逻辑代数与
电子计算机简介

湖南黔阳师专 广东惠阳师专
湖北襄阳师专 吉林白城师专 合编

编者的话

根据1982年昆明全国师专数学专业教学大纲审定会议上所审定的“逻辑代数与电子计算机简介”大纲，我们协作编写了这本师专校际交流的试用教材。也可供各类进修学院（校）使用。

本书共分六章，第一章简单介绍数的进位制。第二、三、四章为逻辑代数的基本理论及应用。第五章简介电子计算机。第六章介绍基本BASIC算法语言。

本书教学要求是：使学生掌握逻辑代数的基本理论；了解电子计算机的基本工作原理并能使用BASIC语言上机算题。

讲授本书的全部内容共需68学时。适于三年制专科使用。如果删去书中带*的部分，则只需54小时。适于二年制专科使用。

本书是采用分工合作的方式进行编写的。逻辑代数部分由湖南省黔阳师专屈义安和广东省惠阳师专黄凯达编写；电子计算机和BASIC算法语言部分由湖北省襄阳师专田传绵和吉林省白城师专刘执中编写。

在编写过程中，我们得到了编者所在学校的大力支持，尤其是黔阳师专为我们提供了良好的条件，使书稿得以早日付印。

在编写中，我们还参阅了有关资料及兄弟院校所编写的

由于编者水平所限，加之时间匆促，因此，书中错误在所难免。望本书的使用者和读者批评指正，以便进一步修改。

编　者

一九八三年元月

于湖南省怀化市

三月定稿于西安

目　　录

第一章　二　进　制

第二章　逻辑代数的基本理论

第三章 逻辑函数的化简

第四章 逻辑代数的应用

第一章　二进制

本章首先从十进制记数法的讨论出发，导出一般 p 进制数和其它具体的数制，而重点是讨论计算机中所采用的二进制数。

§1·1　进位制记数法

通常我们采用的记数方法，是十进制记数法。使用 0，1，2，…，9 等十个阿拉伯数码，根据“满十进一”的进位法则记数。一个十进制整数 $N_{(10)}$ 可表为

$$N(10)=a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 a_0 \qquad (\text{其中 } 0\leqslant a_i\leqslant 9)$$

$$=a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+a_2\times 10^2$$

$$+a_1\times 10+a_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

仿照十进制，我们可以推广到任意 p 进制（p为大于1的正整数）的情形。即采用p个不同的整码和“满 p进一”的进位原则来记数。

且有　$10_{(p)}=p\text{个}1=p_{(10)}$

$100_{(p)}=p\text{个}10_{(p)}=p\times p^2{}_{(10)}$

$1000_{(p)}=p\text{个}100_{(p)}=p\times p^2=p^3{}_{(10)}$

……

$\underbrace{10\cdots0}_{n\text{个}}{}_{(p)}=p\text{个}1\underbrace{0\cdots0}_{(n-1)\text{个}}=p\times p^{n-1}=p^n{}_{(10)}$

所以，一个$n+1$一位p进制整数$N_{(p)}$表为：

$N_{(p)}=a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0{}_{(p)}$

$$=(a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+a_1\times 10+a_0)_{(p)}\cdots(2)$$
$$=(a_n\times p^n+a_{n-1}\times p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0)_{(10)}$$
其中a_i是0，1，…，（$p-1$）中的任一个数码。

当$p=2$时，即可得到电子计算机中所采用的，以0，1作数码的二进制。它的进位原则是“逢二进一”。所以，任一个$n+1$位二进制整数$N_{(2)}$可表为：

$$N_{(2)}=a_na_{n-1}\cdots a_1a_0 \qquad (a_i=0\text{或}1)$$
$$=(a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+a_1\times 10+a_0)_{(2)}$$
$$=(a_n\times+2^na_{n-1}\times 2^{n-1}+\cdots+a_1\times 2+a_0)_{(10)}$$

当$p=8$时，可得到八进制。通常用0，1，2，…，7等八个数字作数码。

为了熟悉二进制、八进制与十进制之间的关系，我们列出下表作比较（表1·1）

表1·1

十进制	二进制	八进制
0	0	0
1	1	1
2	10	2
3	11	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	10
9	1001	11
10	1010	12
11	1011	13
12	1100	14
13	1101	15
14	1110	16
15	1111	17
16	10000	20

在十进制记数法中，所采用的十个数码的个数，叫十进制的**基数**。所以，十进制的基数是十。一般地，p 进制采用p个不同数码，它的基数是p。

根据进位原则，在一个数中，同样一个数码，若在不同的数位（位置）上，则它们所代表的数值是不同的。但它们都有固定的值，即各数位上的位置值。这些固定的位置值叫做**权**。例如在十进制中，第二位上的权的值是十，第三位上的权的值是一百，……第 n位上的权的值是10^{n-1} 等等。在二进制中，第二位上的权的值是 2，第三位上的权的值是2^2，第n位上的权的值是2^{n-1}。一般p进制，第 n 位上的权的值是p^{n-1}。故（1）和（2）又叫做**按权展开**的数式。

§1·2 常用进位制之间的互相转换

计算机中常要进行数制之间的转换，下面介绍几种常用数制间的转换方法。为了简便，我们有时把十进制转换为 p 进制称为**十化p**；把p进制转换为十进制称为**p化十**。

一、p进制转化为二进制

根据进位原则，在十进制中若引进负整指数幂后，则一个具有有限小数位的十进混合小数$S_{(10)}$可以表示为：

$$S_{(10)}=a_na_{n-1}\cdots a_1a_0.a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m} \qquad (0\leqslant a_i\leqslant 9)$$

$$=a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+a_1\times 10+a_0\times 10^0$$

$$+a_{-1}\times 10^{-1}+\cdots+a_{-m}\times 10^{-m}$$

同理，引进负整指数幂后，一个具有有限小数位的 p 进制的混合小数$S_{(p)}$可表示为：

$$S_{(p)}=a_na_{n-1}\cdots a_1a_0.a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m(p)}$$

$$=a_n\times p^n+a_{n-1}\times p^{n-1}+\cdots+a_1\times p+a_0\times p^0$$
$$+a_{-1}\times p^{-1}+\cdots+a_{-m}\times p^{-m}\quad(1\leqslant a_i\leqslant p-1)$$

这样，把一个p进制数转换为十进制数，可以用p的各次方幂乘以该数位上的数字再求和得到。

例1 把二进数$10110.011_{(2)}$化为十进数。

解 $10110.011_{(2)}=1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+$
$$+0\times2^0+0\times2^{-1}+1\times2^{-2}+1\times2^{-3}$$
$$=16+4+2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$
$$=22\frac{3}{8}{}_{(10)}$$

例2 把八进制数$7506.304_{(8)}$化为十进数。

解 $7506.304_{(8)}=7\times8^3+5\times8^2+0\times8^1+6\times8^0$
$$+3\times8^{-1}+0\times8^{-2}+4\times8^{-3}$$
$$=3584+320+6+\frac{3}{8}+\frac{1}{128}$$
$$=3910\frac{49}{128}{}_{(10)}$$

二、十进制数转换为p进制数

先考虑十进制数为整数的情形。设给出整数$N_{(10)}$且其化成p进制数后有如下等式：
$$N_{(10)}=a_np^n+a_{n-1}\times p^{n-1}+\cdots+a_2\times p^2+$$
$$+a_1\times p+a_0$$
则$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0$即为所求的$p$进制数。现在的问题是求出各数位上的$a_i$值来。

根据上式有：

$$N_{(10)}=(a_n\times p^{n-1}+a_{n-1}\times p^{n-2}+\cdots+a_2\times p+a_1)p+a_0$$

故$N_{(10)}$除以p所得商为：

$$a_n \times p^{n-1} + a_{n-1} \times p^{n-2} + \cdots + a_2 \times p + a_1$$

而余数为a_0。设商用q_1记之，则

$$q_1 = a_n \times p^{n-1} + a_{n-1} \times p^{n-2} + \cdots + a_2 \times p + a_1$$
$$= (a_n \times p^{n-2} + a_{n-1} \times p^{n-3} + \cdots + a_2)p + a_1$$

故q_1除以p所得的商为：

$$q_2 = a_n \times p^{n-2} + a_{n-1} \times p^{n-3} + \cdots + a_2$$

而余数为a_2。故a_2又为 q_1除以p后所得的余数。如此类推。直到商数等于0为止。便可得到所求的一列数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$。把这列数顺序倒置联写，即为所求的p进制整数。

$$N_{(10)} = a_n a_{n-1} \cdots a_0{}_{(p)}$$

这种方法叫做“p除取余”法。

例 3　把十进制数13化为二进制数。

解　$13 \div 2 = 6$　　余 $1 = a_0$

$6 \div 2 = 3$　　余 $0 = a_1$

$3 \div 2 = 1$　　余 $1 = a_2$

$1 \div 2 = 0$　　余 $1 = a_3$

$\therefore\ 13_{(10)} = a_3 a_2 a_1 a_0{}_{(2)} = 1101_{(2)}$

上述解题过程，可以写成下面较简单的格式：

$$\begin{array}{r|l} 2 & 13 \\ \hline 2 & 6 \cdots \text{余数} 1\ (a_0) \\ \hline 2 & 3 \cdots \text{余数} 0\ (a_1) \\ \hline 2 & 1 \cdots \text{余数} 1\ (a_2) \\ \hline & 0 \cdots \text{余数} 1\ (a_3) \end{array}$$

$\therefore 13_{(10)} = a_3 a_2 a_1 a_0{}_{(2)} = 1101_{(2)}$

例 4　把十进制数356转化为二进制数。

解　$2\,\underline{|\,356}$

$2\,\underline{|\,178}$ …余数 0

$2\,\underline{|\,89}$ …余数 0

$2\,\underline{|\,44}$ …余数 1

$2\,\underline{|\,22}$ …余数 0

$2\,\underline{|\,11}$ …余数 0

$2\,\underline{|\,5}$ …余数 1

$2\,\underline{|\,2}$ …余数 1

$2\,\underline{|\,1}$ …余数 0

0 …余数 1

$\therefore\quad 356_{(10)}=101100100_{(2)}$

例 5　把$750_{(10)}$转换为八进制数。

解　用“八除取余”法：

$8\,\underline{|\,750}$

$8\,\underline{|\,93}$ …余数 6

$8\,\underline{|\,11}$ …余数 5

$8\,\underline{|\,1}$ …余数 3

0 …余数 1

$\therefore\quad 750_{(10)}=1356_{(8)}$

现在进一步考虑把十进制纯小数化成p进制数。设给出十进制纯小数$D_{(10)}$。化成p进制后的关系式为：

$$D_{(10)}=a_{-1}\times p^{-1}+a_{-2}\times p^{-2}+\cdots+a_{-m}\times p^{-m}$$
$$=a_{-1}\times\frac{1}{p}+a_{-2}\times\frac{1}{p^2}+\cdots+a_{-m}\times\frac{1}{p^m}$$

则$0.a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}$即为所求的$p$进制数。为了求出$a_i$，可将上

式两端同乘以p，得

$$D_{(10)}\times p=a_{-1}+\left(a_{-2}\times\frac{1}{p}+a_{-3}\times\frac{1}{p^2}+\cdots+a_{-m}\times\frac{1}{p^{m-1}}\right)$$

因为括号里面的$a_{-2},a_{-3},\cdots,a_{-m}$等是$p$进制中采用的$p$个数码中的一个数码，它们都是小于$p$的。所以，括号里的和式是一个纯小数。对照等式左、右两边，则$D_{(10)}\times p$的积中，整数部分即为a_{-1}。令括号里的纯小数为S_1，则

$$S_1=D_{(10)}\times p-a_{-1}=a_{-2}\times\frac{1}{p}+a_{-3}\times\frac{1}{p^2}+\cdots+$$

$$+a_{-m}\times\frac{1}{p^{m-1}}$$

又将上式两端同时乘以p，得

$$S_1\times p=a_{-2}+\left(a_{-3}\times\frac{1}{p}+\cdots+a_{-m}\times\frac{1}{p^{m-2}}\right)$$

同理，上式括号中是一个纯小数。即a_{-2}是$S_1\times p$的积的整数部分。

如此下去，可以求得一列数$a_{-1},a_{-2},\cdots,a_{-m}$。把它们写成$0.a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}$，就是所求的$p$进制数。这个方法叫做“p乘取整”法。

例6 将$0.8125_{(10)}$化为二进制数。

解 用“二乘取整”法　　　　整数部分

$0.8125\times2=1+0.625$　　　$1=a_{-1}$

$0.625\times2=1+0.25$　　　$1=a_{-2}$

$0.25\times2=0+0.5$　　　$0=a_{-3}$

$0.5\times2=1$　　　$1=a_{-4}$

$\therefore\ 0.8125_{(10)}=0.1101_{(2)}$

上述解题过程可以写成较简单的格式

$$
\begin{array}{r}
0.8125 \\
\times \quad\quad 2 \\
\hline
\boxed{1}.6250 \cdots a_{-1}=1 \\
\times \quad\quad 2 \\
\hline
\boxed{1}.2500 \cdots a_{-2}=1 \\
\times \quad\quad 2 \\
\hline
\boxed{0}.5000 \cdots a_{-3}=0 \\
\times \quad\quad 2 \\
\hline
\boxed{1}.0000 \cdots a_{-4}=1
\end{array}
$$

$\therefore\ 0.8125_{(10)}=1101$

例 7 将十进制小数0.861328125化为八进制。

解

$$
\begin{array}{r}
0.861328125 \\
\times \quad\quad 8 \\
\hline
\boxed{6}.890625000 \\
\times \quad\quad 8 \\
\hline
\boxed{7}.125000 \\
\times \quad\quad 8 \\
\hline
\boxed{1}.000
\end{array}
$$

$\therefore\ 0.861328125_{(10)}=0.671_{(8)}$

一般说来，有限位的十进制纯小数转化为p进制纯小数后，不一定是有限位的。我们可以按需要，用$\left[\frac{p}{2}\right]-1$舍，$\left[\frac{p}{2}\right]$入的方法，（这里$\left[\frac{p}{2}\right]$表示$\frac{p}{2}$的整数部分）将其精确到某位。例如把十进制数化为二进制数可用“0舍1入”法，而十化八时则可用“3舍4入”法。

例 8 将$0.357_{(10)}$化为二进制小数，精确到小数点后

四位。

解

$$\begin{array}{r} 0.357 \\ \times\quad 2 \\ \hline \boxed{0}.714 \\ \times\quad 2 \\ \hline \boxed{1}.428 \\ \times\quad 2 \\ \hline \boxed{0}.856 \\ \times\quad 2 \\ \hline \boxed{1}.712 \\ \times\quad 2 \\ \hline \boxed{1}.424 \end{array}$$

$\therefore\ 0.375(_{10}) = 0.01011\cdots(_2) \approx 0.0110(_2)$

把一个十进制混小数化为 p 进制数时，可将其整数部分和分数部分分开转换。

例 9 将41.75($_{10}$)化成二进制数

解

$$\begin{array}{r|l} 2 & 41 \\ \hline 2 & 20 \ \cdots\text{余数 }1 \\ \hline 2 & 10 \ \cdots\text{余数 }0 \\ \hline 2 & 5 \ \cdots\text{余数 }0 \\ \hline 2 & 2 \ \cdots\text{余数 }1 \\ \hline 2 & 1 \ \cdots\text{余数 }0 \\ \hline & 0 \ \cdots\text{余数 }1 \end{array}$$

$\therefore\ 41(_{10}) = 101001(_2)$

$$\begin{array}{r} 0.75 \\ \times\quad 2 \\ \hline \boxed{1}.50 \\ \times\quad 2 \\ \hline \boxed{1}.00 \end{array}$$