

## 目 录

### (第二册)

摄动有限元法解一般轴对称壳几何非线性问题

.....清华大学谢志成杨学惠钱振东刘燕张立平

混合变量的轴对称体弹塑性有限元分析

.....上海市计算所华伯浩

二机部九院张家鹏

关于弹塑性力学有限元分析中的若干问题

.....上海交大分校孙金文

用杂交应力薄壳单元进行结构的非线性有限元分析

.....大连工学院魏兆正

非线性梁缆类结构有限元分析

.....西北轻工业学院彭国勋

一种“由结构的初应变所引起的位移”的计算方法——单位荷载法

.....吉林大学杜森田

有限变形塑性动力学问题.....太原工学院杨桂通

关于裂纹尖端弹塑性场的分析.....北京工业学院薛大为

有强化弹塑性悬臂梁的渐近解.....清华大学赵智顾承原

有强化弹塑性含钉孔板的渐近解.....清华大学罗宏瑞黄琼

非线性粘弹性体在周期加载条件下的压力与能耗...华中工学院杨挺青

关于紫铜软铝两种国产材料塑性硬化规律及塑性失稳的试验研究

.....蒋咏秋王子昆

有强化弹塑性含圆孔受拉力板的渐近解

.....清华大学董亚民朱祖成顾求林

理想刚一塑性动力分析中的间断性质……北京大学黄筑平  
非老化材料连续损伤参数在不变的拉伸载荷作用下表示式的确定  
………上海工业大学程源生  
粘塑性园截面薄壁杆中扭转波的数值解……太原工学院丁树仁

# 10 摄动有限元法解一般轴对称壳

## 几何非线性问题

谢志成 杨学忠 钱振东

刘燕 张立平

(清华大学)

### 摘要

本文在处理几何非线性问题时，利用在变分方程中引入摄动过程，得到各级变分摄动方程，并通过有限元法求解。由于有限元法能成功地处理各种复杂边界条件、几何形状的力学问题，摄动法又可将非线性问题转化为线性问题求解，若结合这两种方法的优点，将能够解决大量复杂的非线性力学问题，并能够消除单独使用有限元法或摄动法求解复杂非线性问题所出现的困难。

本文应用摄动有限元法求解了一般轴对称壳的几何非线性问题。

### 引言

科学技术的飞速发展使人们有必要，而且有可能去研究实际结构工程中所提出的大量非线性问题，从而进一步合理地设计结构，提高构件的承载能力。

解决板壳结构非线性问题的方法不断在改进。1947年，钱伟长教授最早提出用摄动法选板的挠度作为摄动参数，成功地解决了圆薄板大挠度问题〔1〕。这种方法将非线性方程化为线性方程求解，减少了直接求解非线性方程的困难。但摄动法只有在得到线性解析解的情况下方可奏效，而面对几何形状及边界条件较为复杂。

难以得到线性解析解的问题就显得无能为力了。

随着有限元法的出现和计算机时代的到来，开辟了解决非线性问题的新途径。在一些有关著作和文献中[3][4][5][6]，提出了用有限元法得到非线性代数方程组，再用Newton-Rapshon法解之。有限元法的优点在于能够解决几何形状和边界条件都比较复杂的非线性力学问题。但由于采用Newton-Rapshon法解非线性方程，在某种情况下可能引起迭代不收敛或收敛速度慢的问题。

本文所介绍的摄动有限元法，联合使用了摄动法和有限元法，吸收了二者各自的特点。用摄动法解非线性方程，解决了迭代不收敛的问题，用有限元法又能解决形状和边界条件比较复杂的非线性问题。二者的结合扩大了求解非线性问题的范围。

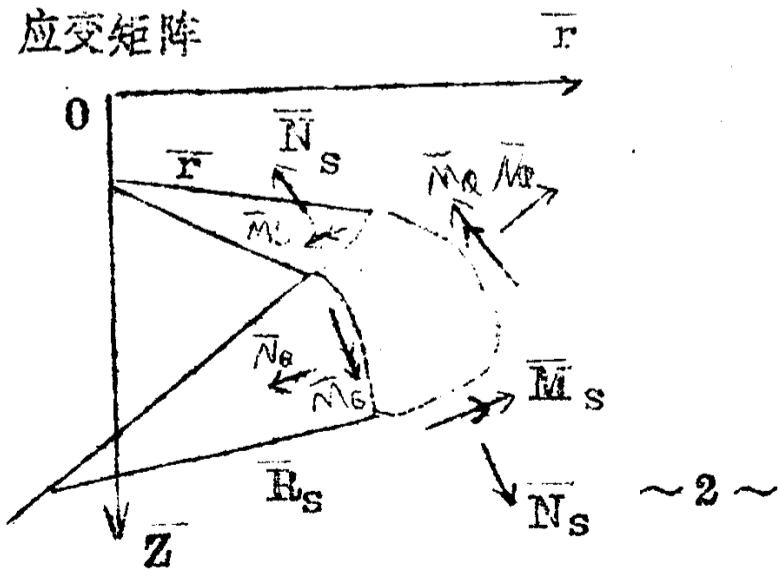
摄动有限元法的基本思想是：将摄动过程引入变分方程，得到各级变分摄动方程，并通过有限元法进行求解。本文在推导了一般轴对称壳大挠度问题的全部摄动有限元法公式后，具体计算了正截锥壳受集中力和均布力载荷作用下的位移、内力。在摄动参数小于2的情况下所得的结果十分理想。为了校核本方法的可靠性，还计算了环板的位移，其结果与叶开沅教授[2]所计算的结果是一致的。

### 一、轴对称壳几何非线性问题的基本关系式

〈1〉定义内力、应变矩阵

内力如图1所示。

图1



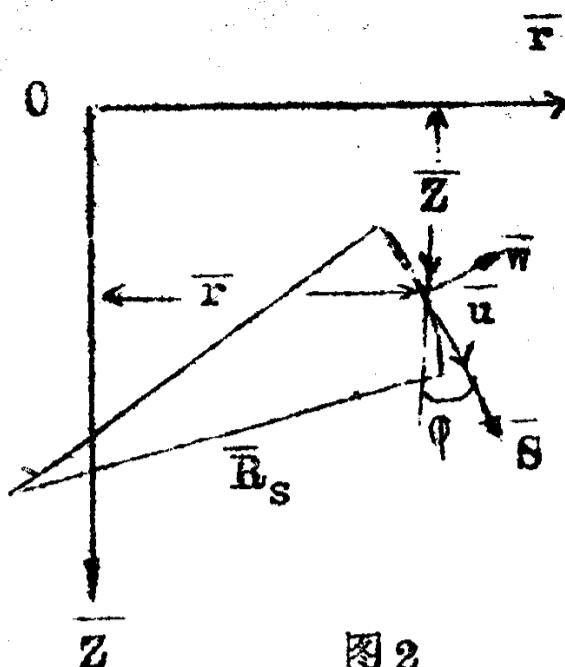


图2

内力矩阵： $\{\bar{e}\} = (\bar{N}_s \quad \bar{N}_\theta \quad \bar{M}_s \quad \bar{M}_\theta)^T$ ；(1)

应变矩阵： $\{\bar{\epsilon}\} = (\bar{\epsilon}_s \quad \bar{\epsilon}_\theta \quad \bar{\kappa}_s \quad \bar{\kappa}_\theta)^T$ 。

(1)式中： $\bar{N}_s$ 、 $\bar{N}_\theta$  分别是壳中切向和环向薄膜力； $\bar{M}_s$ 、 $\bar{M}_\theta$  分别是相应方向的弯矩； $\bar{\epsilon}_s$ 、 $\bar{\epsilon}_\theta$  分别是壳中面切、环向薄膜应变； $\bar{\kappa}_s$ 、 $\bar{\kappa}_\theta$  分别是壳中面切、环向的曲率变化。

### 〈2〉应变与位移的几何关系

位移如图2所示， $u$ 、 $w$ 分别表示切、法向位移。

位移矩阵：

$$\{\bar{U}_1\} = (u \quad w)^T ; (2)$$

$$\{\bar{U}\} = (u \quad w \quad \bar{\beta})^T ; (3)$$

(3)式中 $\bar{\beta}$ 表示壳中转角。

本文只讨论小应变、大转角问题。在这种情况下，几何关系为：

$$\{\bar{\epsilon}\} = \left[ \begin{array}{c} \frac{d\bar{u}}{ds} + \frac{\bar{w}}{R_s} \\ \frac{1}{r} (\bar{w} \cos\varphi + \bar{u} \sin\varphi) \\ -\frac{d}{ds} \left( \frac{\bar{u}}{R_s} - \frac{d\bar{w}}{ds} \right) \\ \frac{\sin\varphi}{r} \left( \frac{\bar{u}}{R_s} - \frac{d\bar{w}}{ds} \right) \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{w}}{ds} - \frac{\bar{u}}{R_s} \right)^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad (4)$$

### 〈3〉物性关系

由于材料是线弹性的，故满足下列广义虎克定律：

$$\{\bar{\epsilon}\} = [\bar{D}] \{\bar{\sigma}\} \quad (5)$$

其中：

$$[\bar{D}] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & \frac{h^2}{12} - \frac{\nu h^2}{12} \\ 0 & 0 & \frac{\nu h^2}{12} & \frac{h^2}{12} \end{array} \right] \quad (6)$$

E：材料的弹性模量；

$\nu$ ：泊松比；

h：壳厚。

### 〈4〉变分方程

壳所受均布力如图3所示。 $\bar{q}_s$ 、 $\bar{q}_n$  分别为切、法向均布力。

$$\{\bar{q}\} = (\bar{q}_s, \bar{q}_n)^T \quad (7)$$

作用于  $j$  点的集中力、力偶如图 4 所示。 $\bar{P}_n$ 、 $\bar{P}_s$  分别为  $j$  点的法、切向集中力， $\bar{m}$  为作用于  $j$  点的力偶。

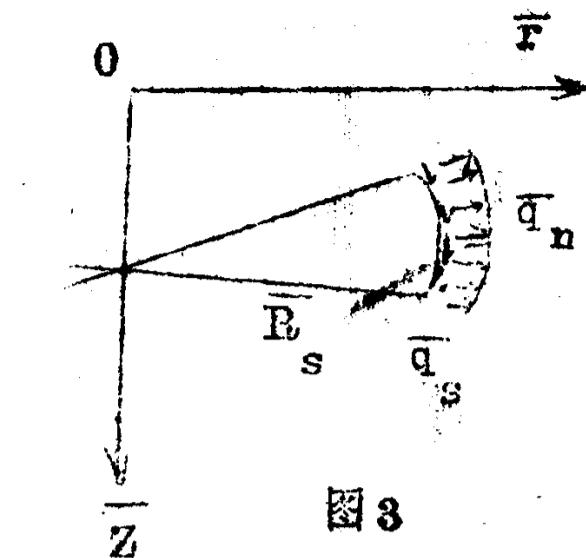
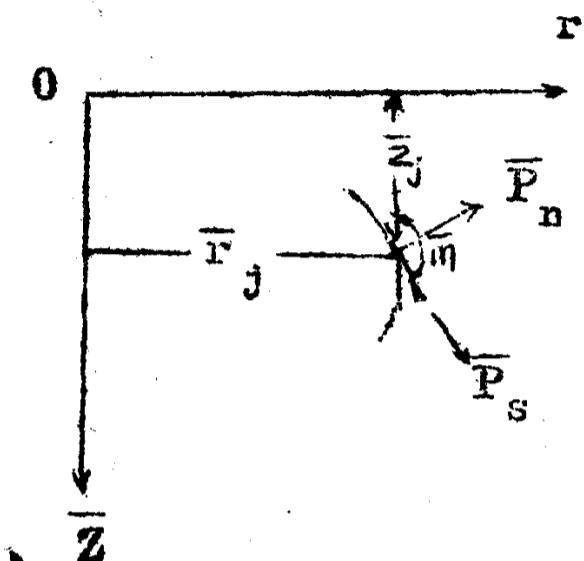


图 3

图 4

$$\{\bar{F}_j\} = (\bar{P}_s, \bar{P}_n, \bar{m})_j^T \quad (8)$$

根据最小位能原理，得：

$$\int_0^L \{\delta \bar{e}\}^T \{\bar{e}\} \bar{r} ds - \int_{L_q} \{\delta \bar{U}_1\}^T \{\bar{q}\} \bar{r} ds - \sum_{j=1}^r \bar{r}_j \\ \{\delta \bar{U}\}^T \{\bar{F}_j\} = 0 \quad (9)$$

式中， $L$  为壳母线的总长度， $L_q$  为分布力作用下的壳母线长度。

### (5) 无量纲化

将上述各有量纲的物理量化为无量纲的纯数，设

$$u = \frac{\bar{u}}{h}$$

$$w = \frac{\bar{w}}{h}$$

$$\beta = \bar{\beta}$$

$$r = \frac{\bar{r}}{h}$$

$$s = \frac{\bar{s}}{h}$$

$$B_S = \frac{\bar{R}_S}{h}$$

$$N_s = \frac{1 - \nu^2}{E h} \bar{N}_s \quad N_\theta = \frac{1 - \nu^2}{E h} \bar{N}_\theta$$

$$M_s = \frac{1 - \nu^2}{E h^2} \bar{M}_s \quad M_\theta = \frac{1 - \nu^2}{E h^2} \bar{M}_\theta \quad (10)$$

$$x_s = h \bar{x}_s \quad x_\theta = h \bar{x}_\theta$$

$$q_s = \frac{1 - \nu^2}{E} \bar{q}_s \quad q_n = \frac{1 - \nu^2}{E} \bar{q}_n$$

$$P_s = \frac{1 - \nu^2}{E h} \bar{P}_s \quad P_n = \frac{1 - \nu^2}{E h} \bar{P}_n \quad M = \frac{1 - \nu^2}{E h^2} \bar{M}$$

将(10)代入(9)得：

$$\int_0^L \{\delta e\}^T \{e\} r ds - \int_{L_q} \{\delta U_1\}^T \{q\} r ds - \sum_{j=1}^r F_j \cdot \{ \delta U \}^T \{ F_j \} = 0 \quad (11)$$

(11)式为无量纲方程，式中各物理量均为无量纲量。

## 二、摄动过程

选择壳中的最大挠度  $W_0$  为摄动参数，并将所有物理量展开为  $W_0$  的幂级数：

$$\begin{aligned} \{U\} &= \sum_{i=1}^{\infty} \{U^{(i)}\} W_0^i ; \\ \{e\} &= \sum_{i=1}^{\infty} \{e^{(i)}\} W_0^i ; \quad (12) \\ \{q\} &= \sum_{i=1}^{\infty} \{q^{(i)}\} W_0^i ; \end{aligned}$$

式中  $\{U^{(1)}\}$ 、 $\{e^{(1)}\}$ 、 $\{\sigma^{(1)}\}$  分别表示第 1 级振动的位移、应变、内力系数矩阵。

在比例加载的情况下，设壳的所有外力均按同一比例变化，则可写成：

$$\begin{aligned}\{q\} &= T \{q^0\} \\ \{F_j\} &= T \{F_j^0\}\end{aligned}\quad (13)$$

其中， $\{q^0\}$ 、 $\{F_j^0\}$  表示外载分布规律，它们只是坐标的函数，而  $T$  为表示外力大小的量，它是  $W_0$  的函数，故  $T$  亦可展成  $W_0$  的幂级数：

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} t^{(i)} W_0^i \quad (14)$$

将 (12) (13) (14) 代入 (11) 后，即得：

$$\begin{aligned}& \int_0^L \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^m \{s e^{(k)}\} T \{\sigma^{(m-k+1)}\} \right) W_0^{m+1} \right] r ds \\ & - \int_0^L \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^m \{s U_k\} T t^{(m-k+1)} W_0^{m+1} \right) r ds \{q^0\} \right] \\ & - \sum_{j=1}^m r_j \left( \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^m \{s U_k\} T^{(m-k+1)} \right) W_0^{m+1} \right) \{F_j^0\} = 0\end{aligned}\quad (15)$$

归并同次幂项后，得：

$$\sum_{k=1}^m \left[ \int_0^L \{s e^{(k)}\} T \{\sigma^{(m-k+1)}\} r ds - \int_0^L \{s U_k\} T \right]$$

$$t^{(m-k+1)} \left\{ q^0 \right\} r ds = \sum_{j=1}^k r_j \left\{ \delta U^{(k)} \right\} t^{(m-k+1)}$$

$$\left\{ F_j^0 \right\} = 0 \quad (16)$$

$$\text{设 } \left\{ e^{(k)} \right\} = \left\{ e_l^{(k)} \right\} + \left\{ e_n^{(k)} \right\} \quad (17)$$

其中：

$$\left\{ e_l^{(k)} \right\} = \begin{cases} \frac{du^{(k)}}{ds} + \frac{w^{(k)}}{R_s} \\ \frac{1}{r} (w^{(k)} \cos \varphi + u^{(k)} \sin \varphi) \\ \frac{d}{ds} \left( \frac{u^{(k)}}{R_s} - \frac{dw^{(k)}}{ds} \right) \\ \frac{\sin \varphi}{r} \left( \frac{u^{(k)}}{R_s} - \frac{dw^{(k)}}{ds} \right) \end{cases} \quad (18)$$

称为 k 级线性应变摄动系数矩阵；

$$\left\{ e_n^{(k)} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} s^{(j)} s^{(k-j)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

称为 k 级非线性应变摄动系数矩阵。

由 (17)(18)(19) 式得：

$$\{\delta \varepsilon^{(k)}\} = \{\delta \varepsilon_L^{(k)}\} + \sum_{j=1}^{k-1} \{\delta \varepsilon^{(j)}\}_{\delta}^{(k-j)} \quad (k \geq 2) \quad (20)$$

式中  $\{\delta \varepsilon^{(j)}\} = (\delta \varepsilon^{(j)}, 0, 0, 0)^T$  (21)

由(18)式知,  $\{U^{(k)}\}$  确定了,  $\{\varepsilon^{(k)}\}$  便可确定, 而由  
(19)式可知,  $\{\varepsilon_n^{(k)}\}$  与  $k-1$  级以下各级位移摄动系数有关,  
故  $k$  级摄动时  $\{\varepsilon_n^{(k)}\}$  是已知的。

将(20)代入(16)式并经整理后得:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \left[ \int_0^L \{\delta \varepsilon_L^{(k)}\}^T \{e^{(m-k+1)}\}_{rds} + \int_0^L \{\delta \varepsilon^{(k)}\}^T \right. \\ & \left. \sum_{j=1}^{m-k} s^{(j)} \{e^{(m-k-j+1)}\}_{rds} - \int_0^L \{\delta U_L^{(k)}\}^T t^{(m-k+1)} \right] \\ & \{q^0\}_{rds} - \sum_{j=1}^m r_j \left\{ \delta U^{(k)} \right\}_t^{(m-k+1)} \left\{ F_j^0 \right\} = 0 \quad (16a) \end{aligned}$$

$m=1, 2, 3 \dots$

若设  $k$  级摄动系数的变分不为零, 而其余的各级摄动系数的变分均为零, 上式即得:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \{\delta \varepsilon_L^{(k)}\}^T \{e^{(m-k+1)}\}_{rds} + \int_0^L \{\delta \varepsilon^{(k)}\}^T \sum_{j=1}^{m-k} s^{(j)} \\ & \{e^{(m-k-j+1)}\}_{rds} - \int_0^L \{\delta U_L^{(k)}\}^T t^{(m-k+1)} \{q^0\}_{rds} \end{aligned}$$

~9~

$$-\sum_{j=1}^r r_j \left\{ \delta U^{(k)} \right\}^T t^{(m-k+1)} \left\{ F_j^0 \right\} = 0 \quad (16b)$$

若设  $i = m-k+1$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ), 则有:

$$\int_0^L \left\{ \delta \epsilon_L^{(k)} \right\} \left\{ \epsilon^{(i)} \right\} r ds + \int_0^L \left\{ \delta \beta^{(k)} \right\}^T \sum_{j=1}^{i-1} s^{(j)} \left\{ \epsilon^{(i-j)} \right\} r ds - \int_0^L \left\{ \delta U_i^{(k)} \right\}^T t^{(i)} \left\{ q^0 \right\} r ds - \sum_{j=1}^r r_j \left\{ \delta U^{(k)} \right\}^T t^{(i)} \left\{ F_j^0 \right\} = 0 \quad (16c)$$

### 三、有限元法的应用

利用有限元法解(16c)式, 将得到各级位移、应变、内力  
振动系数的解。

考虑到轴对称问题, 取环状壳单元, 并简化为  $R_s = \text{const}$  的  
简单直线单元。以  $m, n$  结点的切向、法向位移和转角的  $i$  级振动  
系数为独立变量(图5)即:

$$\left\{ w^{(i)} \right\} = \left[ u_m^{(i)}, w_m^{(i)}, \beta_m^{(i)}, u_n^{(i)}, w_n^{(i)}, \beta_n^{(i)} \right]^T \quad (22)$$

令  $\zeta = \frac{s}{l_e}$  并设单元的位移模式为:

$$\begin{cases} u^{(i)} = \alpha_1 + \alpha_2 \zeta \\ w^{(i)} = r_1 + r_2 \zeta + r_3 \zeta^2 + r_4 \zeta^3 \end{cases} \quad (23)$$

将结点位移的  $i$  级摄动系数

$\{w^{(i)}\}$  及结点坐标  $r_m$ ，

$r_n$  代入 (23) 解出  $\alpha_1$ ，

$\alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3,$

$\gamma_4$  并代回 (23) 式得到：

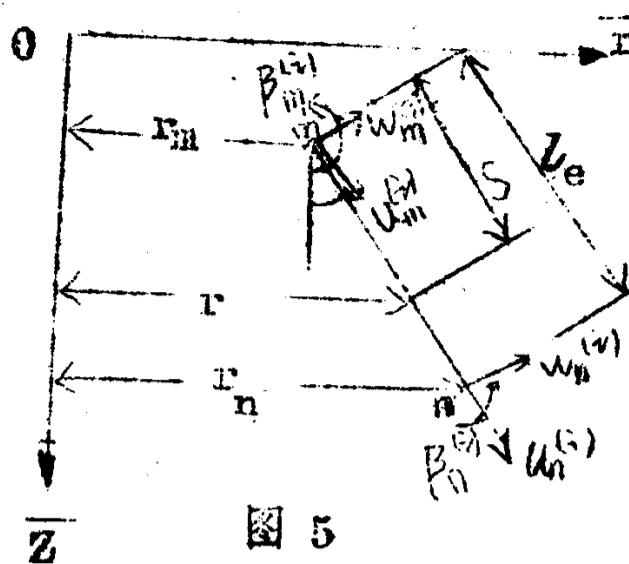


图 5

$$\{U^{(i)}\}^e = [N] \{w^{(i)}\}^e \quad (24)$$

$$\{U_1^{(i)}\}^e = [N_1] \{w^{(i)}\}^e \quad (25)$$

$$\{\epsilon^{(i)}\}^e = [O] \{w^{(i)}\}^e \quad (26)$$

其中：

$$[N]_{3 \times 6} = \begin{Bmatrix} [N_1]_{2 \times 6} \\ [N_2]_{1 \times 6} \end{Bmatrix}, [O]_{4 \times 6} = \begin{Bmatrix} [N_1]_{1 \times 6} \\ [Q]_{3 \times 6} \end{Bmatrix}$$

将 (24) 代入 (18) 得单元  $i$  级摄动系数的线性应变与结点位移之间的关系：

$$\{\epsilon_1^{(i)}\}^e = [B] \{w^{(i)}\}^e \quad (27)$$

根据 (5) 式可推出：

$$\{\epsilon^{(i)}\}^e = [D] \{\epsilon^{(i)}\} \quad (28)$$

将 (17) 代入 (28) 有：

$$\{\sigma^{(i)}\} = \{D\}(\{c_1^{(i)}\} + \{e_n^{(i)}\}) = \{\sigma_1^{(i)}\} + \{\sigma_n^{(i)}\} \quad (29)$$

将(24), (25), (26), (27), (29)代入(16c), 且由于k级  
结点位移摄动系数的变分是任意的, 其系数应为零, 得到:

$$\begin{aligned} & \sum_e \left[ \int_0^{L_e} [B]^T [D][B] r ds \{w^{(i)}\}^e + \int_0^{L_e} [B]^T \right. \\ & \left. \{\sigma_n^{(i)}\}^e r ds + \int_0^{L_e} [C]^T \sum_{j=1}^{i-1} s^{(j)} \{w^{(i-j)}\}^e \right. \\ & \left. r ds - \int_0^{L_e} [N_2]^T t^{(i)} \{q^e\}^e r ds - \sum_j r_j [N]^T t^{(i)} \right. \\ & \left. \{F_j^e\} = 0 \right. \end{aligned} \quad (30)$$

式中:

$$\{\sigma_n^{(i)}\}^e = \frac{1}{2} [D][C][A^{(i)}]^e [N_1]^T ;$$

$$\text{且 } [A^{(i)}]^e \sum_{j=1}^{i-1} \{w^{(j)}\}^e \{w^{(i-j)}\}^e T ;$$

$$\begin{aligned} & s^{(j)} \{w^{(i-j)}\}^e = [N_1] \{w^{(j)}\} ([D][B] \{w^{(i-j)}\})^e \\ & + \frac{1}{2} [D][C][A^{(i-j)}]^e [N_1]^T . \end{aligned}$$

$$\text{若定义: } [K]^e = \int_0^{L_e} [B]^T [D][B] r ds ;$$

$$\{P_c\}^e = \int_0^{l_e} [N_2]^T \{q^0\}_e^e r ds + \sum_{j=1}^r [r_j]_j^T [N]^T \{F_j^0\} ; \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \{P_A^{(i)}\}^e &= \int_0^{l_e} [B]^T [D] [C] [A^{(i)}]_e^e [N_1]^T r ds + \int_0^{l_e} \\ &[C]^T [D] [B] [A^{(i)}]_e^e [N_1]^T r ds; \end{aligned}$$

$$i \geq 2$$

$$\{P_B^{(i)}\}^e = \int_0^{l_e} [C]^T [D] [C] \sum_{j=1}^{i-1} [A^{(i-j)}]_e^e [N_1]^T$$

$$\{w^{(i)}\}^{eT} [N_1]^T r ds; \quad i \geq 3$$

将各单元集成后即得：

$$(K) \{w^{(i)}\} = t^{(i)} \{P\} - \{P_A^{(i)}\} - \{P_B^{(i)}\} \quad (32)$$

$\{P_A^{(i)}\}$ 、 $\{P_B^{(i)}\}$ 、 $\{P_c\}$ 都是单元列阵(31)集成的结果， $\{P_c\}$

是与外载有关的常量列阵； $\{P_A^{(i)}\}$ 、 $\{P_B^{(i)}\}$ 是只与  $i-1$  级振动以前的计算结果有关的列阵，对于  $i$  级振动来说，它们是已知量。

当  $i=1$  时， $\{P_A^{(i)}\}$ 、 $\{P_B^{(i)}\}$  均为零，这时方程(32)所对

应的解即是线性解。在求得第一级振动的线性解  $\{w^{(1)}\}$  后，可以

根据(31)式确定(32)式右边第二、第三个载荷列阵，再用(32)式求得第二级振动的位移系数。按上述方法循环进行下去，

将求得各级位移、应变、内力摄动系数的值。(32)式中 $[K]$ 是总刚度矩阵，在各级摄动中它是一个常量矩阵。因此在编计算机程序时，采用三角分解的方法进行求解最为方便。

在进行上述求解过程中，还有一个系数 $t^{(1)}$ 未知，它要根据0点的位移等于摄动参数 $w_0$ 这个条件来确定。设 $w_0$ 表示0点的法向位移 $w_0$ ，这个位移的幂级数展开式是：

$$w_0 = w_0^{(1)} + w_0^{(2)} + \dots = w_0$$

于是得到：

$$w_0^{(1)} = 1 \quad (33)$$

$$w_0^{(i)} = 0 \quad (i \neq 1)$$

根据这些条件可确定出各级 $t^{(1)}$ 的数值。

#### 四、算例

运用摄动有限元法，我们具体计算了正截锥壳在集中力和均布力两种载荷分别作用下的位移、内力。壳的几何尺寸、载荷情况分别如图6、图7所示。

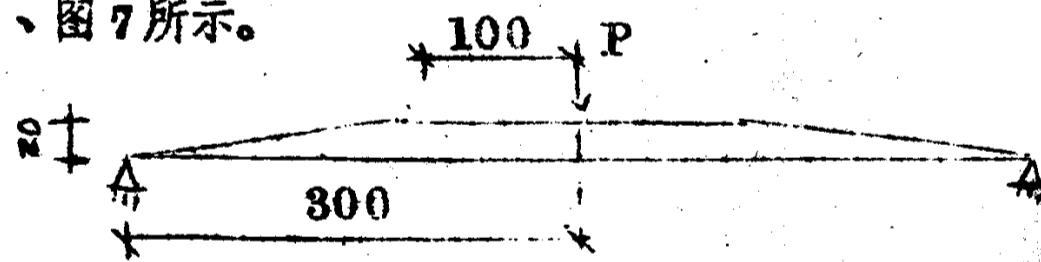


图 6

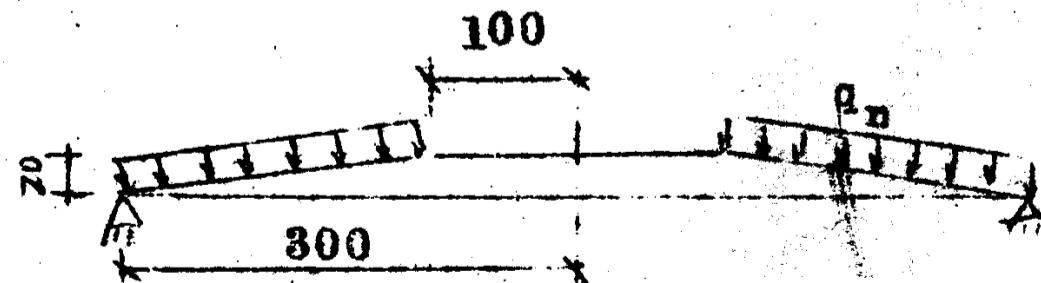


图 7

在此，材料的泊桑比  $\nu$  取为 0.3，壳厚  $h$  取为一个单位。计算结果如图 8~14 所示，其中带圆圈的曲线（—○—）表示均布力载荷作用下的各项计算结果，不带圆圈的另一簇曲线表示集中力作用下的各项计算结果；图中分别用①、②标出振动参数取 -1 和 -3 时的结果。

从图中可以看到用本方法算得的壳中内力是满足边界条件的。考虑非线性项后，内力大小有不少变化，如壳体受均布载荷情况下， $N_0$  的非线性解与其对应的线性解的最大误差可达 53%。

为了校核本方法的正确性，我们计算了环板在集中力载荷作用下的位移（如图 15）。得到的结果绘成曲线（如图 16）与叶开源教授在《环形薄板大挠度问题》一文中的振动解完全一样。这也从一个方面说明振动有限元法是可靠的。

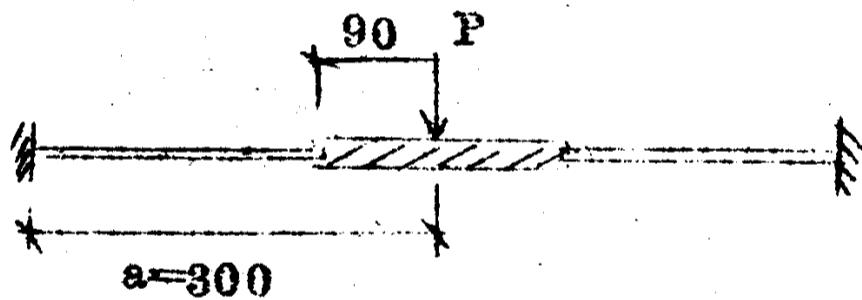


图 15