

理论流体力学原理

第一册目录

结论：旋涡——流体运动的肌腱	(1)
第一册主要符号表	(19)
第一编 涡量运动学和动力学原理	(24)
第一章 连续介质的动力学和热力学基础	(25)
§ 1. 连续介质的运动学描述。涡量场和膨胀场	(25)
§ 2. 连续介质运动方程	(37)
§ 3. 连续介质热力学大意	(44)
§ 4. Navier-stokes 方程	(54)
第二章 涡量运动学	(62)
§ 5. 膨胀场与涡量场诱导的速度场和粘附条件的作用	(63)
§ 6. 无旋无散场的物理不现实性	(68)
§ 7. 涡通量守恒定理和涡量矩定理	(73)
§ 8. 涡量随时间的变化和环量守恒流的运动学方面	(78)

第三章	涡量场的动力学	(89)
§ 9.	涡量动力学方程和涡量源	(89)
§ 10.	涡量方程的边界条件和求解	(103)
§ 11.	涡量场从固壁的产生、扩散和耗散	(117)
§ 12.	涡量与能量、耗散和熵	(132)
§ 13.	环量守恒流的动力学方面—— Bernoulli 定理和最小耗散定理	(141)
第四章	涡量场对物体的作用	(151)
§ 14.	不可压涡量场的渐近行为	(151)
§ 15.	速度场的渐近行为和积分特性	(159)
§ 16.	涡量场对物体的作用力和力矩	(168)
§ 17.	运动物体所受的合力与涡量源	(177)
第五章	Navier-stokes 方程的精确旋 涡解	(192)
§ 18.	二维轴对称涡	(193)
§ 19.	有轴向流的轴对称涡	(202)
§ 20.	锥型相似的 Navier-stokes 方程和层流锥型涡	(211)

§ 21. 具有可变涡团粘性系数的流流

锥型旋涡

(225)

第一册参考文献

(237)

绪 论

旋涡——流体运动的肌腱

近代流体力学的奠基人 Prandtl 的学生、著名空气动力学家 Kùchemann (1961) 曾经说过：“旋涡是流体运动的肌腱。”由于这句话深刻地概括了涡在流体运动中的作用，它现在已成为至理名言。如果我们再联想到另一位著名流体力学家 van Dyke 所说的宇宙物质有百分之九十九以上是流体，那么我们就更能意识到涡运动在整个物质世界中的地位了。

本讲义的全部内容，归根到底，就是试图通过严格的理论分析，证实 Kùchemann 这句话，并研究旋涡的产生、发展、与流体和固体的相互作用、稳定性等等现象的一般规律，帮助有关读者获得较系统扎实的理论 and 概念基础。在这里，我们先用科普的语言对 Kùchemann 的话作一番诠释，并据笔者接触到的领域，概述当前涡运动基础理论研究的主要方向。

千姿百态的涡运动*

已经有一些文章 (Cornish 1983, Lugt 1985) 对自然界和技术领域中出现的涡运动作了生动的描述。我们在这里仅举一些典

型的例子，以便进而概括出涡流的基本特征。

自然界中最大的旋涡大概要算宇宙空间的旋涡星云了。和宏观尺度的旋涡不同，它们的离心力不是由压力来平衡的，而是由引力来平衡的。银河系也是一个扁平的大旋涡，而它的每个恒星本身又都包含着不同尺度的涡运动。这类宇宙空间中的硕大无朋的旋涡，是天体物理学家的研究对象，超出了本讲义的范围。

在行星尺度上也有各种各样的涡运动。木星表面上的“红斑”就是旋涡状的气体云。地球上与之同一量级的大旋涡是台风。这些，是气象学家研究的对象；有关行星涡流的文献正日益增多。再小一些的是山脉、岛屿背风侧形成的旋涡。有的卫星照片清晰地显示出岛屿周围的云层形成十分美丽的卡门涡街，人们估计其雷诺数高达 10^8 。由于地球大气层高度的限制，这些大尺度旋涡都很扁平，称为“盘状涡”，涡核的直径可达旋涡高度的100倍。

再小些的旋涡就是海水或地面上的龙卷风了，它们的涡轴从地面延伸到云层，但涡核很细，其直径与高度之比仅约1:100。这种涡称为柱状涡。龙卷风的涡核有强烈的轴向流，能把海水或地面上的物件吸到空中。

有轴向流的涡核是涡运动中相当普遍的现象。除台风之外，常见的水中的旋涡也能清晰地显示出轴向流的存在。大范围的巨型海洋旋

* 课堂讲解时，将用几十幅彩色幻灯片配合说明本节内容。

涡使海面转成抛物面，甚至被人试图用来解释百慕大三角之谜。即使是在实验室中仔细控制的二维条件下产生的涡流，例如圆柱体下游的卡门涡街，也会在涡核中逐渐自动形成轴向速度。这些事实表明旋涡具有顽强的三维性。我们将看到，旋涡乃是三维空间独具的产物。在二维空间中不存在完整的旋涡形态，而在四维空间中根本就没有这种形态。人类恰好生活在三维空间之中，于是才有幸欣赏到如此绚丽多姿的旋涡！不过，为什么我们的宇宙空间刚好是三维的，至今还是物理学的一个谜。

旋涡的另一种形态是首尾相联的涡环。从吸烟者喷出的烟圈直到核爆炸的蘑菇云，都可看到涡环的存在。曾经有过这样的实验(Fohl & Turner 1975)：在一定条件下让两个涡环对撞，它们就汇合起来，然后又分裂成两个新的涡环，在一个与包含碰撞前轨迹的平面相垂直的平面中分道扬镳。这个迄今无法从理论上解释的现象告诉我们，涡运动具有高度的非线性，因此虽然人们早就观察到了旋涡的存在，却只能长期停留在对它们的相互作用作定性描述的阶段。

所有这些千姿百态的旋涡当然有它们的共性。就宏观级的涡来说，它们都满足共同的基本规律。此外，根据Lust(1985)，按照旋涡所受到的力、发生过程和边界条件，可以把它们分成五类：

容器中的涡，例如离心机、管道中的涡；

剪切层中的涡，如物体背风侧或射流中的涡；

进口或出口 涡，如浴盆涡、气旋和龙卷风；

热对流 产生的涡，如太阳表面胞状颗粒体；

旋转系统 产生的涡，如台风和低压大气环流。

上面一些典型的例子已足以表明旋涡不仅千姿百态，而且普遍存在。那么，涡运动为什么如此普遍地存在？这正是我们理解 Küchermann 那句话首先要回答的问题。

旋涡的普遍存在性

一小团流体总要受到两种力的作用：彻体力和表面力。如果彻体力不能表示成一个标量函数的梯度，那就会造成流体的旋转运动，即导致一个“涡量源”。Lugt (1985)所说的第五类旋涡就是这样形成的。另一方面，表面力又可以分解成法向力和切向力。后面将看到，在紧贴运动固体的流体层中，无论是法向力还是切向力，都会因其沿物面的变化通过粘性而产生涡量。因此，固体边界加上粘性，是第二个涡量源。此外，如果流体不是正压的，即其状态方程有两个以上独立的热力学变量，那么还会形成第三个涡量源，例如弯曲激波后面的熵梯度和大气中的某些斜压运动造成的涡量。后面将看到，另外还有一类同粘性与压缩性的耦合相关的涡量源。

所有这些产生的涡量，会因对流和粘性扩散而散布开去，成为

形成集中的旋涡的“砖石”。这里要指出，虽然涡量有明确的数学定义，旋涡却没有，迄今仍众说纷纭。Lust(1983)提出，旋涡就是一群绕公共中心旋转的流体微团。另一个定义是Saffman(1979)提出的，认为旋涡是“以无旋流体或固体壁面为边界的有限体积的旋转流体”。这个定义虽然排除了Lust的定义所包含的星云之类的旋涡，但仍然十分广泛，不只包括有明显旋转轴的集中涡，也包括Lust的定义所不包含的边界层和自由剪切层这类薄的涡层。对于本讲义的目的来说，我们拟采用Saffman的定义。

严格说来，上述几种涡量源都是普遍存在的，因而旋涡也就成了流体中十分普遍的运动形态。特别是固体表面通过粘性产生的涡，由于边界层的存在，是任何简化的理论模型都不可能完全避免的，因此也是最常见的。陆士嘉教授精辟地说过：流体的本质就是涡，因为流体经不住搓，一搓就搓出了涡。这句话既道出了流体与固体的本质区别，又点明了流体运动的基本形态和出现这种形态的原因，Küchemann的话恰好互相补充。事实上，正是这种“搓出来的涡”，造成了除波阻之外的全部阻力，而且在适当设计的物体外形下，还造成了带来巨大效益的升力。可以说，整个航空空气动力学的历史，就是一部向旋涡索取外力并抑制旋涡造成的阻力的历史（吴介之 1984, 1985a）。

在十九世纪，有一派理论家热衷于用数学方法研究无粘无旋流的

“精确解”，结果导致了著名的 D'Alembert 悖论。另一方面，实验家观察到的流动阻力却无从解释。那时的局面正如 Hinshelwood 所形容的，“水力学工程师观察着不能解释的现象，而数学家们却解释着观察不到的事物”（见 Birkhoff 1960）。只是到了本世纪初，Prandtl 才在边界层理论中阐明了物面附近的粘性层——亦即附着涡层——的关键作用，正确地回答了 D'Alembert 悖论。这个历史的典故，恰恰说明了“搓出来的涡”在流体运动中的普遍的重要性。

事实上，十九世纪理论家们研究的那种不可压无旋流体，并不是真正的流体：它的每个微团都只有平移运动，而且对任何外界条件的变化总是瞬时作出反应。用 Saifman (1981) 的话来说，“它将丧失其无限多个自由度（正是这种自由度使无限多样的流体运动成为可能），而变成那些以其运动产生流动的物体的一种粘性延拓；一旦让壁面静止下来，流体也就立即停止。”这是一幅与真实的流体世界相差多么遥远的单调图景！

涡运动形态的近似守恒性 和动能的高度集聚性

仅仅普遍的存在性还不足以说明旋涡是流体运动的肌腱。涡运动

还有它鲜明的独特性质。

首先，熟知的 Helmholtz 涡定理指出：在任一瞬间，涡管强度具有沿涡管不变的空间守恒性；在一定条件下，流体中的物质涡管及其强度又具有时间守恒性。旋涡一旦产生之后即保持其管状形态和强度至少在高雷诺数下近似不变的这种特性，是它们易于被观察和跟踪的一个重要原因，从形态上显示出了旋涡是流体运动的肌腱的含义。

但是，在动力学上真正体现这种肌腱的作用的，还是流体动能在旋涡中的高度集聚性。当然，这里所说的旋涡仅指那些有公共旋转中心的集中涡。在本讲义中，为区别起见，我们将专称这种集中的涡为“旋涡” (swirling vortex)，而把包括边界层和剪切层在内的更广泛意义上的涡筒称为“涡”。德国著名空气动力学家 Betz (1950) 在一篇通俗论文中曾表达了这样的思想：能够抵抗粘性耗散并造成能量或涡量集聚区的唯一已知的机制，就是涡层的卷绕而形成的旋涡，即 Lust (1985) 分类中的第二类旋涡。Betz 的这一见解，是一个十分重要的观点。正是旋涡造成的高度的动能集聚和与之伴随的压力骤降，才使具有一定守恒形态的旋涡得以成为真正名符其实的流体运动的肌腱。一个“好”的旋涡，或者可以因其急剧的旋转运动而完成人们交给它的某些任务（例如掺混媒质），或者可以因其低压核心而产生我们需要的吸力（例如细长机翼的涡升力）。反之，一个“坏”旋涡，也无非是因为这两方面原因而给人类造成麻烦甚至

* 对 Betz 的观点作上述概括的是 Damms & Küchemann (1974)。

灾难。一个龙卷风可以只有五米直径，但其最大周向速度可达每秒百米以上，而且行经数百公里而不衰。

进一步说，旋涡不仅以其自身的高能和低压直接为人类造福或带来破坏，而且还通过这两个因素有力地组织着整个流体的运动。涡核的低压把周围的流体卷吸到旋涡中来，使它们共同参与剧烈的旋转运动，从而形成了从气象学中的涡直到湍流中的涡的大尺度结构。因此，在马赫数不太高的情况下，流体的一切运动，都是围绕着各种旋涡发生和发展的；人类同流体中的大尺度结构打交道，就是同涡打交道。正如画画时首先要用炭条勾勒出几道简洁粗犷的轮廓线一样，一个流体力学家在研究流体运动及其与固体的相互作用时，如果首先抓住流场中主要的旋涡，他就至少已取得了定性的成功。因此，说旋涡是流体运动的肌腱也许还不够，我们甚至还可以说旋涡是流体运动的筋骨。事实上，“涡骨架”（vortex skeleton）这个词已在文献中出现了。

这样，至少对于中等以下的马赫数，可以认为流体力学的主要任务就是：深入掌握涡运动的规律，设置各种边界条件（流体的或固体的）来创造所需要的涡，充分利用和控制物体与涡的有利相互作用；同时努力消除不需要的涡，避免有害的相互作用。

涡动力学的主要研究领域及发展概况

上面的分析已经表明了涡动力学的重要性。从它的主要研究领域

所涉及的范围，可以更清楚地看出它的重要性。这里所说的“涡动力学”是汉语上方便的名称；它包含涡量动力学（vorticity dynamics）和涡的动力学（vortex dynamics）这两大部分，前者是后者的基础。当然这并不意味着用涡量场描述涡运动总是比用速度场描述更方便；速度场毕竟是基本的矢量场。

虽然人类对旋涡的观察和利用几乎和人类的文明史一样古老，而且有了像航海和航空这样大规模的利用和控制涡运动的实践活动；虽然 Helmholtz 和 Kelvin 在上个世纪就奠定了涡动力学的一些基本原理；但是如前所述，由于涡量场和涡运动高度的非线性，只是到了计算流体力学诞生之后，涡动力学的理论研究才开始进入一个空前活跃的阶段，直到现在还没来得及作系统的总结。因此，涡动力学今天还是一门十分年轻的分支学科，确定它的范围也较困难。不过，根据笔者接触到的有限的文献来看，除了涡动力学在天体物理、大气、海洋、地学、能源、交通、生物工程、建筑和其他工业中的应用研究之外，当前对宏观尺度涡运动的基础研究和应用基础研究，至少有下列几个重要领域：

1. 涡量动力学。

涡量动力学研究涡量场的发生、发展及其与运动物体相互作用的规律。有人认为，涡量动力学已是成熟的古典领域了，其实不然，就拿涡量场的基本动力学方程来说，我们将看到，人们长期未导出它最普遍的形式。气象学家常用的似乎既考虑了粘性，又考虑了压缩性的

Фридман-Helmholtz方程其实并不代表一个自洽而完整的物理模型，而且，涡量场方程只有同适当的边界条件放在一起才能求解，可是对边界条件的研究却是很晚才开始的（Wu & Gulcat 1981），

一个重要的进展是在涡量场与固体的相互作用方面。Lighthill（1963）首次初步阐明了运动物体表面产生涡量场的某些基本机理，揭示出有六十年历史的边界层理论本质上是涡量动力学的一个分支。十几年后，吴镇远（Wu 1981）导出了用涡量场的积分表示不可压流体中固体所受的力和力矩，进一步揭示出涡量场在流体对运动物体的反作用中所起的关键作用。Lighthill和吴镇远的工作最近被笔者（吴介之 1985b）分别加以发展而成为统一理论的两个侧面，并由此得出了有关摩阻的三维积分特性的十分有趣的结果。

涡量场不仅是流体动能的高度集聚区，也是将动能转化为热能的高度耗散区。我们将看到，不可压流体的动能可以表示成涡量场的双重体积分，因而没有涡量就没有动能；另一方面，耗散函数也可以表示成涡量场的体积分，从而没有涡量就没有耗散。旋涡集聚动能和耗散动能这两种倾向的消长，决定着旋涡内部的热-动力学平衡。这里值得注意的是，存在着一个古典的Helmholtz最小耗散定理，正是这个定理启发了线性不可逆热力学的最小熵产生原理。可是长期以来不可逆热力学只在忽略对流的情况下获得了重大的进展，而在流体力学中恰恰是对流起着主导作用，以至于直到最近Helmholtz定理仍然是不可逆热力学

同流体力学之间唯一的桥梁。”本来，流体力学是应当同不可逆热力学结合起来的，下面我们还要立即看到这一需要。因此，这里又出现了一个很有意义的有待开拓的领域。鉴于耗散同涡量的密切联系，涡量动力学有可能在这个新领域中扮演某种角色。

上述这些方向目前还基本限于不可压流体，如果进入高马赫数范围，同时考虑散度场与涡量场的非线性耦合，问题就要复杂得多。对于粘性流体来说，在这方面迄今还没有重大的成果。

2. 高雷诺数下的涡运动

除一些特殊流动外，只有忽略粘性才能保持环量守恒。如果雷诺数很小，旋涡会迅速耗散。人们实际观察到的较为稳定而持续存在的旋涡，都是在高雷诺数下发生的。因此，高雷诺数乃至无限大雷诺数下的涡运动，是旋涡动力学的主要研究对象。这时，涡的基本形态是薄的涡层和线状集中涡索，其无粘近似就是无限薄面涡和无限细线涡。除了附着涡层理论即边界层理论已有它独立的发展之外，目前的研究重点是涡层离开物面后卷绕成自由涡索的规律，以及涡索之间、涡索与固体和流体之间的相互作用规律。这是一个在许多领域都极有应用价值的领域，有关旋涡动力学应用研究的大量实验、理论分析和数值

* Prigogine 等人曾经作过扩充这种桥梁的尝试，但不能认为是成功的，参见吴介之（1983）。最近管楚冷和周盛（1985）试图建立第二座桥梁，但其基础也还有待于进一步澄清。

计算工作都集中在这个领域。单只是对飞行器(飞机、导弹、航天飞机)周围的涡层和涡索的研究就构成了多次国际会议的主题,可以找到数以千计的论文,并且获得了“大迎角空气动力学”这个专门名称。而对各种容器和管道内部的旋涡的研究,也已出现了厚达二百页的述评(Lewellen 1971)。

在高雷诺数下,流体从物面分离的过程本质上是附着涡层向自由涡层转化的过程,这是自由旋涡研究的起点,现通称为流动分离理论。流动分离曾经和湍流一起被看成是流体力学的两大难题,但近年来却沿着两个方向有了重大的突破,出现了分离区邻域的定性的拓扑理论和定量的扰动理论,但分离理论的发展和实用程度还赶不上高雷诺数下涡运动应用研究的需要。

3. 非定常涡运动、稳定性和破碎

上面讲的高雷诺数下的涡运动,主要还是指定常运动。一旦进入非定常流,一个极为丰富的新领域立即展现在我们面前。由于在一定条件下涡运动固有的不稳定性,可以说非定常性是许多涡运动的一个本质特征。拿一根孤立的涡索来说,在一定条件下,它的线状核心会突然膨胀成一个泡,或者突然扭曲成螺旋形,后面常继之以混乱的湍流。这就是涡破碎现象,研究它的机理具有重大的理论和实践意义。但对破碎的机理迄今还没有取得完全一致的意见。一般认为,旋涡的破碎同扰动波沿涡核的非线性传播有密切联系,也同流体力学稳定性

相关，因此这里面涉及复杂的非定常问题。

在流体流经陡物体时，物体背风侧出现的旋涡会随雷诺数增大而陆续脱落，同时使流场和物体经受非定常振荡。这里是又一种旋涡稳定性问题，对此自然界给了我们很好的启示，那就是在劲风之下形状稳定不变的沙丘或雪丘。它们的背风侧都有弯曲的月牙形状，因为这会造成涡核的轴向流，增强它的抗脱落能力；而旋涡的高速转动又会把沙丘背风侧的陡壁挖掘得更陡，从而反过来增强涡核的轴向流。正是在大自然的这一启发下，高歌和宁隄（1982）发明了先进的沙丘驻涡火焰稳定器。

非定常涡运动的另一个崭新领域，是对昆虫高频挥翼而产生的极高非定常外力的机理研究，因为这一研究很可能导致二十一世纪飞行器设计的根本变革。这种新机理是Wcis-Fogh（1973）最先发现的，随后的理论和实验发现这种挥拍运动涉及复杂的非定常涡运动过程（如见Maxworthy 1981）。这个领域的研究最近正在蓬勃兴起，今后还有大量的工作。

4. 湍流与涡

涡动力学所要攻克的最大堡垒，也是整个流体力学面临的最大堡垒，甚至是整个经典力学的最后堡垒，就是湍流。过去，湍流被看成是完全无序的运动，它的正统理论是纯粹的统计理论，近年来，实验发现湍流具有明显的拟序结构，这种结构的筋骨正是旋涡。因此，湍