高等代数

陈良植 揭方琢 编

华中师范学院数学系函授教研室

目　　录

第一章　消元法

解方程是古典代数中的一个中心问题。最简单的一类方程是线性方程。线性方程组理论不仅是许多数学分支的基础，而且也是研究其他学科的工具。

本章着重讨论解线性方程组的消元法。在介绍线性方程组的一般概念之后，于中学所述消元法的基础上引入矩阵及其初等变换，给消元法以矩阵形式。

§1　线性方程组

在解析几何中我们知道，每个二元一次方程代表一条直线，因此称二元一次方程为线性方程。借用这个名称，对多个未知量的下列方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

亦称之为**线性方程**。由这种形式的方程组成的方程组称之为**线性方程组**。

线性方程组的一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (1)$$

其中x_1、x_2、…、x_n代表n个未知量，m表示方程的个数，$m\times n$个数a_{ij}（$i=1, 2, \cdots, m$，$j=1, 2, \cdots, n$）称

为**方程组的系数**，下标i，j指明a_{ij}是第i个方程中第j个未知量x_j的系数；m个数$b_i(i=1, 2, \cdots, m)$称为**常数项**，下标i指明b_i是第i个方程的常数项。方程组(1)中的方程个数m与未知量的个数n不一定相等。

方程组(1)当$b_1=b_2=\cdots=b_m=0$时成为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

这种常数项皆为0的线性方程组称为**齐次线性方程组**。相反地，常数项不全为0的线性方程组称为**非齐次线性方程组**。

定义 如果当$x_1=k_1$，$x_2=k_2$，…，$x_n=k_n$时，方程组(1)的各式都成为恒等式，则称$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$为方程组(1)的一个**解**。

方程组(1)的一个解是一个有确定顺序的数组，它指明x_1，x_2，…，x_n应依次取k_1，k_2，…，k_n组中的各个方程才被满足。

方程组(1)的解的全体称为它的**解集合**，简称解集。

注意，一个方程组的解集可以是个空集。解集是空集表明该方程组无解。

例如，方程组

$$\begin{cases} 6x+9y=7 \\ 4x+6y=3 \end{cases}$$

无解，我们仍然可以说到它的解集，这时解集是空集。

解方程组就是要求确定方程组的解集。具体说，就是求出方程组的所有解（当方程组有解时）或者判明方程组无解。应该认为，对于本来没有解的方程组，如果我们判定了

它无解，也就是解了这个方程组。

方程组的一个中心课题就是求方程组的解。除此而外，对线性方程组的理论研究还需要回答下面一些问题：

1）如何判定有没有解及有多少个解；

2）有无公式解，即当方程组有解时，它的解能否用方程组的系数与常数项的式子直接表出；

3）解集的结构如何，即在有多个解的情况下进一步研究解与解之间的关系，以了解解集的组成方式。

线性方程组的上述课题，我们将分散于第1—3章进行讨论。下面一节将着重考虑线性方程组的解法问题，即如何来求方程组的解。

§2 消 元 法

对线性方程组的求解，中学数学里介绍了加减消去法，代入消去法与行列式解法，并附录有高斯消去法。就方法比较，一般来说消去法较行列式解法简便，更具普遍性，因而更为实用。

消去(元)法的思想是通过消去方程组中一些方程的一些未知量，把解原方程组归结为解其中一些方程含有较少个数未知量的方程组。

例如，解线性方程组

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 4 & ① \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 8 & ② \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 & ③ \end{cases}$$

用加减消去法解之如下：

第①个方程减去第③个方程的4倍，第②个方程减去第③个方程的2倍，把解给定方程组归结为解下面的方程组：

$$\begin{cases} -9x_2-6x_3 \qquad = 0 & ④ \\ -3x_2-6x_3 6 \quad = 6 & ⑤ \\ x_1+2x_2+x_3=1 & ⑥ \end{cases}$$

这时④、⑤两个方程就各减少了一个未知量。继续这个过程：

$$\begin{array}{ll} ④-3\times⑤ & \\ ⑥+\frac{2}{3}⑤ & \end{array} \quad \begin{cases} \qquad\qquad 12x_3=-18 & ⑦ \\ \quad -3x_2-6x_3=6 & ⑧ \\ x_1 \qquad -3x_3=5 & ⑨ \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{12}\times⑦ & \\ -\frac{1}{3}\times⑧ & \end{array} \quad \left| \begin{array}{ll} \qquad\qquad x_3=-\frac{3}{2} & ⑩ \\ \quad x_2+2x_3=-2 & ⑪ \\ x_1 \qquad -3x_3=5 & ⑫ \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ll} ⑪-2\times⑩ & \\ ⑫+3\times⑩ & \end{array} \quad \left| \begin{array}{ll} \qquad x_3=-\frac{3}{2} & ⑬ \\ x_2 \quad =1 & ⑭ \\ x_1 \quad =\frac{1}{2} & ⑮ \end{array} \right.$$

变换⑬、⑮两个方程，即得原方程组的解为

$$\left| \begin{array}{l} x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=1 \\ x_3=-\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

或写成（$\frac{1}{2}$，1，$-\frac{3}{2}$）.

用代入消去法对给定方程组可解之如下：

由方程组的第③个方程得

$$x_1=1-2x_2-x_3$$

代入①、②之后，化原方程组为

$$\begin{cases} 4(1-2x_2-x_3)-x_2-2x_3=4 \\ 2(1-2x_2-x_3)+x_2-4x_3=8 \\ \qquad\qquad x_1+2x_2+x_3=1 \end{cases}$$

前两个方程即方程④、⑤，继续代入消元，就可求出原方程组的解$\left(\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{3}{2}\right)$.

由上面方程组的前两个方程看出，以$x_1=1-2x_2-x_3$代入方程①与②就相当于作了变换①$-4\times$③与②$-2\times$③，因此代入消元与加减消元本质相同，所不同的只是形式而已。

考察上述消元法的过程，自然发生如下问题：

1）逐次消元后得出的方程组，它的解集何以恰是原方程组的解集？也就是说，用消元法解方程组它的依据是什么？

2）消元过程中对方程组作变换，它的实质是什么？

3）任何一个线性方程组是否都可以用消元法来解？

以下，我们在介绍一些基本知识的同时，对这些问题将作出回答。

一　方程组的同解性

定义 1　两个方程组如果有相同的解集合，则称它们是**同解的**。

两方程组的同解，包含以下两种意思：

(i)若两方程组中的一个无解，则另一个也必无解；

(ii)若两方程组有解，则一个方程组的任意一个解也必是另一个方程组的解。

显然，若方程组(1)与(2)同解，方程组(2)与(3)同解，则方程(1)与(3)也同解。

由两方程组同解的定义，解一个方程组时可以用一个与之同解的方程组来代替。消元法对方程组实施一些变换，以一些较易求解的方程组来代替原方程组求解，就是依据这一思想。

考察消元法的过程易于看出，用消元法解方程组，只是对组中的方程反复施行了以下三种基本的变换：

Ⅰ、互换两个方程的位置；

Ⅱ、用一个非零的数乘某一方程；

Ⅲ、把一个方程的倍数加到另一个方程。

这样三个变换称为**线性方程组的初等变换**。

因此，回答前面第一个问题就是要证明

定理1 对线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (1)$$

施行初等变换所得的方程组与原方程组同解。

显然，施行初等变换Ⅰ或Ⅱ，得出的方程组与原方程组同解。下面仅就初等变换Ⅲ来作证明。

为简便起见，不妨设对方程(1)所作的初等变换Ⅲ是把组(1)的第2个方程的k倍加于第1个方程。这时我们得到方程组

$$\begin{cases} (a_{11}+ka_{21})x_1+(a_{12}+ka_{22})x_2+\cdots+(a_{1n}+ka_{2n})x_n \\ =b_1+kb_2 \\ \qquad a_{21}x_1+\qquad a_{22}x_2+\cdots+\qquad a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a_{m1}x_1+\qquad a_{m2}x_2+\cdots+\qquad a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (2)$$

设$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$是方程组(1)的任意一个解。因组

（1）与组（2）后$m-1$个方程一样，所以$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$满足组（2）的后$m-1$个方程。又$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$满足组（1）的前两个方程，即

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1$$
$$a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2。$$

把第二式的k倍加于第一式，得

$$(a_{11} + ka_{21})c_1 + (a_{12} + ka_{22})c_2 + \cdots + (a_{1n} + ka_{2n})c_n = b_1 + kb_2。$$

它表明$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$满足组（2）的第一个方程。因此，$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$也是方程组（2）的解。

类似地可以证明方程组（2）的任一解也是方程组（1）的解。因此方程组（1）与（2）同解。

用消元法解线性方程组就是依据这个定理。

例 1 将方程组（1）的第i个方程的p倍与第j个方程的q倍相加，以所得的方程代替第i个方程，如果$p \neq 0$，那么这样得出的方程组与方程组（1）同解。

证明 为简便起见，不妨设$i=1$，$j=2$。这时得出的方程组为

$$\begin{cases} (pa_{11} + qa_{21})x_1 + (pa_{12} + qa_{22})x_2 + \cdots + (pa_{1n} + pa_{2n})x_n = pb_1 + qb_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (3)$$

我们证明方程组（3）与（1）同解。

对方程组（1）施行初等变换Ⅱ，以$p(\neq 0)$乘它的第一个方程，组（1）成为

$$\begin{cases} pa_{11}x_1 + pa_{12}x_2 + \cdots + pa_{1n}x_n = pb_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (4)$$

依定理1，方程组(1)与(4)同解。而方程组(3)是对(4)施行初等变换Ⅲ，把它的第二个方程的q倍加于第一个方程得出的结果，故方程组(4)与(3)同解。因此方程组(1)与(3)同解。

二　矩阵及其初等变换

在线性方程组中未知量采用什么文字并不具有实质性，线性方程组由它的系数和常数项完全确定。给出线性方程组(1)，把它的系数和常数项分离出来就得出矩形阵表

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{5}$$

反之，给出矩形阵表(5)也就可以写出相应的线性方程组(1)。这样，考察线性方程组时，在不致发生混淆的情况下，不妨认作表(5)就是组(1)的一种简略记法，只须注意表中最后一个竖列的数是表示方程组中等号右端的常数项。

定义2　由mn个数$a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m, j=1, 2, \cdots n)$排成$m$行(横的)$n$列(纵的)的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为**m行n列矩阵**，简称$m\times n$**矩阵**。

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

是一个 2 × 4 矩阵；

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2i \\ 0 & i & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

是一个 3 × 3 矩阵。

矩阵横的各排称为矩阵的**行**，纵的各列称为矩阵的列，数a_{ij}称为矩阵第i行第j列**元素**。

对矩阵的行数m和列数n，并不要求它们相等。特别地，当$m=n$时，这样的矩阵称为n阶方阵，即$n\times n$矩阵称为**n阶方阵**。如上面的 3 × 3 矩阵就是一个 3 阶方阵。

矩阵通常以大写字母A，B，…或记号(a_{ij})来表示。如需指明矩阵的行列数，则记为A_{mn}或$(a_{ij})_{mn}$。

线性方程组（1）的所有系数依它们原来的相互位置（即以第i个方程的第j个系数作为矩阵的第i行第j列元素）组成一个$m\times n$矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

这个矩阵称为线性方程组（1）的**系数矩阵**，而由方程组（1）的所有系数及常数项依它们原来的相互位置组成的$m\times(n+1)$矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn}b_m \end{pmatrix}$$

称为线性方程组（1）的**增广矩阵**。

例如，本节开头所列的线性方程组，它的系数矩阵是

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

而增广矩阵是

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

这样，在省略未知数及“+”号、“=”号后，线性方程组就可以用它的增广矩阵来简单表示。

从前面解线性方程组的过程中我们看出，对线性方程组施行初等变换时，只是对组中方程的系数和常数项作了相应的变换。因此这些变换可以在线性方程组的增广矩阵上来作。变换线性方程组实质上就是对它的增广矩阵的行进行变换。

线性方程组的初等变换Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，反映在矩阵中就是

Ⅰ、互换矩阵两行的位置；

Ⅱ、用一个不为0的数乘矩阵的一行；

Ⅲ、把矩阵某一行的k倍加于另一行。

定义3 变换Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ称为**矩阵的初等行变换**。

类似地我们还可以定义**矩阵的初等列变换**。这就是

Ⅰ、互换矩阵两列的位置；

Ⅱ、用一个不为0的数乘矩阵的一列；

Ⅲ、把矩阵某一列的k倍加于另一列。

矩阵的初等行变换与初等列变换统称**矩阵的初等变换**。

矩阵经过初等变换后就变成一个与它有相同行数和列数的矩阵。例如，把矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

的第3行的-4倍加到第1行，就得到

$$\begin{pmatrix} 0 & -9 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

当矩阵A经过初等变换变成矩阵B时，我们写成

$$A \longrightarrow B。$$

这样，采用矩阵形式，用消元法解本节开头所列线性方程组的过程就可以表示为

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{①-4③ \\ ②-2③}]{} \begin{pmatrix} 0 & -9 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{①-3② \\ ③+\frac{2}{3}②}]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & -18 \\ 0 & -3 & -6 & 6 \\ 1 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{12}① \\ -\frac{1}{3}②}]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{②-2① \\ ③+3①}]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[①\longleftrightarrow③]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

箭号“$\longrightarrow$”之下的①$-4$③表示将矩阵第3行的-4倍加到第1行，$\frac{1}{12}$①表示以$\frac{1}{12}$乘矩阵的第1行，①$\longleftrightarrow$③表示互换矩阵的第1、3两行。

例2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 \quad - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

解 对方程组的增广矩阵进行初等行变换如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[③-①]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{①+2② \\ ③-5② \\ ④+7②}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}③]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{①-③ \\ ②+③ \\ ④+4③}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

后一矩阵相应的线性方程组是

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = -8 \\ \quad x_2 \quad - x_4 = 3 \\ \qquad x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$$

它与原方程组同解。故令$x_4 = k$，即得原方程组的解为

$$(-8, \ 3+k, \ 6+2k, \ k)。$$

例 3 解线性方程组

$$\begin{cases} x_3+x_4=-2 \\ x_1+4x_2-x_3=2 \\ x_1+4x_2-2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+8x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$

解 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[④-②]{③-②} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{②+① \\ ③+① \\ ④-3①}]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[④+③]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

后一矩阵的第4行相应于方程 $0=-2$，由此可知所给方程组无解。

熟练矩阵的初等行变换之后，解线性方程组时，可以根据方程组的特征将多次变换归并于一次施行，以省书写过程。例如，对线性方程组

$$\begin{cases} 3x+y+z=6 \\ x+3y+z=4 \\ x+y+3z=0 \\ x+2y+2z=2 \end{cases}$$

如果注意到前三个方程中对应系数之和均为5，第2、3两个方程系数之和恰为第4个方程系数之二倍，那么便可如下进行变换：$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[④-\frac{1}{2}(②+③)]{\frac{1}{5}(①+②+③)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$