研究简报

中、小地震体波的频谱和纵、横波拐角频率比

陈运泰　王妙月　林邦慧　刘万琴

（中国科学院地球物理研究所）

由地震体波的频谱可以测定许多有意义的震源参数，如震源尺度、地震矩、应力降和错距等．为了运用体波的频谱测定这些震源参数，需要计算地震体波的理论频谱．它可以通过计算断层面上的预应力突然解除时的地震波辐射问题来求得．一个简单的情形便是圆盘形断层面上的预应力突然解除时的地震波辐射问题．与此相应的静力学解，Keilis-Borok[1] 已经求出，可是动力学解迄未得到．

严格地处理这个动力学问题在数学上比较困难．但从应用的角度，可以利用静力学解对动力学解作必要的、合理的限制．根据静力学解所提供的圆盘形断层面上错距不均匀分布的特点，可计算当破裂速度有限时，圆盘形断层面所辐射的地震体波的理论频谱．并由此导出测定震源参数的关系式，进而分析纵、横波拐角频率比，探讨由纵、横波拐角频率和初动半周期来测定震源所在处的纵、横波速度比的方法．

一、中、小地震震源的位错模式

以均匀、各向同性和完全弹性的无限介质中的圆盘形位错面表示中、小地震的断层面．采用直角坐标系 $x_1x_2x_3$，原点与圆盘中心重合，x_3 轴垂直于断层面．以 $\boldsymbol{u}(Q;t)$ 代表坐标为 $x_i(i=1,2,3)$ 的 Q 点的位移向量，t 代表时间．以 $F(\omega)$ 代表任一时间函数 $f(t)$ 的频谱：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt, \tag{1}$$

式中 ω 表示圆频率．在无限介质中，任意形状的位错面 Σ 所辐射的地震波位移 $\boldsymbol{u}(Q;t)$ 的频谱 $\boldsymbol{U}(Q;\omega)$ 在远场近似地为[2]：

$$\boldsymbol{U}(Q;\omega)=\boldsymbol{U}_P(Q;\omega)+\boldsymbol{U}_S(Q;\omega),$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{U}_P(Q;\omega)=\dfrac{m_0}{4\pi\rho\alpha^3 r}\mathscr{R}_P e^{-i\frac{\omega}{\alpha}r}F_\alpha(\omega),\\[2ex] \boldsymbol{U}_S(Q;\omega)=\dfrac{m_0}{4\pi\rho\beta^3 r}\mathscr{R}_S e^{-i\frac{\omega}{\beta}r}F_\beta(\omega).\end{cases} \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{U}_P(Q;\omega)$ 和 $\boldsymbol{U}_S(Q;\omega)$ 分别表示 P 波和 S 波的远场位移谱；(r,θ,φ) 是观测点 Q 的球极坐标；ρ 是介质的密度；α，β 分别是纵、横波速度；m_0 是地震矩：

$$m_0=\mu\langle\Delta U\rangle S, \tag{3}$$

μ 是介质的刚性系数，S 是断层面面积，$\langle\Delta U\rangle$ 是静力学位错在断层面上的平均值；$\mathscr{R}_P$，$\mathscr{R}_S$ 分别是 P 波和 S 波的辐射图型因子，对于滑动向量与 x_1 轴方向一致的剪切位错，它们的表示式分别是：

$$\begin{cases}\mathscr{R}_P=\{\sin 2\theta\cos\varphi,\ 0,\ 0\},\\ \mathscr{R}_S=\{0,\ \cos 2\theta\cos\varphi,\ -\cos\theta\sin\varphi\};\end{cases} \tag{4}$$

$F_\alpha(\omega)$，$F_\beta(\omega)$ 是表示纵、横波频谱形状的函数．当破裂从圆盘中心开始，以速率 v_b 沿径向扩展时，表示频谱形状的函数是下面形式的积分：

$$F_c(\omega)=\frac{1}{S}\iint_\Sigma \frac{i\omega\Delta U(P;\omega)}{\langle\Delta U\rangle}\times e^{-i\frac{\omega}{v_b}\xi+i\frac{\omega}{c}\xi\sin\theta\cos(\phi-\varphi)}d\Sigma. \tag{5}$$

式中 c 表示 α 或 β；(ξ,ϕ) 是在 P 点的位错元 $d\Sigma$ 的平面极坐标；$\Delta U(P;\omega)$ 是 P 点的错距的频谱，可表示为：

$$\Delta U(P;\omega)=\Delta U(P)G(P;\omega). \tag{6}$$

本文 1976 年 3 月 5 日收到．

(6) 式中 $\Delta U(P)$ 是静力学位错，$G(P;\omega)$ 是震源时间函数 $g(P;t)$ 的频谱.

对于半径为 a 的圆盘形剪切破裂面，它上面的静力学位错分布是[1]

$$\Delta U(P)=U_m[1-(\xi/a)^2]^{1/2},\quad \xi\leqslant a. \tag{7}$$

U_m 是圆盘中心处的位错，即最大错距. 由(7)式可知，$\langle\Delta U\rangle=\frac{2}{3}U_m$，从而

$$F_c(\omega)=\frac{3}{2S}\int_0^a d\xi\int_0^{2\pi} i\omega G(P;\omega)\times\xi[1-(\xi/a)^2]^{1/2}e^{-i\frac{\omega}{v_b}\xi+i\frac{\omega}{c}\xi\sin\theta\cos(\psi-\varphi)}d\psi. \tag{8}$$

当 $g(P;t)$ 是单位函数时，$i\omega G(P;\omega)=1$，此时通过积分变数的代换 $\zeta=\xi/a$，并利用 Bessel 函数的积分表示式，可将 $F_c(\omega)$ 化为：

$$F_c(\omega)=3\int_0^1 e^{-i\zeta y}J_0(\zeta x_c)(1-\zeta^2)^{1/2}\zeta d\zeta. \tag{9}$$

式中 J_0 是零阶 Bessel 函数，$y=\omega a/v_b$，$x_c=\omega a\sin\theta/c$.

(9) 式便是圆盘形位错源所辐射的体波远场位移谱的积分表示式.

二、圆盘形断层辐射的地震波远场位移谱

1. 有限破裂速度情形

当破裂速度有限时，圆盘形断层辐射的地震波远场位移谱为：

$$F_c(\omega)=3i\left(\frac{\partial K_c}{\partial y}+\frac{\partial^3 K_c}{\partial y^3}\right), \tag{10}$$

$$K_c(\omega)=\frac{\pi}{2}J_0(y)J_0^2(x_c/2)+\pi\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(y)J_k(x_c/2)J_{-k}(x_c/2)-i\pi\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}(y)J_{k+1/2}(x_c/2)\times J_{-k-1/2}(x_c/2). \tag{11}$$

这个结果是资料 [3] 中第 335 页的公式(17)和第 336 页的公式(27)的一个推广. 顺便指出，资料 [3] 第 335 页的公式(17)中，等号右边的 Bessel 函数 $J_{\frac{\nu}{2}-n-\frac{1}{2}}$ 的宗量应当是 $a/2$，而不是 a.

分析 (10), (11) 式，可以对体波频谱的特征有个了解. 首先，当 $|x_c|\gg 1$ 时，利用 Bessel 函数的渐近展开式以及其生成函数的展开式，可得

$$F_c(\omega)\sim 3x_c^{-3}(\sin x_c-x_c\cos x_c-i\varepsilon_c x_c\sin x_c)e^{-iy}, \tag{12}$$

其中 $\varepsilon_c=3y/2x_c=3c/2v_b\sin\theta$.

其次，当 $|x_c|\ll 1$ 时，根据 Anger-Weber 函数的定义，可将 $K_c(\omega)$ 近似地表示为

$$K_c(\omega)\doteq\frac{\pi}{2}[J_0(y)+i\mathbf{E}_0(y)], \tag{13}$$

式中 J_0 是零阶 Bessel 函数，$\mathbf{E}_0(y)$ 是零阶 Weber 函数.

借助 Anger-Weber 函数的级数展开式，可由 (10) 和 (13) 式得到 $F_c(\omega)$ 在 $|x_c|\ll 1$ 时的级数展开式：

$$F_c(\omega)\doteq\frac{3\pi}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{m\pi i}{2}}}{\left[\Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right)\right]^2}\times\left(\frac{m+1}{m+3}\right)\left(\frac{y}{2}\right)^m. \tag{14}$$

再次，在 $|x_c|\ll 1$ 的情况下，若 $|y|\gg 1$，可以利用 J_0 和 $\mathbf{E}_0$ 的渐近展开式，由 (11) 和 (10) 式得到 $F_c(\omega)$ 在这情形的渐近展开式：

$$F_c(\omega)\sim 3(\pi/2)^{1/2}y^{-3/2}e^{-i(y-3\pi/4)}. \tag{15}$$

$F_c(\omega)$ 作为 θ 的函数，对于 $\theta=\pi/2$ 是对称的，即 $F_c(\omega;\theta)=F_c(\omega;\pi-\theta)$，所以，下面仅对 $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ 的情形进行讨论. 由以上三种情况得到的结果可知，当 $\theta=0$ 时，振幅谱 $|F_c(\omega)|$ 的高频趋势和 $\omega^{3/2}$ 成反比. 当 θ 很小但不为零时，若 $v_b/a\ll\omega\ll c/a\sin\theta$，则 $|F_c(\omega)|$ 和 $\omega^{3/2}$ 成反比；若 $\omega\gg c/a\sin\theta$，则和 ω^2 成反比. 当 $\theta\neq 0$ 时，则 $|F_c(\omega)|$ 和 ω^2 成反比.

由 (9) 式可知，$F_c(0)=1$；这就是说，频谱的低频趋势为常数. 由高频趋势和低频趋势的交点可以确定拐角频率 ω_c，结果是：

当 $\theta=0$ 时，它只与比值 a/v_b 有关，

$$\omega_c=\frac{3^{2/3}\pi^{1/3}}{2^{1/3}}\frac{v_b}{a}; \tag{16}$$

而当 $\theta\neq 0$ 时，它还与比值 $v_b\sin\theta/c$ 有关，

$$\omega_c=\frac{c}{a\sin\theta}\frac{3^{1/2}}{2^{1/4}}\left[1+\left(\frac{3c}{2v_b\sin\theta}\right)^2\right]^{1/4}. \tag{17}$$

当 θ 很小但不为零时，频谱有两个拐角，较低的拐角频率由 (16) 式表示，较高的拐角频率则为：

$$\omega_c=\frac{v_b}{\pi a}\left(\frac{c}{v_b\sin\theta}\right)^4\left[1+\left(\frac{3c}{2v_b\sin\theta}\right)^2\right]. \tag{18}$$

由于地震仪频带的限制，通常只有频率较低的第一个拐角频率可以被观测到，因此，着重分析第一个拐角频率是特别有意义的．由前面结果可知，当 $0\leqslant\theta\leqslant\theta_c$ 时，第一个拐角频率即如(16)式所示，当 $\theta_c\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ 时，如(17)式所示．θ_c 是下列方程的解：

$$\frac{c}{v_b\sin\theta_c}\left[1+\left(\frac{3c}{2v_b\sin\theta_c}\right)^2\right]^{1/4}=\frac{3^{1/6}\pi^{1/3}}{2^{1/12}}. \tag{19}$$

对于在震源球球面上随机分布的观测点，第一个拐角频率的期望值是：

$$\langle\omega_c\rangle=(3^{1/2}\pi/2^{5/4})(c/a)\Theta_c \tag{20}$$

$$\Theta_c=\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta_c}\frac{3^{1/6}\pi^{1/3}}{2^{1/12}}\frac{v_b\sin\theta}{c}d\theta+\frac{2}{\pi}\int_{\theta_c}^{\pi/2}[1+(3c/2v_b\sin\theta)^2]^{1/4}d\theta. \tag{21}$$

2. 同时破裂情形

同时破裂，即破裂速度无穷大．就天然地震而言，这是不真实的．在有限破裂速度的情形下，只有所论及的波的周期比破裂过程所花费的时间大得多时，也就是 $\omega a/v_b\ll 1$ 时，才可以将它近似地当作同时破裂情形处理．这时体波远场位移谱可以令(9)式中的 $y=0$ 来求得．此时，(9)式可积出(资料[4]，第 329 页)：

$$F_c(\omega)=3(\pi/2)^{1/2}x_c^{-3/2}J_{3/2}(x_c). \tag{22}$$

$J_{3/2}$ 是半整数阶 Bessel 函数．以三角函数表示 $J_{3/2}$，则(22)式可表示为：

$$F_c(\omega)=3x_c^{-3}(\sin x_c-x_c\cos x_c). \tag{23}$$

Randall[5,6] 曾讨论过一个与这里讨论的完全不同的问题，即预应力球体突然置入无应力的介质中时，它所辐射的体波位移谱问题．有意思的是，这里导出的 $F_c(\omega)$ 表示式和 Randall 讨论不同问题得到的表示式完全一样．但是必须指出，两者仅是形式上一样，而问题的性质与结果的涵义却有本质差别．这里讨论的是半径为 a 的圆盘形位错面辐射的地震波远场位移谱，$F_c(\omega)$ 与观测点的方位有关，在结果中通过(22)式或(23)式中的 $x_c=\omega a\sin\theta/c$ 表现出来；而 Randall 讨论的是半径为 a 的预应力球体的辐射问题．他得到的频谱形状的函数中的 $x=\omega a/c$，和观测点的方位无关．

振幅谱的低频趋势为常数，其高频趋势和频率的平方成反比．由低频趋势和高频趋势的交点可以确定拐角频率 ω_c：

$$\omega_c=3^{1/2}c/2^{1/4}a\sin\theta. \tag{24}$$

对于在震源球球面上随机分布的观测点，拐角频率的期望值是

$$\langle\omega_c\rangle=(3^{1/2}\pi/2^{5/4})(c/a)\doteq 2.29c/a. \tag{25}$$

不言而喻，(24)和(25)式分别是(17)和(20)式的特殊情形．

Brune[7] 最先用半理论、半经验的方法得到圆盘形位错源辐射的横波频谱的拐角频率为 2.21 β/a，后来改正为[8] 2.34 β/a．他改正后的结果和我们算出的 $\langle\omega_\beta\rangle$ 很接近．但是，Brune 求得的是横波的理论频谱，他没有涉及纵波的理论频谱及拐角频率．我们的结果既有横波情形，也包括纵波情形，所以由此可进一步分析纵、横波拐角频率比．

三、纵、横波拐角频率比

注意到 $\sin\theta_c/c$ 是方程(19)的解，因此

$$\sin\theta_\alpha/\sin\theta_\beta=\alpha/\beta. \tag{26}$$

由于 $\alpha>\beta$，所以 $\theta_\alpha>\theta_\beta$．于是，纵、横波的第一个拐角频率比为：

$\omega_\alpha/\omega_\beta=1$， 当 $0\leqslant\theta\leqslant\theta_\beta$，

$$= 3^{1/6}2^{-1/12}\pi^{1/3}\left(\frac{v_b \sin\theta}{\beta}\right)\left[1 + \left(\frac{3}{2}\frac{\beta}{v_b \sin\theta}\right)^2\right]^{-1/4},\ 当\ \theta_\beta \leqslant \theta \leqslant \theta_\alpha,$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{1+(3\alpha/2v_b \sin\theta)^2}{1+(3\beta/2v_b \sin\theta)^2}\right]^{1/4},$$

$$当\ \theta_\alpha \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (27)$$

这意味着，这个比不仅和波速比有关，还和破裂速度以及观测点的方位有关.

Molnar 等[9]根据合理假定的品质因数数值，在对体波频谱作了衰减的校正后，发现 P 波和 S 波的拐角频率之比为 1 到 3. 而 Furuya[10] 的观测表明 S 波和 P 波的优势周期之比也是 1 到 3. 看来，这一观测结果是比较确切的.

倘若不考虑破裂传播的影响，则拐角频率比为 α/β，对于泊松体，这个比值是 1.73，它解释不了观测事实. 按 Sato 等[11]的计算，当 v_b/β 由 0.5 变至 0.9 时，拐角频率比在 1.26 到 1.39 之间变化，它无法说明这个比为什么能高于 1.39. 我们的理论计算表明，$\omega_\alpha/\omega_\beta$ 的下限为 1，其上限可高达 $(\alpha/\beta)^{3/2}$，对于泊松体，这个数值是 2.28. 这比 Sato 等[11]的理论计算要更符合观测事实.

四、由拐角频率比测定震源处纵、横波速度比的可能性

在地震预报实践中，纵、横波速度比异常的研究是一个重要的问题. 目前，波速比都是由地震波的走时测定的，它依赖于 P 波到时 (T_P) 和 S 波与 P 波的走时差 (T_{S-P}) 的测定，因而对时间服务的精度有较高的要求. 此外，由地震波走时测定的波速比，是从震源至台站的传播路径上的波速比.

本文得到的结果表明，纵、横波拐角频率比和纵、横波速度比有关(见 (27) 式)；当然，它还和破裂速度与观测点的方位有关. 由 (27) 式可以看到，无须测定破裂速度与观测点的方位，只要设法测得比值 $v_b \sin\theta/\beta$ 或 $v_b \sin\theta/\alpha$，那么原则上由纵、横波拐角频率比就有可能测定波速比. 用频谱的拐角频率比测定波速比不要求测定 P 波的到时，因此对时间服务的精度没有太高的要求. 此外，和拐角频率相联系的波速，按其物理意义来说乃是震源所在处的波速. 所以由纵、横波拐角频率比测得的波速比，和由地震波走时测得的波速比有不同的含意，在地震预报实践中，它们可以彼此印证，互相补充.

测定比值 $v_b \sin\theta/c$ 仿佛是很困难的. 因为无论是测定每一个地震的破裂速度，还是确定断层面在空间的取向（这样才有可能确定出 θ 角），都是困难的. 这种困难在中、小地震尤为突出. 然而，资料 [12] 导出的结果却提供了测定比值 $v_b \sin\theta/c$ 的可能性. 我们在资料 [12] 中，导出了错距均匀分布的圆盘形断层所辐射的地震波远场位移表示式，和相应的初动四分之一周期与半周期的表示式. 计算表明，对于错距按 (7) 式分布的圆盘形断层，其辐射的地震波远场位移表示式和均匀分布的圆盘形断层不同，但初动半周期 t_{2c} 的表示式也一样是：

$$t_{2c} = \frac{a}{v_b}\left(1 + \frac{v_b \sin\theta}{c}\right). \qquad (28)$$

所以，纵、横波初动半周期之比为：

$$\frac{t_{2\alpha}}{t_{2\beta}} = \frac{1 + \dfrac{v_b \sin\theta}{\alpha}}{1 + \dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{v_b \sin\theta}{\alpha}}. \qquad (29)$$

把(27)式的第三式和(29)式联立，那么通过测定纵、横波拐角频率比和初动半周期之比，便有可能同时求得震源所在处的波速比以及比值 $v_b \sin\theta/\beta$. 在实际的测定中，为了实现(27)式的第三式和(29)式联立的条件，必须避免采用 $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_\alpha$ 或 $0 \leqslant \pi - \theta \leqslant \theta_\alpha$ 的台站，而只要避免采用节面附近的台站，就可以实现上述条件.

参 考 资 料

[1] Keilis-Borok, V., (Кейлис-Борок, В.) *Ann.*

Geofis., 12 (1959), 2, 205—214.
[2] Dahlen, F. A., *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 64 (1974), 4, 1159—1180.
[3] Erdélyi, A. (ed.), *Tables of Integral Transforms*, 2, McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.
[4] ———— (ed.), *ibid.*, 1, McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.
[5] Randall, M. J., *J. Geophys. Res.*, 71 (1966), 22, 5297—5302.
[6] ————, *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 63 (1973), 3, 1133—1144.
[7] Brune, J. N., *J. Geophys. Res.*, 75 (1970), 26, 4997—5009.
[8] ————, *ibid.*, 76 (1971), 20, 5002.
[9] Molnar, P. et al., *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 63 (1973), 6, 2091—2104.
[10] Furuya, I. (古屋逸夫), *J. Phys. Earth*, 17 (1969), 2, 119—126.
[11] Sato, T. (佐藤魂夫) & Hirasawa, T. (平澤朋郎), *ibid.*, 21 (1973), 4, 415—431.
[12] 陈运泰等，地球物理学报，19 (1976), 3, 206—233.
[13] Savage, J. C., *Bull. Seism. Soc. Amer.*, 64 (1974), 6, 1621—1627.

关于辐射修正产生自发破缺的微扰论研究

李华钟　　吴詠时　　戴元本

（中山大学物理系）（中国科学院物理研究所）（中国科学院物理研究所）

在自发破缺对称性的研究中，由辐射修正产生自发破缺的可能性受到人们的注意．在这种情形下，对称性的自发破缺，不出现于经典理论（树图近似）中，它完全是由于辐射修正而产生的．资料[1]基于有效位势的按圈数的展开式，最先提出了这种可能性，并对其进行研究．它所采用的方法和结论，受到了 Тютин 等人[2]以及 Иоффе 等人[3]的怀疑和批评．

究竟辐射修正能否产生对称性的动力学自发破缺，这一问题对于量子场论和自发破缺对称性理论都颇有意义．因此，我们对这个问题进行了较仔细的分析．本文中将指出，资料[2]、[3]提出的怀疑和批评是没有根据的（尤其是资料[3]从概念到公式都有严重错误），从而澄清了资料[2]、[3]所引起的疑惑和混乱．

1. 考虑四次方自作用的中性标量场理论．取

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_0)^2 - \frac{1}{2}m_0^2\varphi_0^2 - \frac{1}{4!}\lambda_0\varphi_0^{4*}, \tag{1}$$

假设拉氏量(1)有一精确解，使得

$$\langle 0|\varphi_0(x)|0\rangle = \xi_0 \neq 0.$$

像通常一样，做场的平移 $\varphi_0 = \chi_0 + \xi_0$，并引入重正化常数

$$\begin{cases}\chi = Z_3^{-1/2}\chi_0,\ \xi = Z_3^{-1/2}\xi_0,\ \lambda = Z_1^{-1}Z_3^2\lambda_0\\ m^2 = m_0^2 + \dfrac{1}{2}\lambda_0\xi_0^2 + \delta m^2,\end{cases} \tag{2}$$

代入(1)式可得

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \frac{1}{2}m^2\chi^2 - \frac{1}{3!}\lambda\xi\chi^3 - \frac{1}{4!}\lambda\chi^4 - Z_3\left(m_0^2 + \frac{1}{6}\lambda_0\xi_0^2\right)\times\xi\chi + \text{其它抵消项}, \tag{3}$$

其中对 χ 为线性的项，看作属于抵消项之列，它应当保证下述自洽性条件逐阶成立

$$\langle 0|\chi(x)|0\rangle = 0. \tag{4}$$

如果按照资料[3]中的假设，要求 χ 场的物理质量与 χ 场的裸传播子极点 m^2 重合，而且假设 $m^2 > 0$，则在拉氏量(3)的树图近似下，(4)式是

$$Z_3\xi\left(m_0^2 + \frac{1}{6}\lambda_0\xi_0^2\right) = 0,$$

此时有 $Z_3 = Z_1 = 1$，$\delta m^2 = 0$，故上式可化为

$$\xi\left(m^2 - \frac{1}{3}\lambda\xi^2\right) = 0. \tag{5}$$

因此，在树图近似下，此理论已经可以有一个 $\xi \neq 0$ 的解．

在单圈近似下，方程(4)取如下形式

本文 1976 年 3 月 15 日收到．

* 有下角标 0 者均为未重正化的量．