

〔苏〕 A. G. 克勒宗

Ю. Н. 茹拉夫列夫, Н. В. 扬瓦列夫

转动机械的计算和设计

张文杰 陶 昌 覃正杞 袁执珩 译

沈炳炎 韩红志 张连祥 校

一九八二年八月

内容简介

本书讨论了涡轮机、压气机、发电机、电动机轴、离心机、陀螺仪、转子等的转子的动力学计算问题；介绍了确定转子机振动主要原因的工程计算、实物试验和模型实验的结果及其对动载荷轴承上的振动载荷大小的影响；研究了减小转子振动响应的途径；提出了提高高速滚动轴承寿命的建议；讨论了弹性轴承、弹性支承的结构及其计算方法；介绍了采用物理模型研究各类转子横向振动的方法。

本书可供各工业部门中从事高速转子机的计算，设计和使用维护工作的工程技术人员使用，也可供高等院校有关专业的学生参考使用。

РАСЧЕТ И КОНСТРУКЦИОННОЕ РОТОРНЫХ МАШИН

А. С. Кельзон

Ю. Н. Журавлев, Н. В. Январев

Ленинград «Машиностроение»

Ленинградское отделение 1977

转动机械的计算与设计

〔苏〕А. С. 克勒宗

Ю. Н. 茹拉夫列夫, Н. В. 扬瓦列夫

张文杰 陶 昌 覃正杞 袁执珩 译

沈丙炎 韩红志 张连样 校

编辑出版校对 汪海源

前 言

现代转动机器(涡轮机、压气机、离心机、高速磨床主轴、鼓风机、精纺或捻线机等等)设计师面临的复杂课题是提高机器能力,减轻重量,延长寿命。而要同时满足这些要求,就要研制出能在高于第一和甚至往往是高于第二临界速度工作的转动机器。如不采用专门措施,这种类型的转动机器的振动响应,就会使机器的轴承组件提前损坏。

Лаваль首先提出要采用滚动或滑动刚性支承的柔性轴结构,但这种方法,由于后面我们将详加分析的一系列原因,其具体运用受到了很大限制,而未能得以广泛应用。

同样,若采用使机器转子的转速低于第一临界速度的设计途径,也是不合理的,因为这将大大加重转动部件的质量,并使转子的转速受到限制。

研制采用弹性支承的刚性转子机器,是转动机器设计中的最佳方案。

转子的振动响应,尤其是在临界转速区内的振动响应,可以通过严格限制转子的制造和平衡公差而使之减少。可是,在那些先进的机器制造厂里,这种办法的潜力实际上已发掘殆尽,如进一步减少公差,那在经济和技术上都是花不来的。然而,设计采用弹性支承的刚性转动机器,则由于自动定心效应,会减少转子对支点的压力,并保证其顺利的通过临界速度。

本书给出了采用这一途径的论据及其计算和设计方法。

著者谨向膺获十月革命勳章的列宁格勒马卡洛夫海军高级工程师学校所属机床工业弹性轴承科研室的全体人员深表感谢,在他们的协助下,所研究出的计算和设计方法,已被运用到机器制造业的各个部门。

引 言

支承上的旋转轴，是转动机器的最重要的部件之一。机器的寿命，事故的预防，以及转动机器的能力和加工精度等，均首先取决于转子的振动水平和转子与支承间压力的大小。在研制各种新型转动机器时，为了提高其能力，并满足精度方面的严格要求常采用各种不同途径：1) 只加大机组的功率而不改变其轴的额定转速(如在固定式的涡轮发电机制造中就是如此)；2) 提高转子的转速(如运输用燃气涡轮发动机、磨床、涡轮增压器、绞子、离心机)。同时尽力缩小转动机器的尺寸并减轻其转轴的质量。

转动机器设计中的上述趋势，带来了如何减少振动响应的问题。可以毫不夸张地说，转动机器振动响应低，是机器计算和设计正确的例证。

在转动机器的计算中，如果说过去还可以仅限于确定转子的临界转速，且在计算中把支承简单地假设为是绝对刚性的，则如今用这种办法就不可能达到目的了。必须把转子—柔性支承—机匣—底座整个作为动力学系统来研究。在计算时，滑动轴承油膜的特性或滚动轴承的特性均应予以考虑。一系列研究得尚不充分的因素，如各转子的二元刚度，滑动轴承内轴颈的椭圆度，转子温度场的不对称度，转子的剩余不平衡度以及转子在使用过程中平衡破坏等现象的影响，都应包括在转动机器的计算中。

在生产实践中有时会遇到这样一些情况，转动机器的试验机达不到额定转速，试图用严格控制公差和选用合适的润滑油种类等办法来攻克这种难关，但都达不到预期效果。这就要从机器设计和动力学计算不正确方面去找原因。

本书谨对转子三种振动类型(横向振动、扭转振动和纵向振动)的一种—横向振动—进行分析研究。对于转动机器来说，也

正是这种振动具有决定性意义。如在动力转子系统中有引起周期性旋转的不均衡因素存在(如外部负荷有周期性变化)时,则会产生扭转振动。要研究这种振动,请参阅 В. П. Терских 的著作[参考文献99]。

应该指出的是,转动机器除了有常定因素(尺寸、质量惯性参数和转速等等)外,还有随机性因素(如不平衡度沿长度和径向平面的分布情况)。为了计算实际上与随机因素无关的转动机器的临界转速,采用现代的电子计算机为宜。有关振动的其它信息—振幅、转子和支承间的压力以及传给底座的压力—主要是和随机因素有关,在多数情况下,根据简化数学模型,对其值进行近似估算就足够了。在这种情况下,必须采用近似方法进行计算。

在有关转动机器计算方面的文献里¹,基本上是把注意力放在转子振幅的计算上,其实最有实际意义的是转子和支承间的动力负荷以及传给机器底座的压力。尽管振幅和动力负荷是相互联系的,但不能混为一谈。

由此便产生了一个转动机器合理设计的问题。可按机器的用途以及对其提出的要求,归结出不同的质量准则。如有的以减少转子和支承间的压力为主,这样既能增加寿命,同时又能减小机器发出的噪音。有的也可以选取最小重量为主,这对航空燃气涡轮发动机尤为重要。在另外一些情况下,如对高速磨床的主轴来说,高转速则是重要的。而在有些情况下,机器的寿命,尤其是两次修理之间使用期限的长短则是重要的。

在同时要求几项准则最佳化的情况下,合理设计转动机器的问题就要更复杂了。

在研制大尺寸高难度的机器时,在设计和试验阶段就应采用物理模拟的方法来进行。按相似定律设计模型并进行试验,可以在制造全尺寸试验样机之前,确定各种因素对转动机器振动响应的影响。一些先进机器制造厂家的经验证明,制造和试验这样的模型是有益的,特别是当所设计的机器没有相近样机时更是如此。

¹ 下文不区分转子和旋转轴

在现代转动机器中，工作转速高于第一临界速度，并且往往还高于第二临界速度。因此在设计和计算时，必须保证在小的共振振幅和振动负荷下通过临界速度区。振动大小与下列因素有关：

1) 接近临界转速的程度；2) 转子质量的分布；3) 系统的弹性特性；4) 系统中能量的消散；5) 转子的不平衡度。

转子本身内部的各种能量消散与限制共振振幅无关，因为进动时转子的弯曲型式不变。径向轴承和流体动力的强化是能量的主要消散源。如果没有这些阻尼源，通过临界速度将是极其困难的。

但是，为通过临界速度区，人为地增大阻尼的作法也是错误的。在工作转速时增加阻尼并不能使振幅减小，却降低了机器的效率。非线性阻尼器可能是产生新的高振动区的原因。保持转子结构不变，将支承做成弹性的，用这种方法降低通过临界速度时的振幅是比较先进的。这样既降低了系统的刚性，并同时降低了共振振幅。如果支承的柔度远大于转子的柔度，则后者直至第三临界速度之前可看作是刚性的。用这种方法设计出的转动机器，通过第一和第二临界速度区时的振幅和振动负荷都比较小，并没有弯曲振动。此时工作转速高于第二临界速度，位于自动定心区内〔42，43〕。迄至目前为止，弹性支承尚未得到广泛应用，这是因为缺少可供设计师选用的各种型号尺寸的标准弹性轴承的缘故。目前，还是为每种机器单独制造弹性支承。而如果能在专业化的厂家内，连同滚动轴承一起制造，或制成弹性滑动轴承的型式，则弹性支承便可在机器制造业得到迅速推广运用。

在某些情况下，过渡状态（起动、停车和转速状态的改变）有重要意义。尤其是当限制功率能源时，可能会出现参考文献〔60，21，22〕中所提及的不希望有的现象。

本书的目的是为在设计转动机器中采用先进的方法降低振动响应，以便提高寿命，制造出高效能的机器。

目 录

前言	(1)
引言	科学技术博士 А. С. Кельзон (1)
第一章 转动机械的振动响应	
科学技术副博士 Ю. Н. Журавлев (1)	
1. 原始数据误差对临界转速计算误差的影响	(1)
2. 双刚度转子的振动响应	(6)
3. 轴颈不圆度引起的滑动轴承的振动响应	(18)
4. 转子不同轴度对振动响应的影响	(32)
5. 转动机械的温度场不对称对其振动响应的影响	(46)
6. 影响转子振动响应的其它因素	(56)
第二章 支承在滚动轴承上高速转子的振动响应	
科学技术副博士 Н. В. Январев (61)	
1. 滚动轴承的运动参数和受力参数	(61)
2. 滚动轴承的弹性特性	(69)
3. 支承在滚动轴承上的转子动力学	(79)
4. 支承在滚动轴承上转子的亚谐波振动	(93)
第三章 降低转动机械动力响应的方法	(104)
1. 提高转子加工、平衡和装配精度	
科学技术副博士 Ю. Н. Журавлев (104)	
2. 支点柔度对转子刚度各向异性、轴颈椭圆度和转子不同轴度引起的振动负荷的影响	
科学技术副博士 Ю. Н. Журавлев (113)	
3. 一端铰接支承、另一端弹性支承的旋转刚轴动力学	
科学技术博士 А. С. Кельзон (120)	
4. 在两个弹性支点上转动的刚轴动力学自动定心	
科学技术博士 А. С. Кельзон (143)	

5. 高转速压气机的自动定心和平衡·····	
·····科学技术博士 <i>А. С. Кельзон</i>	(155)
6. 支点上采用线性柔度使轴—轴承系统线性化·····	
·····科学技术副博士 <i>Н. В. Январев</i>	(170)
7. 滚动轴承寿命计算·····科学技术副博士 <i>Н. В. Январев</i>	(181)
8. 采用滚动轴承的转子动力学的试验研究·····	
·····科学技术副博士 <i>Н. В. Январев</i>	(187)
第四章 转子系统的动力相似与振动模拟·····	
·····科学技术副博士 <i>Ю. Н. Журавлев</i>	(202)
1. 相似理论与模拟的基本原理·····	(203)
2. 柔性转子的相似和模拟·····	(210)
3. 采用弹性支承的刚性转子的相似与模拟·····	(221)
第五章 弹性轴承组件的计算和设计·····	
·····科学技术博士 <i>А. С. Кельзон</i>	(236)
1. 带螺旋弹簧的弹性支承·····	(236)
2. 带凸台的弹性环·····	(239)
3. 弹性支承的计算和设计·····	(261)
4. 端面弹性环的计算和设计·····	(274)
5. 弹性滚动轴承和滑动轴承·····	(280)
6. 转子机器的计算程序·····	(284)
参考文献·····	(295)

第一章 转动机械的振动响应

1. 原始数据误差对临界转速计算误差的影响

本章将分析引起转子振动响应的原因。同时，重点放在确定支点的振动负荷水平上。考虑到振动负荷水平实质上取决于所设计的转子系统的临界转速的计算误差，所以，本章第一节首先研究原始数据误差对临界转速计算值的影响。

计算时，某些原始数据仅能近似地确定。

首先，广义质量、支承构件的刚度系数、滑动轴承的油膜刚度系数、形状复杂转子的惯量矩等属于系统的这种原始参数。其它参数，如装有紧配合零件轴的刚度或柔性盘的极惯量矩均不是常数，而在离心惯性力作用下发生变化〔37，107〕。在机械的装配和使用过程中，某些参数也可能偏离计算值。

原始数据的误差，将会使转子临界转速的计算值与实际很不一致。由于这个原因，在实际使用中，曾多次出现转子在临界转速区工作的情况〔38，66，121〕。

因此，提出了根据原始参数精度来确定临界转速可能值范围的课题。

首先，我们研究关于 n 个自由度的线性保守振动系统的自然频率的类似问题。这种系统在稳定平衡状态附近的运动微分方程为：

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \ddot{q}_j + c_{ij} q_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.1)$$

式中 q_j — 广义座标； a_{ij} 、 c_{ij} — 广义惯性系数和广义刚度系数。

系数 c_{ij} 、 a_{ij} 组成两个对称矩阵：刚度矩阵 $C = \| c_{ij} \|$ 和惯性矩阵 $A = \| a_{ij} \|$ 。这两个矩阵是系统的刚度参数 K 和惯性参

数 J_r 的函数:

$$\left. \begin{aligned} c_{ij} &= \xi_{ij}(K) \quad (s = 1, 2, \dots, l); \\ a_{ri} &= \psi_{ri}(J_r) \quad (r = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

这里 K_s 表示系统弹性元件在座标轴方向的刚度系数; J_r 为系统元件的质量、轴向惯量矩和离心惯量矩。(下同)

关系式 ξ_{ij} 表示系统弹性元件的空间位置 and 方向, 且与参数 K_s 成线性关系; 函数 ψ_{ri} 也与参数 J_r 成线性关系, 而且其中有一些可能是恒等的

系统的自然频率 p_k ($k = 1, 2, \dots, n$) 由下述频率方程式求出:

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} - p^2 a_{11} & c_{12} - p^2 a_{12} & \dots & c_{1n} - p^2 a_{1n} \\ c_{21} - p^2 a_{21} & c_{22} - p^2 a_{22} & \dots & c_{2n} - p^2 a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} - p^2 a_{n1} & c_{n2} - p^2 a_{n2} & \dots & c_{nn} - p^2 a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (1.3)$$

或者简写成:

$$D = |c_{ij} - p^2 a_{ij}| = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.4)$$

根据质量和刚度对自然频率影响的理论⁸, 可作如下定性估计:

1) 刚度参数 K_s 中, 任何一个增大将导致瑞利函数增大, 因此系统的自然频率升高或者至少不降低;

2) 惯性参数 J_r 中, 任何一个增大将导致瑞利函数减少, 因此系统的自然频率降低, 或者至少不升高。

参数 J_r 不变的情况下, 令全部刚度参数 K_s ($s = 1, 2, \dots$,

1) 以同样的相对值 β_c 变化, 即有等式:

$$K_s^* = K_s^0 (1 + \beta_c) \quad (1.5)$$

这里 K_s^0 、 J_r^0 、 c_{ij}^0 、 a_{ri}^0 、 p_k 为原始数值; K_s^* 、 J_r^* 、 c_{ij}^* 、 a_{ri}^* 、

、 p_k^* 为相应数据的新值(下同)。

由于关系式(1.2)是线性的, 根据表达式(1.5), 全部刚度系数也以同样的相对值 β_c 变化, 即 $c_{ij}^* = c_{ij}^0(1 + \beta_c)$ 。

对于变化后的系统, 频率方程(1.4)可改写成如下形式:

$$\begin{aligned} D &= |c_{ij}^* - p^2 a_{ij}^0| = |c_{ij}^0(1 + \beta_c) - p^2 a_{ij}^0| = \\ &= \left| c_{ij}^0 - \left(\frac{p}{\sqrt{1 + \beta_c}} \right)^2 a_{ij}^0 \right| (1 + \beta_c)^n = 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

由于 $|c_{ij}^0 - p_k^2 a_{ij}^0| = 0$, 则得: 全部自然频率均以同样的相对值 α_c 变化, 即有等式:

$$p_k^* = p_k(1 + \alpha_c), \quad (1.7)$$

式中

$$\alpha_c = \sqrt{1 + \beta_c} - 1 \quad (1.8)$$

用类似的方法可得: 全部惯性参数 J_r 以相对值 β_a 变化时, 则自然频率谱变为 α_a , 由下式确定:

$$\alpha_a = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_a}} - 1 \quad (1.9)$$

关系式(1.8)和(1.9)的曲线如图1.1所示。在 β_c 和 β_a 很小时, 有

$$\alpha_c \approx \beta_c/2; \quad \alpha_a \approx -\beta_a/2. \quad (1.10)$$

根据上述定性估计可以指出: 当系统的任何一个参数或同名参数的某一总体以相对值 β 变化时, 自然频率的变化将不会大于由表达式(1.8)或(1.9)所确定的数值。

如果参数 K_s 和 J_r 分别以相对值 β_c 和 β_a 变化时, 那末, 依次应用公式(1.8)和(1.9)求解。此时自然频率为:

$$p_k^* = p_k \sqrt{(1 + \beta_c)(1 + \beta_a)}. \quad (1.11)$$

令 $\pm \beta_c$ 和 $\pm \beta_a$ 为参数 K_s 和 J_r 的最大误差, 则有不等式:

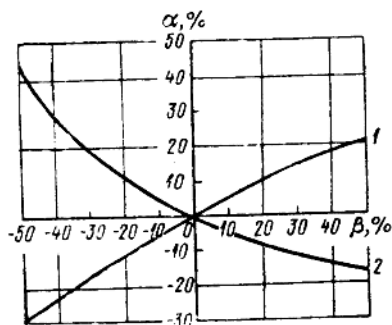


图1.1 自然频率随系统参数的变化曲线

1—刚度参数: $\alpha_c = \sqrt{1 + \beta_c} - 1$; 2—惯性参数: $\alpha_a = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_a}} - 1$

$$K_s^* (1 - \beta_c) \leq K_s \leq K_s^* (1 + \beta_c); \quad J_r^* (1 - \beta_a) \leq J_r \leq J_r^* (1 + \beta_a),$$

式中 K_s 、 J_r 为实际值; K_s^* 、 J_r^* 为计算值。

那么,当计算频率 p_k^* 已知时,根据公式(1.11),实际自然频率 p_k 的范围可用下列不等式确定:

$$p_k^* \sqrt{(1 - \beta_c)(1 + \beta_a)} \leq p_k \leq p_k^* \sqrt{(1 + \beta_c)(1 - \beta_a)} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1.12)$$

如果系统的全部参数具有同样的误差 $\pm \beta$, 且 $|\beta| \ll 1$, 则有:

$$p_k^* (1 - \beta) \leq p_k \leq p_k^* (1 + \beta), \quad (1.13)$$

其精度达到 β^2 量级, 即自然频率的计算误差与系统参数的计算误差接近相等。

下面来确定转子临界转速的计算误差。

转子—支承动力学系统和上面研究的系统的区别在于轴段具有分布质量和系统上有陀螺力矩作用。

第一点区别不是原则性的, 因为将系统分成足够多的段数, 可以得到具有有限个自由度的振动系统, 其动力学特性可以任意

精确度与原始系统相一致。

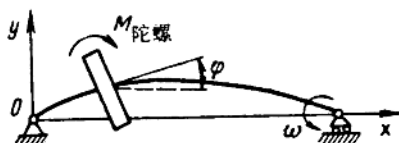


图1.2 轴正进动时陀螺力矩的作用

度 ω 旋转(图1.2)。在盘的质量中心不可避免的偏心所引起的离心惯性力作用下,轴发生弯曲。轴的绕曲线所在平面同样以角速度 ω 绕 x 轴作进动转动。如果进动的方向与轴的旋转方向一致,这种进动称为正进动,反之称为反进动。

假设由于轴的弯曲,盘所在平面偏斜一个小的角度 φ 。此时,在正进动情况下,盘将作用于轴以陀螺力矩〔103〕

$$M_{\text{гир}} = (A - B) \varphi \omega^2, \quad (1.14)$$

此力矩趋于提高轴的刚度。这种转子的正进动的临界转速将大于 $\omega = 0$ 时的自然振动频率。相反,在反进动的情况下,陀螺力矩趋于降低轴的刚度,并使临界转速低于轴不旋转时的自然频率。

从数学角度看,对于任意的转子系统,当考虑盘的陀螺效应时,都导致在运动微分方程中出现广义坐标对时间的一阶导数项。这使方程(1.3)与转子系统的频率方程在结构上有所区别。因此,最后不能采用变换式(1.6)。

如果利用В. К. Дондошанский 所证明的转子系统的一个特性〔33中223页〕,关于误差的计算便容易实现了。这种方法的实质如下。

转子正进动和反进动的临界转速,在考虑了盘的陀螺效应后,等于两个刚度参数和惯性参数(盘的赤道惯量矩除外)与前者相同的虚构的不旋转转子的横向振动的自然频率。虚构转子赤道惯量矩的值按下列公式计算:

下面谈第二点区别〔30, 103〕。假定盘相对于旋转轴的惯量矩为 A 和赤道惯量矩为 B ,且与轴一起以角速度

$$\text{正进动, } B_{\text{虚}} = B - A; \quad (1.15)$$

$$\text{反进动, } B_{\text{虚}} = B + A.$$

式中: A —同一盘对旋转轴线的极惯量矩; B —盘的赤道惯量矩。

显然, 不旋转转子是普通的振动系统, 其横向振动可用(1.1)形式的微分方程组描述。由此得出: 用按公式(1.15)求得的虚构转子的赤道惯量矩代替实际盘的赤道惯量矩后, 上面得到的确定原始数据误差对自然频率计算误差影响的全部公式, 对转子临界转速同样是正确的。区别仅在于虚构转子盘的赤道惯量矩的极限误差 $\Delta B_{\text{虚}}$ 用下式计算:

$$\Delta B_{\text{虚}} = \Delta B + \Delta A,$$

式中 ΔB 和 ΔA —实际惯量矩的极限误差。

对应的相对误差为:

$$\beta_B = (\Delta B + \Delta A) / B_{\text{虚}}. \quad (1.16)$$

于是, 由于原始数据不准确而引起的转子系统临界转速误差, 可用表达式(1.12)确定。考虑到近似公式(1.13), 可得出结论: 此误差近似等于上面所研究的虚构转子系统刚度参数和惯性参数的误差。

2. 双刚度转子的振动响应

引起旋转机械支承动负荷的频率等于旋转频率二倍的原因之一, 是轴横截面的主惯性矩不同。

这样的轴, 在不同绕曲平面内的刚度是不等的, 即刚度是各向异开的。因为在两个主方向上存在最大和最小刚度, 所以这种轴通常称之为双刚度轴(转子)。

轴的双刚度主要由下列纵向切口引起, 它们是键槽(图1.3a), 切面(图1.3b)、整体段造的双极发电机转子上的槽(图1.3c)等等。

在很多著作中, 对双刚度转子的振动进行过研究。这个问题在 Ф. М. Диментберг [30]、А. Тондл [100]、А. Л. Цырлин [108]: 等人的著作中论述的最详细。在这些著作中, 研

究了关于双刚度转子振动的各种问题。但是书中没有关于评价这种转子支承动负荷水平的材料。

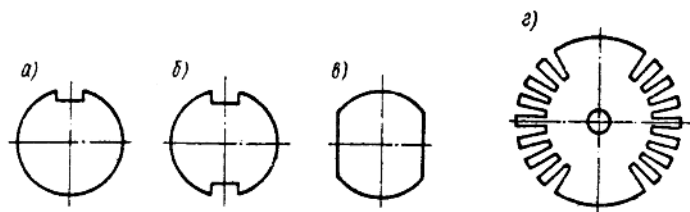


图1.3 各种双刚度轴横截面的示例

本节首先引出上述著作得到的主要定性结果，然后研究动负荷问题。作为理论模型，我们研究了在无重量水平轴跨度中间装有单盘的转子。对支承在绝对刚性的铰接支座上的情况和支承在滑动轴承上的情况，确定其动负荷水平。

假设所研究的转子是一根无重量的双刚度水平轴，其跨度中间安装一质量为 m 的盘。轴支承在绝对刚性的铰接支座上，支座之间的距离为 L (图1.4a)。

用 I_1 和 I_2 分别代表轴横截面的主惯性矩，且 $I_2 > I_1$ 。对应的轴主抗弯刚度系数为：

$$c_1 = 48EI_1/L^3; \quad c_2 = 48EI_2/L^3.$$

引入动坐标系 $\xi\eta$ ，该坐标系随轴一起以角速度 ω 相对于固定坐标系 xy 转动，且坐标轴 ξ 和 η 沿截面主惯性轴的方向 (图1.4b)。用 e_1 和 e_2 代表盘质量中心相对轴中心沿坐标轴 ξ 和 η 方向的位移； S 代表轴中心； C 代表盘的重心； m 代表盘的质量。

如果在盘上除作用有轴的弹性力和重力外，尚有移动的离心惯性力和科氏惯性力，则可得盘重心在旋转坐标系内的运动微分方程。

诸力在 ξ 和 η 轴上的投影分别是：

轴的弹性力

$$F_\xi = -c_1\xi, \quad F_\eta = -c_2\eta;$$

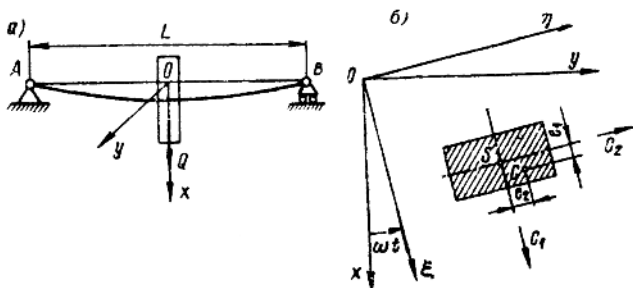


图1.4 双刚度转子的理论模型

重力

$$Q_{\xi} = mg \cos \omega t, \quad Q_{\eta} = -mg \sin \omega t;$$

移动的离心惯性力

$$J_{c\xi} = m\omega^2(\xi + e_1), \quad J_{c\eta} = m\omega^2(\eta + e_2);$$

科氏惯性力

$$J_{c\xi} = 2m\omega\dot{\eta}, \quad J_{c\eta} = -2m\omega\dot{\xi}$$

写出该力系(示于图1.5)的平衡方程, 得微分方程:

$$\left. \begin{aligned} m[\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} - \omega^2(\xi + e_1)] + c_1\xi - mg \cos \omega t &= 0; \\ m[\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} - \omega^2(\eta + e_2)] + c_2\eta + mg \sin \omega t &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

以 m 除方程式(1.17), 并引入符号

$$c_1/m = \omega_1^2, \quad c_2/m = \omega_2^2$$

得下列运动微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} + (\omega_1^2 - \omega^2)\xi &= e_1\omega^2 + g \cos \omega t; \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} + (\omega_2^2 - \omega^2)\eta &= e_2\omega^2 - g \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

方程(1.18)的通解由三个解的和组成: (1) (1.18)中描述自由振动的齐次方程组的通解; (2) 在 $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$ 和 $mg = 0$ 时, 描述在重心偏心距作用下强迫振动(立式转子情况)的非齐次方程组的特解; (3) 在 $e_1 = e_2 = 0$ 和 $mg \neq 0$ 时, 描述在盘重力作用下强迫振动的非齐次方程组的特解。

分析(1.18)中齐次方程组的通解表明: 所研究的转子有两个

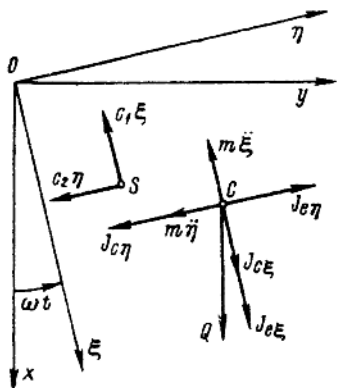


图1.5 推导双刚度转子运动微分方程的简图

临界转速，分别等于 ω_1 和 ω_2 。

两临界转速 ω_1 和 ω_2 之间的旋转频率区是唯一的非稳定区。应该指出，该频率区是参数共振区，即由于在固定坐标系中，系统刚度的周期变化而产生的不稳定状态。

盘重心偏心配置使轴的中心以频率 ω 和半径

$$\zeta_e = \omega^2 \frac{\sqrt{e_1^2 (\omega_2^2 - \omega^2)^2 + e_2^2 (\omega_1^2 - \omega^2)^2}}{|(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)|}$$

作圆周运动。

当 $\omega \rightarrow \omega_1$ 和 $\omega \rightarrow \omega_2$ 时，数值 $\zeta_e \rightarrow \infty$ 。

现在来更详尽地研究在盘重力作用下系统的振动。当 $e_1 = e_2 = 0$ 时，由 (1.18) 式得原始微分方程：

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} + (\omega_1^2 - \omega^2)\xi &= g \cos \omega t; \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} + (\omega_2^2 - \omega^2)\eta &= -g \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

非齐次方程组 (1.19) 的特解为：

$$\xi = a \cos \omega t; \quad \eta = b \sin \omega t. \quad (1.20)$$

将 (1.20) 代入 (1.19)，得到关于未知数 a 和 b 的代数方程：

$$(\omega_1^2 - 2\omega^2)a - 2\omega^2 b = g; \quad -2\omega^2 a + (\omega_2^2 - 2\omega^2)b = -g. \quad (1.21)$$

解 (1.21) 得：

$$a = \frac{g(\omega_2^2 - 4\omega^2)}{\omega_1^2 \omega_2^2 - 2\omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}; \quad b = \frac{g(4\omega^2 - \omega_1^2)}{\omega_1^2 \omega_2^2 - 2\omega^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}. \quad (1.22)$$

引入复数值：

$$\zeta = \xi + i\eta = a \cos \omega t + ib \sin \omega t,$$