机械设计 1期,1986

平面多杆复杂机构受力分析的简化法

北京航空学院 党祖祺 张启先

摘 要

本文对含有复杂杆组（非双杆组）的平面多杆机构，通过拆杆拆副转化为具有假设输入杆的虚拟的纯双杆组机构。在力的线性叠加原理基础上，运用两次或三次双杆组力分析性程序，即可首先求出被拆运动副中反力的未知分量。文中引有两个计算实例。本文所提简化法的特点是：概念简明，适应性广，并便于在微机上应用。

一、引 言

众所周知，用解析法作面平多杆复杂机构的力分析时，目前流行的做法是按每个运动杆列出含有已知外力和未知运动副反力的线性方程，然后用矩阵法联立数十个线性方程，一次同时解出所有运动副中的反力。由于涉及大型矩阵求逆，往往需要依靠大型计算机求解，而不便在微处理机或可编程计算器上进行。

近年来提出一种应用“阿苏尔组的型变换”原理作复杂平面杆组的动态静力分析方法[1]，使力分析有所简化。本文对此提出一种改进，即利用假想拆杆拆副法，将平面多杆复杂机构中所含复杂杆组（非双杆组）转化成具有一个或两个自由度的虚拟的纯双杆组机构，然后利用力的叠加原理分两步进行力分析。第一步需要调用双杆组程序确定一个或两个首先拆开的运动副中反力的未知分量，然后即可简单地计算其余运动副中的反力。

为了简便起见，以下讨论中忽略运动副中的摩擦。

二、虚拟的纯双杆组机构的形成

1. 拆去一个两副杆的转化法

研究如图1所示的自由度为零的8杆复杂杆组，其中A、L、H和E是与其它已知运动杆或机架连接用的外接运动副。在机构自由度计算中我们知道，如果拆杆去一个带有两个低

副的两副杆，将使机构增加一个自由度。在图1中除两副杆8（与其相接杆7的邻接杆2和6均为三副杆）以外，其余3个两副杆（1、3和5）中任何一个都可假想地拆去，而使原杆组虚拟成具有1个自由度的纯双杆组机构。如从杆组中拆去两副杆1，并设想将其余外接副（E、H、L）固定到机架上去，再假设1个输入杆，我们可以得到以下三种具有不同假设输入杆和不同双杆组的虚拟的纯双杆组机构：

（a）假设输入杆（4）→双杆组（5，6）→双杆组（7，8）→双杆组（2，3）。

（b）假设输入杆（6）→双杆组（7，8）与双杆组（5，4）→双杆组（2，3）。

（c）假设输入杆（8）→双杆组（6，7）→双杆组（5，4）→双杆组（2，3）。

同理，如果我们拆去两副杆3或5，并假设不同的输入杆，还可得到五种不同双杆组的虚拟的纯双杆组机构。

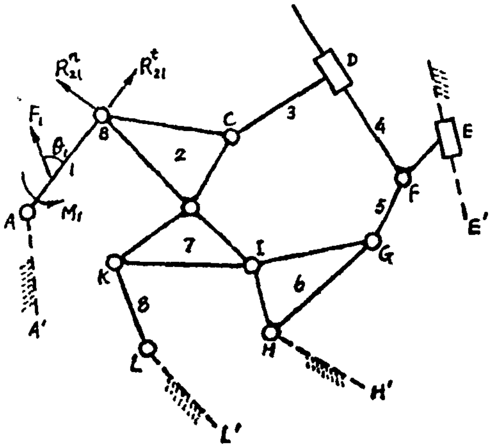
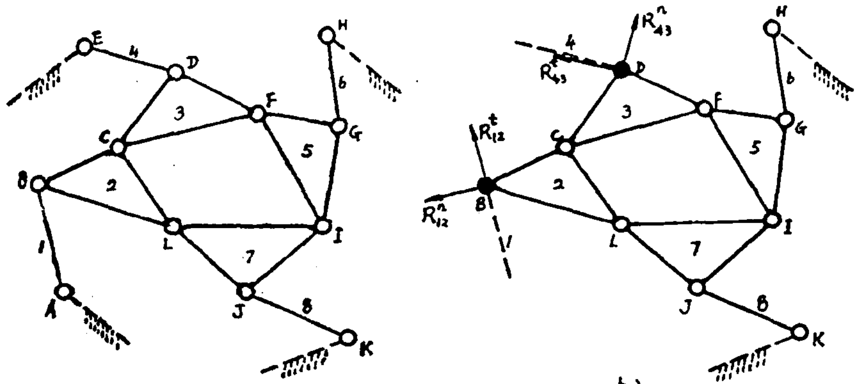


图 1

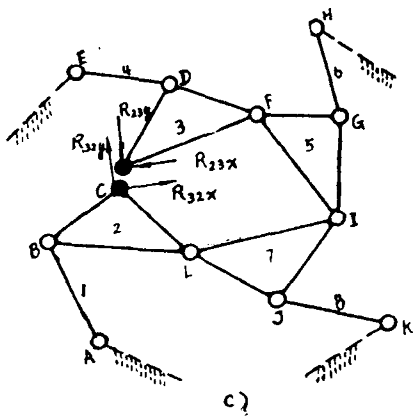
2．拆去二个两副杆或一个低副的转化法

在机构自由度计算中我们知道，如果拆去二个两副杆或拆去一个低制，将使机构增加两



a)　　b)

个自由度。如图2a所示为8杆复杂杆组的另一种类型，该8杆杆组不能通过拆去一个两副杆而虚拟成纯双杆组机构，只能拆去相邻的二个两副杆或拆开两个相邻三副杆的公共低副，才能虚拟成具有两个自由度的纯双杆组机构。例如在拆去二个两副杆1和4的情况中（如图2b所示）可虚拟成带有二个假设输入杆6和8以及二个双杆组（5，7）和（3，2）所组成的双杆组机构。当拆去一个公共低副c时（如图2c所示）也可虚拟成带有同样假设输入杆的，但有三个双杆组（1，



c)

图 2

2)，(3，4)，(5，7)组成的双杆组机构。

又如图 3 所示的另一类型的 8 杆复杂杆组，只能在 8 个运动副 A 、D 、E 、F、I 、J 、K 和 L 中任意拆去一个而虚拟成不同的纯双杆组机构。

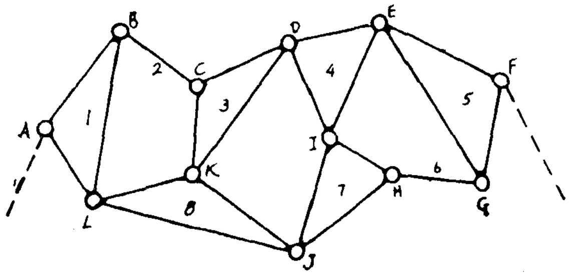


图 3

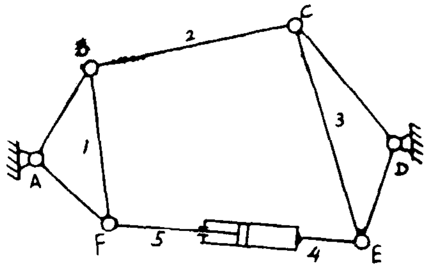


图 4

3．带有作动器移动副的转化法

对带有作动器的液压或气压机构，一般是无法拆成杆组的。但若将组成作动器移动副的两个两副杆看成是一个可变长度的两副杆，当给定作动器长度（也即给定两副杆的长度），则原机构就成为自由度为零的杆组。如图 4 所示为一个六杆液压机构，若给定作动器伸缩长度 EF，即可将组成作动器的杆 4 和 5 看成为一个两副杆 4-5，从而原机构就变成一个四杆杆组。若再拆去作动器两副杆 4-5，假设输入杆为 1（或 3）就虚拟成含有双杆组（2，3）（或（2，1））的机构。

三、复杂杆组力分析的简化法

经过上述转化，我们已将一个自由度为零的复杂杆组虚拟成具有 1 ～ 2 个自由度，即 1 ～ 2 个假设输入杆的纯双杆组机构。因而对其进行受力分析就相当于对由若干双杆组组成的机构进行力分析。在具体力分析中我们利用力的叠加原理，并采用分步法进行，第一步先求出拆杆或拆副处的运动副反力，第二步求出其余运动副中反力。为了图面清晰起见，作用在杆组上的外力没有全部表示出来。

1．拆去一个两副杆的力分析

我们以图 1 所示杆组为例，假定拆去两副杆 1，在杆 1 上作用有已知外力 F_1 和力矩 M_1，在运动副 B 处作用有杆 2 给杆 1 的约束反力 R_{21}，将 R_{21} 沿着 AB 杆和垂直 AB 杆的方向分解成两个分量 R^t_{21} 和 R^n_{21}。同理，杆 2 在 B 处受有约束反力 R^t_{12} 和 R^t_{12}（$R^t_{12} = -R^t_{21}$，$R^n_{21} = -R^n_{21}$），显然反力分量 R^n_{12} 可容易地由杆 1 绕 A 点的力矩平衡式确定，即

$$R^n_{12} = -R^n_{21} = -(M_1 + m_A(F_1))/L_{AB} \qquad (1)$$

而设 $\qquad R^t_{12} = X$

所以由杆 1 作用在杆 2 上的反力分量仅 R^t_{12} 为未知量 X。

对图 1 所示的复杂杆组，如果我们假想拆去带有一个移动副的两副杆 3，如图 5 所示，则在运动副 C 处由杆 3 作用于杆 2 的反力 R_{32} 应沿着平行和垂直移动副 D 的轴线 DF 分解成

两个分量 R^n_{32} 和 R^t_{32}，仅分量 R^t_{32} 为未知量 X，其中分量 $R^n_{32}(=-R^n_{23})$ 则可根据作用有已知外力 F_3 和 M_3 的 3 杆沿轴线 DF 方向的力平衡式求出，即

$$R^n_{32}=F_3\sin{}_3\theta \tag{2}$$

而设

$$R^t_{32}=X$$

由杆 3 通过移动副作用于杆 4 的反力将是一个已知的力矩 $M_{34}=M_3$，和一个待求的力 $R^t_{34}=F_3\cos\theta_3-X$。

由此可见，假想拆开一个两副杆时，在被拆开的运动副处，将运动副中反力沿特定方向分解成两个分力，其中一个总可以由被拆杆的力平衡关系式求得，而只余下一个待求分量 X。如果我们在图 1 中拆去杆 1 而将杆 8 作为输入杆，则该虚拟的双杆组机构力分析次序应该是：双杆组 (2, 3)→(4, 5)→(6, 7)→ 假设输入杆 8。此时分量 $X(=R^t_{12})$ 可看为作用在虚拟的单自由度双杆组机构上的唯一的未知外力，从而理论上可以根据对假设输入杆 8 对 L 点取矩的平衡关系式 $\Sigma m_L=0$ 求得。

如果我们指定未知分量 X 为某个值，并完成对上述 3 个双杆组的力分析，我们就能确定杆 7 对杆 8 的反力分量 R_{78x} 和 R_{78y}，于是在杆 8 上绕点 L 的力矩总和将是

$$\Sigma m_L=M_8+m_L(F_8)+m_L(R_{78x})+m_L(F_{78y}) \tag{3}$$

式中 F_8 和 M_8 是作用在杆 8 上的已知外力和力矩。显然，在任意指定 X 情况下，此式一般不为零。但基于力的叠加原理，Σm_L 可以用未知分量 X 的线性函数形式表示，即

$$\Sigma m_L=\overline{M}_L+KX \tag{4}$$

式中 $\overline{M}_L$ 是力矩常数，是由所有已知外力包括已求得的反力分量 R^n_{12} 所引起的一个量，KX 是仅仅由于未知反力分量 X 引起的一个量，其中 K 是一个待定的系数。如何确定这些未知量？我们可以先令 $X=0$，并在所有已知外力（包括 R^n_{12}）的情况下，利用双杆组计算程序去完成虚拟的双杆组机构的力分析。假设第一次由方程（3）绕点 L 的力矩之和求得 $(\Sigma m_L)'$，由方程（4）可知 $(\Sigma m_L)'=\overline{M}_L$。接着，对 X 取单位外力，即令 $X=1$，但忽略所有已知外力（包括 R^n_{12}）同上述过程一样，第二次求得 $(\Sigma m_L)''$，由方程（4）可知 $(\Sigma m_L)''=K$。因为杆 8 为虚设的输入杆，根据杆 8 的平衡条件，实际上绕点 L 的力矩之和应为零，也就是 $\Sigma m_L=0$，于是我们得到

$$\Sigma m_L=(\Sigma m_L)'+(\Sigma m_L)''X=0 \tag{5}$$

由此即可打定未知反力分量 X

$$X=R^t_{12}=-\frac{(\Sigma m_L)'}{(\Sigma m_L)''} \tag{6}$$

在上述将被拆运动副 B 中的反力全部确定后，第二步对其余各运动副反力 R_{ij} 仍可应用力的叠加原理确定如下：

$$\left.\begin{aligned}R_{ijx}&=(R_{ijx})'+(R_{ijx})''X\\R_{ijy}&=(R_{ijy})'+(R_{ijy})''X\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中 $(R_{ijx})'$，$(R_{ijx})''$、$(R_{ijy})'$，$(R_{ijy})''$ 各分量已在确定 $(\Sigma m_L)'$ 和 $(\Sigma m_L)''$ 时随之确定，无须再重复双杆组力分析程序进行计算。

如果在图 5 所示的虚拟纯双杆组机构中，假设的输入杆为杆 4，而取双杆组 (2, 3)→(7, 8)→(6, 6) 进行力分析时，方程（5）必须改变为力的形式，即应沿着移动副轴线 EE' 建立相应的力平衡方程来代替，即

$$\Sigma F_{EE'} = (\Sigma F_{EE'})' + (\Sigma F_{EE'})'' X = 0 \qquad (8)$$

同理可得

$$X = R^{t}_{12} = -\frac{(\Sigma F_{LL'})'}{(\Sigma F_{LL'})''} \qquad (9)$$

这里 $(\Sigma F_{EE'})'$ 和 $(\Sigma F_{LL'})''$ 分别代表由所有已知外力（令 $X=0$）和仅由单位外力 $X=1$ 时在 EE' 向力上的力（R_{34}，R^{n}_{54}，R^{t}_{54}，F_4）的总和。显然，由于假设的输入杆为三副杆，X 的求解将较前复杂。因此，在假设输入时，应优先选取两副杆（如图 1 中杆 8）。

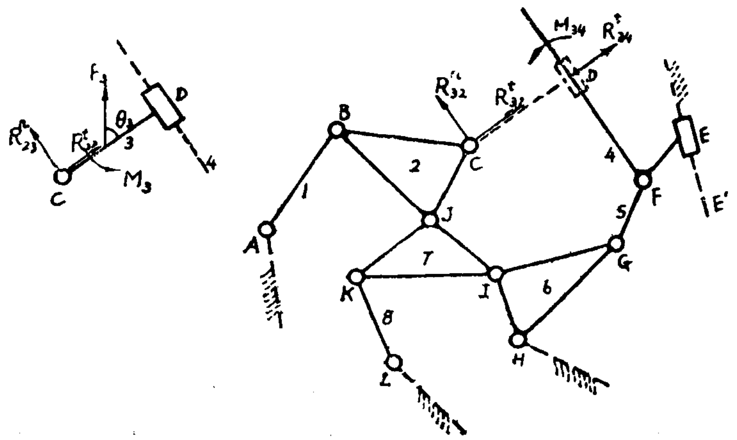


图 5

2. 拆去二个两副杆或一个低副的力分析

如图 2b 和 c 所示分别为拆去二个两副杆和拆去一个低副后的虚拟双杆组机构。在图 b 机构的被拆运动副 B、D 处，将约束反力沿特定向方分解，R^{t}_{12}、R^{t}_{43} 分别平行杆 1、4 轴线，R^{n}_{12}、R^{n}_{43} 则分别垂直杆 1、4 轴线，这样就可利用方程（1）求得反力分量 R^{n}_{12} 和 R^{n}_{43}，因而第一步首先要确定反力分量是 $R^{t}_{12}=X_1$ 和 $R^{t}_{43}=X_2$。应用力的叠加原理可以写出各自绕假设输入杆 6 和 8 上 H 点和 K 点的力矩平衡式：

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m_H &= (\Sigma m_H)' + (\Sigma m_H)'' X_1 + (\Sigma m_H)''' X_2 = 0\\ \Sigma m_K &= (\Sigma m_K)' + (\Sigma m_K)'' X_1 + (\Sigma m_K)''' X_2 = 0\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

为了解出两个线性方程中的 X_1 和 X_2，方程中 $(\Sigma m)'$，$(\Sigma m)''$ 和 $(\Sigma m)'''$ 需要首先确定。为此可先令 $X_1=0$ 和 $X_2=0$，在所有已知外力（图未示出）及 R^{n}_{12} 和 R^{n}_{43} 作用的情况下，依次完成双杆组（2，3）和（5，7）直到输入杆 6、8 的力分析，即可求得 $(\Sigma m_H)'$ 和 (Σm_K)。然后再忽略所有已知外力，令 $X_1=1$ 但 $X_2=0$，通过类似的力分析，可求得 $(\Sigma m_H)''$ 和 $(\Sigma m_K)''$。最后再令 $X_2=1$ 但 $X_1=0$，同样可求得 $(\Sigma m_H)'''$ 和 $(\Sigma m_K)'''$。接着联解方程(10)就可确定 X_1 和 X_2。虚拟双杆组机构中其余运动副反力可由以下方程分别求得

$$\left.\begin{aligned}R_{ijx} &= (R_{ijx})' + (R_{ijx})'' X_1 + (R_{ijx})''' X_2\\ R_{ijy} &= (R_{ijy})' + (R_{ijy})'' X_1 + (R_{ijy})''' X_2\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

式中 $(R_{ij})'$，$(R_{ij})''$ 和 $(R_{ij})'''$ 各量已在确定 $(\Sigma m)'$，$(\Sigma m)''$ 和 $(\Sigma m)'''$ 时随之确定。

在图 2c 机构中，在被拆运动副 c 中的反力按所选定座标方向分解成两个分量 R_{23x} 和 R_{23y}。图中 $R_{32x}=-R_{23x}$，$R_{32y}=-R_{23y}$。同理，在首先确定 $X_1(=R_{23x})$ 和 $X_2(=R_{23y})$ 时，

也可按方程(10)进行，只是其中(Σm)′，(Σm)″和(Σm)‴的数值需要依次通过三个双杆组(3, 4)，(1, 2)和(5, 7)的力分析求得。显然其计算工作量比图2b要大些。因此，对既可拆去二个两副杆，也可拆去一个低副的力分析，一般宜优先选取拆去二个两副杆的解题路线。

四、力分析实例

图6所示为一半自动印刷机构，其中构件为1输入杆以30 rpm 作等速转动。已知该机构各机构尺寸：$l_{AB}=0.2$，$l_{BC}=0.97$，$l_{DF}=0.62$，$l_{CD}=0.294$，$l^{a}_{E}=0.37$，$l_{FF'}=0.045$，$l_{AH}=0.248$，$L=0.45$，$x_E=-0.6$，$y_E=-0.187$（单位均为m）。

机构在图示位置各构件位置及其重心和运动副座标为：$\theta_1=300°$，$\theta_2=176.98°$，$\theta_3=85.59°$，$\theta_4=218.07°$；$x_B=0.1$，$y_B=-0.1732$；$x_C=-0.8687$，$y_C=-0.122$；$x_D=-0.8913$，$y_D=-0.4152$；$x_F=-0.8436$，$y_F=0.203$；$x_{S_2}=-0.3843$，$y_{S_2}=-0.1476$；$x_{S_3}=x_C$，$y_{S_3}=y_C$；$x_{S_4}=0.7204$，$y_{S_4}=-0.2813$；$x_{S_5}=-0.7836$，$y_{S_5}=0.288$（单位均为m）。

各构件的重量为：$G_1=294$，$G_2=139.65$，$G_3=167.58$，$G_4=110.25$，$G_5=1719.9$（单位均为N）。

由运动分析结果与各构件质量可计算求得各构件惯性力和惯性力矩如下：$F_{S_2}=13.67$，$F_{S_2y}=22.98$，$M_{E_2}=0.2432$；$F_{S_3x}=15.84$，$F_{S_3y}=25.91$，$M_{E_3}=3.679$；$F_{S_4x}=10.25$，$F_{S_4y}=13.40$，$M_{E_4}=1.617$；$F^t_{E_5}=451$（力单位为N，力矩单位为$N\cdot m$）以上各力和力矩的实际方向见图上所标方向。

试求运动副F，D中约束反力。

分析：首先先将该机构的复杂杆组2—3—4—5虚拟成双杆组机构。根据该机构的组成情况可以有两种力分析途径：

① 拆去杆5，虚拟成以杆4为假设输入杆和以(2, 3)为双杆组的机构。按照假设输入杆的力矩平衡式 $\Sigma m_B=M_E+KR^t_{53}=0$，依次令$R^t_{53}=0$和1，对双杆组(2, 3)进行力分析，就可求得$M_E$，$K$和$R^t_{53}$，随后也就可求得运动副$D$和$F$的约束反力。

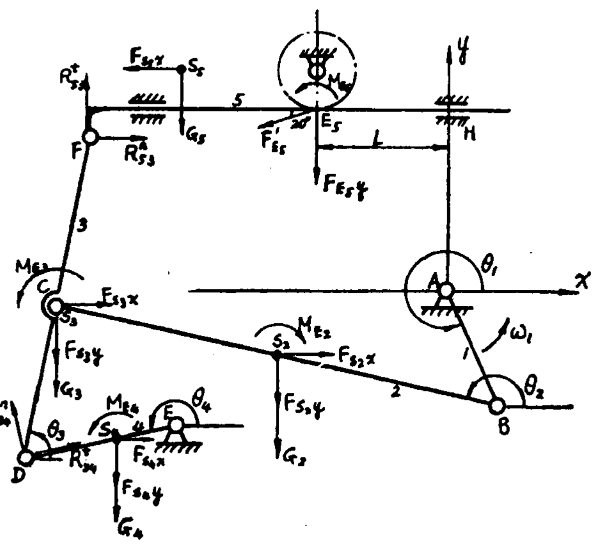


图 6

② 拆去杆4虚成以杆5为假设输入杆和以(2, 3)为双杆组的机构。因假设输入杆为移动件，故可写出其力平衡式为：

$$\Sigma F_x=\bar{F}_a+KR^t_{34}=0 \tag{12}$$

下面就以后一种途径进行分析，求解运动副D和F的约束反力。

首先将被拆除杆4的动动副D处的约束反力按沿杆长和垂直于杆长方向分解，并求出分

量 R^n_{34}，由 $\Sigma m_E=0$ 可解 $R^n_{34}=47.219$。为计算方便，再将其沿着 x，y 方向分解成两个分量 $R^n_{34x}=-29.1176$，$R^n_{34y}=37.1728$。
为了计算出方程(12)中的 $\bar{F}_x$，先令 $R^t_{34}=0$。根据已知外力（包括 R^n_{34}），由双杆组（2，3）对 B 点取矩，$\Sigma m_B=0$ 可得

$$0.3762(R^n_{53})'+0.9436(R^t_{53})'=312.3463 \tag{13}$$

又由杆 3 对 c 点取矩，$\Sigma m_c=0$ 可得

$$0.325(R^n_{53})'-0.025(R^t_{53})'=13.0601 \tag{14}$$

联立解方程（13）和（14）算出

$$(R^n_{53})'=63.69 \qquad (R^t_{53})'=305.60$$

然后由杆 5 求得沿 x 方向的合力 $(\Sigma F_x)'$

$$(\Sigma F_x)'=\bar{F}_x=-(R^n_{\alpha 3})+F_{s x}+F^t_{E}\cos 20^\circ=-573.40$$

为了求得方程(12)中的 K，再令 $R^t_{34}=1$，其余外力为零。同上述类似的计算过程可求得

$$R^t_{43x}=-0.7872 \qquad R^t_{43y}=-0.6166$$

$$(R^n_{53})''=-0.6139 \quad (R^t_{53})''=0.6906$$

$$(R^n_{35})''=-(R^n_{53})''=K=0.6139$$

最后由方程(12)求得运动副 D 中约束反力分量 R^t_{34} 为

$$R^t_{34}=-\frac{\bar{F}_x}{K}=\frac{-(-573.40)}{0.6139}=934\ 03$$

由此不难求得运动副 F 中的约束反力

$$R^n_{53}=(R^n_{53})'+(R^n_{53})''R^t_{34}=-509.71$$

$$R^t_{53}=(R^t_{53})'+(R^t_{53})''R^t_{34}=950.64$$

五、结 束 语

对平面多杆复杂机构的力分析，本文所提出的方法的重点是如何先首求得特定个别运动副中的约束反力。利用拆杆拆副法可将复杂杆组转化成虚拟的纯双杆组机构，在转化中即使是同一机构，拆除不同的两副杆或不同的两相邻三副杆的公共低副，就可得到多种可供选择的虚拟双杆组机构。当然，在可拆去与机架相连的构件或运动副方案中，选取包括最少双杆组数的虚拟纯双杆组机构，可使计算工作量为最少。

在对虚拟的纯双杆组机构进行力分析时，假设的输入杆的选择上往往有较大的灵活性，可以选取定轴转动构件，列出如方程（4）的力矩平衡式，也可选取作直线移动构件，列出如方程（8）的力平衡式。具体如何选择应视实际机构型式和计算是否简单而定。一般说来，宜优先选择作移动的两副杆为虚设的输入杆。

在对虚拟的纯双杆组机构进行力分析时，由于只涉及到单杆和双杆组的力计算，所以在对机构某一位置作力分析时，只需两次（有时三次）调用单杆和双杆组的力计算子程序，即可将被拆运动副处的未知反力分量求出。至于其余运动副中的反力则可很方便地按简单的线性方程式求得。

总之，本文所提平面多杆复杂机构受力分析的简化法，概念简明，计算简单，便于在普通微机上运算，有较大的通用性，并且可拓广于考虑运动副中摩擦的力分析。