力学教科书中，只讲述可以积分甚至可以明显求解的实例。这就在一代代学者心目中描绘了牛顿力学的完完全全确定论形象。

那么，天下究竟有多少不可积分的力学系统呢？"一切可能的力学系统"不大好表示出来，可以先取相当普遍的某大类系统来加以研究。例如，取所谓解析哈密顿函数：它可以表示为广义动量和广义坐标的一切可能乘积的线性组合，不同的组合系数(可能包含大量零系数)对应不同的力学系统。如果允许每个系数沿一个坐标轴取值，它们就支撑起一个无穷维的空间，其每一点代表一个力学系统。在这样的空间中有多少点是可积分的系统呢？答案在40年代就由西格尔等人给出。原来，在一切解析哈密顿中，可积哈密顿的"测度"为零。这就是说，把全部可积分的点凑到一起，在上述空间中的体积仍然是零。反过来说，如果在这个空间中任意抓一个点，它几乎必定对应不可积分的力学系统。

事实上，可积分的系统如此稀少，以致不可能用它们来逼近不可积分的系统。这句话应当与有理数和无理数的关系对比。大家知道，在数轴上存在着可数无穷多个有理数，它们的测度为零，但是又是"稠密"的，即多到足以用来逼近无理数。然而，在解析哈密顿函数的空间中，可积分系统是"稀疏"的，少到不能用来逼近不可积分系统的程度。这就给不可积系统的研究带来更大的困难。

然而，不可积系统的运动图象究竟如何呢？

KAM 定理

对付难题的一种办法，是从容易的情形开始，一步一步往难处走。既然不可积系统的运动很难研究，那就先考察"弱"不可积、或者说近可积系统。假定系统的哈密顿函数可以分成两部分

$$H=H_0(J_i)+\epsilon V(J_i,\ \theta_i)$$

其中 H_0 是可积的，因此只依赖于作用量 J_i，V 是使 H 变得不可积的扰动，自然含有角度变量 θ_i。只要参数 ϵ 很小，导致不可积的附加项就很小。这类系统的运动图象如何呢？

问题的答案由苏联数学家科尔莫戈罗夫 (A. N. Kolmogorov) 在1954年指出，1963年他的学生阿诺德(V. I. Arnold)给出了对于解析哈密顿函数的完全证明。同时，莫塞尔(J. Moser)对于只存在一定阶导数(最初是333阶，后来有人弱化为5阶) 的哈密顿函数也给出了证明。因此，这个定理现在以KAM命名。

KAM定理的严格表述和证明，要用到拓扑、分析和数论等各方面的知识。我们只限于粗略地介绍一下它的内容，然后转而评述它的物理后果。KAM定理的大意是：在扰动(或者说非线性)较小、V 足够光滑、离开共振条件一定距离等三个条件下（其中每个条件都有确切的数学表述)，对于绝大多数初始条件，弱不可积系统的运动图象与可积系统基本相同。可积系统的运动限制在由 N 个运动不变量决定的 N 维环面上，弱不可积系统的绝大多数轨道仍然限制在稍有形变的 N 维环面上。这些环面称为不变环面或 KAM 环面 (KAMtori)。更确切些说，相空间分成大小两个体积非零的区域。在大区域中仍然保持着与可积系统类似的环面结构；初始条件如果落入小区域中，轨道就会相当不规则地迷走，运动表现得很不稳定。这些小的不稳定区的体积随着参数 ϵ 趋向零而消失，但只要 ϵ 不是零，它们的体积就是有限的。

从表面上看，这个定理的结论，一方面有些出乎意外，一方面又似乎平淡无奇。

出乎意外的是，人们(包括庞加莱) 原来以为小分母引起的共振现象会破坏可积系统的不变环面，而定理的结论恰好相反。这个问题须从两个层次理解。用未扰动的哈密顿函数 H_0 的种种频率，可以构造许许多多的组合，其中总会出现接近零的共振情况。然而，第一，只有组合系数较小的低阶(小于4阶) 的共振才有危险性，高阶共振根本不影响微扰级数的收敛性；第二，低阶共振的区域在相空间中是彼此隔开的，只有参数 ϵ 足够大时，它们才会互相重迭，导致"混沌"运动。

平淡无奇则在于，对大多数轨道而言，弱不可积性好象并没有带来本质上新的后果。不过，仔细一想就看出事情并非如此平淡。物理学中常常用理想气体或者简单谐振子的集合来描述处于平衡态的气体或固体。这样作的时候，通常要说明一个"显而易见"的事实：只要计入无限小的相互作用，这些理想的体系就会"热化"而趋近平衡。KAM定理告诉我们，事实可能完全不是这样！凡是 KAM 定理有效的情形，统计物理学的基本前提就不成立。遵从 KAM 定理的运动限于 N 维环面上，根本不能分散到 $2N-1$ 维的等能面上，哪里谈得上"等能面上处处概率相等"。下一节介绍遍历理论时，我们再继续讨论这个问题。

从天体力学的角度看，KAM定理给出了许多重要的正面结果。它的证明过程提供了成功地解决小分母问题的方法。它调和了韦尔斯特拉斯和庞加莱关于 N 体问题级数解是否收敛的争论，从而在较为广泛的意义下解决了太阳系的稳定性问题。当然，对于更为实际的条件，太阳系的稳定性问题仍未解决。

自由度为 N 的保守系统，具有

$2N$ 维的相空间。能量守恒条件使运动首先限于 $2N-1$ 维的等能"超面"上，KAM 定理的成立进一步把它局限到 N 维环面上。这些N维环面能否成为等能面的边界 ($2N-2$ 维)，把少量迷走轨道限制在环面两侧，从而约束一下运动的随机性呢？这就必须要求 $N \geqslant 2N-2$，它只在 $N \leqslant 2$ 时成立。当自由度大于 2 时，即使 KAM 定理的条件完全成立，这些迷走轨道也会从环面的一侧弥散到另一侧，给运动图象添加新的随机成分。这叫作阿诺德扩散。它是在大加速器中造成束流不稳定和高速粒子损失的原因之一，决不仅是纯理论概念。

物理学家们更关心 KAM 条件不成立时会发生什么情况。既然这"非现代数学工具所及"，人们就求助于另一种新式武器——现代电子计算机。伊依 (M.Hénon)、福特 (J. Ford) 等人作了大量数值实验，发现破坏任何一个 KAM 条件，运动图象都变得更为"混沌"。例如，参数 ϵ 增大的过程中，环面逐个破坏。每个环面都是由频率之比为无理数的准周期运动造成的，越难用有理数逼近的无理数，相应的环面坚持得越久。逼近最慢的最"高贵"的无理数就是黄金比 $(\sqrt{5}-1)/2 \simeq 0.618\cdots$，它对应最后消失的一个环面。其实，环面才消失时在原来的位置上只是出现了大大小小的空隙，它们具有康托尔(G. Cantor)集合的结构，仍然使迷走轨道的扩散受到一些限制。这些 KAM 环面剩下的"魂"，有时就叫作康托尔环面 (Cantori)。KAM环面的破坏过程，可以用重正化群的方法研究。(参见本刊38卷1期9～17页。)

数学家们早就证明，KAM 环面破坏时，要出现个数相同的"椭圆"和"双曲"型的不动点或周期点。椭圆点附近是稳定的周期运动。在双曲点附近存在稳定和不稳定的"不变流形"。如果不稳定流形离开双曲点后，最终又回到它附近，其间会和稳定流形发生无穷多次横截相交。这些交点称为同宿点。出现一个同宿点，就会有无穷多个同宿点。如果上述图象发生在不同的双曲点之间，则称为异宿点。同宿点和异宿点的存在，使得运动状态极为敏感地依赖于初始条件。毫厘之差，就会使轨道从稳定流形落到不稳定流形或者反之，导致不同的长时间行为。庞加莱早在其"天体力学的新方法"第三卷中就描写了同宿和异宿轨道，意识到它们使运动图象变得极为复杂。只是现代电子计算机才使得人们清楚看到这种情景怎样出现在一个个具体的数学模型和力学系统中。

KAM 定理是一种整体的关于稳定性的论断。轨道的不稳定性则是力学运动中出现随机性，不可预言性和混沌的原因。这就把我们带回到19世纪末物理学提出的另一个基本问题。

遍 历 理 论

19世纪下半叶，统计物理学的方法在麦克斯韦(J. K. Maxwell)、玻尔兹曼(L. Boltzmann)、吉布斯(J. V. Gibbs) 等人的工作中臻于完备。这种处理复杂系统的概率论的方法，与当时占统治地位的牛顿力学的确定论观点格格不入。必须在两者之间寻求联系，解决统计力学的奠基问题。

玻尔兹曼最早提出了遍历性假定：力学系统在运动过程中要经历等能面上一切可能的状态，因此沿轨道的长时间平均可以换成对等能面上各种状态的平均。早就知道，遍历假定的这种原始提法并不普遍成立，具体系统是否遍历更难判定。这是留给数学家们去静心研究的另一类难题。最近二三十年遍历理论有了重大进展。这些进展使它离开统计物理学的基础越来越远，却成为研究复杂的力学系统和更一般的微分动力系统的强大工具。遍历理论的进展有两个方面。

一方面，动力系统的遍历性质分成许多层次。最低的层次是狭义的"遍历"，上面还有"混合"、科尔莫戈罗夫流(K 流)、伯努利流等等，愈往上随机性质愈强。处在上面的层次必定具有下面各层的遍历性质，但反之不成立。例如，存在着是 K 流而非伯努利流的动力系统，它当然是遍历和混合的。

另一方面，证明了一批具体系统的遍历或非遍历性质。例如，有限个耦合谐振子系统是不遍历的(这是 KAM 定理的直接后果)。但封在盒子中的两个刚球，却是遍历甚至混合的系统。这后一个例子，恰好反映了 KAM 定理条件中光滑性要求的重要意义。刚球作用势非解析，因而 KAM 定理并不成立。

遍历性并不取决于自由度大小，而是反映着运动轨道不稳定性的程度。简单的"遍历"并不要求邻近轨道相互分离，它们可以在等能面上并肩游历。混合性则要求时间足够长之后，出发点邻域中的轨道要弥散到等能面上任何一个点附近。犹如一滴墨汁落入水杯拌匀之后，任意取出一滴水都会含有墨汁分子。但是，混合性并不限制相邻轨道的分离速率。到了 K 流这一层，任何在初始时刻相邻的轨道，下一时刻就必须以指数方式分开。表征相邻轨道分离速度整体性(即沿轨道长时间平均得到)的特征量，有李雅普诺夫 (A. M. Lyapunov) 指数，K 熵和各种信息维数。K 流的基本特征是具有正的 K 熵，而 K 熵在一定意义上是所有正的李雅普诺夫指数之和。这样，我们就有了区分简单和复杂力学系统的定量判据。如果相空间中每个点都导致零熵，系统是简单的。如果某

些测度不为零的初值集合给出正K熵，则运动开始具有随机性。上节介绍KAM定理时，提到有限的小区域中存在着迷走轨道，定量的特征就是它们导致正的K熵。

必须指出，K熵以及遍历理论中引入的其他熵，与热力学熵根本不同。热力学熵本质上是静态的，是对状态划分和计数的结果，而K熵和动力系统的整个时间演化过程联系着。这两者之间的关系，目前并不完全清楚。

我们多次提及运动的随机性。这种随机性是不可积力学系统的内禀性质，并不来自随机外力、环境涨落、噪声干扰等外界因素。牛顿力学具有内在的随机性，具有确定论传统的天体力学家们也开始接受这一命题。

天体力学是确定论科学吗？

这是当代著名的天体力学家，《轨道理论》一书的作者策比黑利(V. Szebehely)在同事们为他祝贺六十寿辰时提出的问题。他甚至指出，那些坚持确定论的人是在自欺欺人，不是推动科学前进，而是倒退。

确实，天体力学中已经有若干个认真研究过的内在随机性的实例。我们从三体问题中引证两个。

第一个例子是苏联数学家西特尼科夫(K. Sitnikov)、阿列克赛耶夫(V. M. Alekseev)等人在60年代证明的。取两个相同的大质量M，它们有一个运动平面。再拿一个小质量m，令它在穿过两个大质量的质心并垂直于上述平面的直线上运动。质点m在一定高度以一定初速开始运动后，可能在时刻T_1、T_2、… T_n多次经过此平面，然后逃逸，也可能一直来回荡下去。西特尼科夫等人的结果可以尖锐地表述为：先给定任意个随机数，存在相应的初始条件，使得质点m依次以这些随机数为时间间隔，穿过大质量的轨道平面，然后逃逸掉。换言之，无论对m的运动历史作多少观测，都无法知道下一次是返回还是逃逸。这里，牛顿力学已经失去对未来运动的可预测性。

第二个例子是策比黑利本人在1981年给出的。考虑小质量m在大质量M_1和M_2作用下的运动，忽略小质点对大质点的影响，而且把运动限制在平面内。这是自由度为2的平面三体问题，由一个4阶常微分方程组描述。在力学系统的某些平衡点附近，小质点可能作范围有限的摆动(天文学中称为“天平动”)也可能离开平衡点远去。策比黑利等试图用精密的数值计算确定这两种行为的边界。结果发现两类初值之间并没有光滑、连续的边界：摆动初值附近有导致逃逸的初值，而逃逸点附近又存在摆动点，初值的微小差别会导致定性的不同结果。

这两个例子，一个解析、一个数值，都是精密可信的科学结论。它们并没有引用任何外来的随机因素，一切都发生在牛顿力学的“确定论”框架里。这两个例子又都是能量守恒的保守系统。更为现实的物理模型应是耗散系统，例如流体。牛顿虽然在《原理》一书中曾经讨论过流体的运动，流体力学的建立却是19世纪的事。流体力学方程具有宏观层次上的内在随机性，它应有助于认识湍流的发生机制。这是当前甚为活跃的混沌研究领域。它正在从力学系统借用同宿、异宿、遍历种种概念。探讨这些问题，会使我们离题太远。

有限性和随机性

纯粹确定论的描述和纯粹概率论的描述都是理想化的极限，隐含着承认某种无穷过程是可以实现的。

如果说牛顿力学给出的质点运动轨道是确定的，这就意味着能以无穷精密的测量来确定和区分轨道。只要承认在人类的任何历史发展阶段测量精度都是有限的，科学技术的进步可以缩小测量误差，但不能作到误差为零，那么就可以构造出随机的轨道，它原则上不能靠测量手段同确定轨道区分(只要在牛顿轨道上附加小于测量精度的随机涨落就成了)。

同样，一个完全随机的过程应当能通过无穷长的随机性检验。以均匀分布在(0, 1)区间上的随机数为例。如只取来N个随机数，就只能要求它们在一定限度内通过随机性检验，允许存在量级约为$N^{-1/2}$的统计涨落。只要N不是无穷大，就谈不上纯随机数，就可以设计某种确定论过程来产生N个数，使它们同样好的通过随机性检验。

承认有限测量精度和有限的随机性检验，并不是对人类认识能力的侮辱。事实上自然界的许多基本规律，都可以用否定形式表述：不能制造出第一类和第二类永动机，温度不可能降到绝对零度，不能区分引力质量和惯性质量，质量有限的物体不能以光速运动，微观粒子的坐标和动量不能同时精确测定，等等。看来，承认某种有限性原则(其确切表述还有待于科学发展的启示)，我们才能从确定论和概率论的对立中解脱出来，建立更符合客观世界的理论物理体系。

在一定意义上，现代数学的状况要比物理学好。20世纪初的数学，曾是分析、代数、几何三个正统的分枝(及其交叉)加上“四不像”的概率论。自从30年代用测度论建立了概率论的公理体系，使它成为现代数学的一个平等的组成部分。现在概率论和随机过程的概念在许多数学领域中发挥着作用。诸如

跟踪·扫描

敦煌石窟文物的科学保护

始建于公元366年(前秦建元2年)、位于我国甘肃省河西走廊西端的敦煌莫高窟是我国灿烂的传统艺术宝库，至今尚存有历代洞窟492个，壁画约45000余平方米，彩塑2000余身，并有唐宋木构窟檐5座，不少洞窟地面还铺着精美的古代花砖。这是一座世界上规模最大、内容最丰富、时间延续最长的佛教艺术之宫。

莫高窟石窟群开凿于敦煌鸣沙山东麓的断崖上。1000多年来，由于种种地质、气候、环境以及人为的因素致使这一艺术宫殿毁坏严重。由于崖体坍塌造成洞窟被埋或被堵，由于地震等造成彩塑倒覆，由于日蚀风剥人迹不断造成花砖破损。破损及病害最为严重的是洞窟中的壁画，由于种种原因，许多壁画的地仗层（石窟表面人工砌作的泥壁）大面积脱落、泥层酥松返碱、起甲、褪色变色、发霉、烟雾熏黑，再加上长期以来佛教徒朝拜、游人不断，不时磨擦壁画，到处凿刻提名，更难尽叙。

解放以后，党和政府非常重视敦煌文物的保护工作，1950年成立了敦煌文物研究所并开始有计划地对敦煌石窟文物进行了保护和研究。自60年代初期至今已对400余座洞窟进行了四期大规模的加固工程，基本消除了崖体崩塌的危险。

至于窟内壁画，其病害多且面积大，在上述6种病害中尤以起甲和酥碱最为严重且危害也最大。这些染病壁画有的起泡、有的龟裂、有的破碎成鳞片状、有的已酥成豆腐渣状稍触即碎、有的则已全部脱落成空壁。为了修复这些壁画，曾陆续采用动物胶、天然树胶和聚乙烯醇、聚醋酸乙烯乳液由改制的注射器对起甲部位进行注射粘合，效果良好。20多年来共修复2000余平方米。酥碱部位则采用聚乙烯醇缩丁醛配以较大浓度的粘合剂并补做地仗层进行修复。对于大面积脱落的壁画则采用拉锚加固法，以长短适宜的水平及斜锚杆从不同方向穿过裂缝岩体，将即将脱落的岩体锚固在稳定岩体上，然后在产生脱落的壁画表面用钢板或有机玻璃十字架固紧在锚杆上。对于烟熏壁画，近年来采用碳酸钠水溶液进行清洗，成效显著。另外还采用X射线衍射和X射线荧光分析法对莫高窟、西千佛洞等11个朝代的44个洞窟中的红、蓝、绿、黄、白、黑及棕色变色等293个颜料样品进行了系统分析，分别得出了各种矿物颜料的化学成分，通过对颜料物化性能以及变色原因的探讨，初步认为是由于不稳定价态的四氧化三铅在长期光氧化作用下逐渐形成稳定的二氧化铅所致。近年来正在开展铅颜料氧化变色的模拟实验，争取从理论和实践上找出壁画颜料变色的真正原因。

莫高窟现存的5座唐末宋初石窟木构窟檐是我国至今为数不多的早期木构建筑实物。为了使其能长期完整地保持本来的历史面貌，曾采用有机高分子醇酸树脂清漆对其进行了涂刷保护。经9年观察，涂料成膜性能好、防自然老化能力强、耐磨强度高，涂刷后窟檐更显得古朴典雅，保护效果非常显著。

莫高窟的部分洞窟、殿堂遗址和台阶都铺着隋、唐、宋、西夏时期的花砖，共计20000多块、20余种纹样。为了保存这批珍贵文物，曾用生桐油和高分子聚氨酯清漆对部分花砖进行渗透加固试验。经8年自然磨损检验，从对比花砖试块上明显看出，经涂刷加固的部位依然如故，未加固的部位已明显磨损。

另外还对倒覆的彩塑进行了的扶正加固，并对其内部糟朽的木架进行了脱胎换骨改造。由于不少洞窟的甬道因历代重修而形成二层、三层甬道，因而，又对个别表层甬道壁画进行了整体揭取迁移试验，即完整地将壁画向外推移到甬道口新的位置上重新加以固定，这样既保存了被搬迁甬道的原貌和壁画的完整，同时也完好地再现了被遮盖在下层甬道内的壁画。

（王进玉）

“几乎处处”、“除去测度为零的集合”、“在一般 (generic) 条件下”这些提法，早已成为有严格涵义的现代数学语言。

相比之下，物理学中自牛顿以来的传统就更为推崇确定论描述，而把概率论作为“不得已而为之”的补充，以至两套描述长期泾渭分明。随着对不可积系统中内在随机性的认识，这种情况正在发生变化。牛顿力学有两个公认的推广，$1/c\neq0$ (c是光速) 时是相对论力学，普朗克常数 $h\neq0$ 时是量子力学。是否存在着第三种推广，存在着另一个基本常数，存在着像光速不变那样的基本原理呢？目前只能作一些猜测。如果能从微观上定义热力学熵，熵不为零的系统是“复杂系统”，必须引用统计描述。玻尔兹曼常数 k 应以某种方式自然地进入理论体系，相应的基本物理原理可能与前面论及的有限性原则有关。k 趋近零时，熵和温度都会从理论中消失。果真如此，则经典的牛顿力学就是 $h=k=1/c=0$ 的极限情况。它的延伸是量子力学($h\neq0$)，相对论力学($1/c\neq0$) 和复杂系统的统计力学($k\neq0$)。总之，牛顿力学经过300年发展，人们才开始对它有比较完整的认识。这个经典的领域，仍然有原则性的难题和挑战。

（本文基于作者1986年在北京大学一次报告的部分内容）