105

大学专科小学教育专业教材

概　率　统　计

教材编写委员会　编

开　明　出　版　社

概率统计

教材编写委员会 编

*

开明出版社出版发行

（北京海淀区西三环北路 19 号）

河北省徐水县印刷厂印刷

新华书店北京发行所经销

开本 850×1168 1/32 印张:12.25 字数:317 千字

1998 年 5 月北京第 2 版 2000 年 6 月北京第 3 次印刷

印数:5001—8300

ISBN 7-80077-973-4/G·725 定价:13.80 元

第一章　事件与概率

§1.1　随机事件与样本空间

一、确定性现象与随机现象

人类观察到的自然现象或社会现象，大体可归结为两类，一类现象是事前可以预言的，即在准确地重复某些条件下，它的结果总是肯定的. 这类现象称之为**确定性现象**. 例如，“在标准大气压下，水加热到 100℃必然沸腾”；“异性电荷必互相吸引”，等等. 另一类现象是事前不能预言的，即在准确重复相同的条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，呈现出偶然性，这类现象称之为**随机现象**. 例如“掷一枚质量均匀的硬币，结果可能出现正面，也可能出现反面.”“新生的婴儿可能是男，也可能是女.”“同一门炮向同一目标发射多发炮弹，着弹点可能落在目标上，也可能落在目标附近的各个位置上”，等等.

是不是这些随机现象就没有什么规律性可寻呢？不是的. 恩格斯曾经指出：“在表面上是偶然性起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的”. 人们通过长期的实践与观察，逐渐发现，在相同条件大量重复实现时，随机现象是有某种规律的. 例如：根据各个国家各个时期的人口统计资料，新生儿中男婴和女婴的比例，大约总是1∶1. 有人做过以同样方式投掷质量均匀的硬币的试验，下面是几个著名的试验结果：

实验者	试验总次数(n)	正面出现次数(m)	比($\frac{m}{n}$)
德·摩根	2048	1061	0.5180
蒲丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

试验结果表明:出现正面的次数(m)与试验总数(n)之比($\frac{m}{n}$)总是在$\frac{1}{2}$附近摆动.我们把"在一定的条件组实现时,有多种可能的结果发生,事先人们不能预言将出现哪种结果,但大量重复观察时,所得的结果却呈现某种规律",称为随机现象的统计规律性.

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

二、随机试验与随机事件

为了研究随机现象的统计规律性,必须对所述随机现象进行观察或试验.我们把对自然现象、社会现象作一次观察或进行一次科学试验,统称为一个试验.如果这个试验"在相同条件下可以重复进行,而且每次试验的结果事前不能确定,试验的可能结果是多种的",我们就称它为一个随机试验,以下所说的试验都是指随机试验.例如,为了考察"从一副扑克牌中任摸两张所出现的花色",我们必须做"从一副扑克牌中任摸两张牌"的试验;又如,为了研究"向桌上抛掷一枚硬币,落下后出现某一面向上",我们必须做"向桌上抛掷一枚硬币"的试验.这类试验都是随机试验.

随机试验的每一个可能结果称为随机事件,简称为事件.用字母A、B、C、…表示.例如,在0,1,2,…,9十个数字中任意选取一个,可能有十种不同的结果:"取得一个数是0","取得一个数是1",…,"取得一个数是9".但还有其它可能结果:"取得一个是奇数","取得一

个是大于 4 的数”,“取得一个数是 2 的倍数”等等,都是随机事件.

我们把不可能再分的事件称为基本事件.上例中“取得一个数是 0”,“取得一个数是 1”,“取得一个数是 2”,…,“取得一个数是 9”都是基本事件.由若干基本事件组合而成的事件称为复合事件.上例中“取得一个数是奇数”就是一个复合事件,它由“取得一个数是 1”,“取得一个数是 3”,“取得一个数是 5”,“取得一个数是 7”,“取得一个数是 9”五个基本事件组合而成.

一个事件是否称为基本事件是相对于试验的目的来说的.例如,一射手打靶,如果考察命中的环数,那么“命中 0 环”,“命中 1 环”,…,“命中 10 环”都是基本事件,共有 11 个.如果考察命中还是不命中,那么此时只有两个基本事件了,即“命中”,“不命中”.又如,量度人的身高,目前世界上人的身高都在 4 米以下,因此一般说,区间(0,4)中的任一实数,都可以是一个基本事件,这时基本事件有无穷个;但如果量度高度是为了了解乘车是否需要买全票、半票或免票,这时就只有三个基本事件了.

三、必然事件与不可能事件

进行一个试验,有这样或那样的事件发生,它们各有不同的特性.若某种事情在一次试验中一定发生,称这种事情为必然事件.例如,就目前世界上人高来说“人的高度小于 4 米”是必然事件.又如,“在一副扑克牌中任摸 14 张,其中至少有两张是异色的”也是必然事件.

若某件事情在一次试验中一定不发生,称这种事情为不可能事件.例如,“人的高度大于 4 米”就是不可能事件.又如,“在一副扑克牌中任摸 14 张,其中没有两张是异色的”也是不可能事件.

为便于讨论问题,我们把必然事件和不可能事件也看作随机事件.

四、样本点、样本空间与事件

本世纪 30 年代,冯·米斯(Von Mises)开始用集合论的观点来研究事件,从而使概率论的研究走上了严格化的道路.设某随机试验可能的结果为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots$,我们称每一种可能出现的结果 ω_i(i

$=1,2,\cdots$)为一个样本点. 令 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}$ 为样本点的全体,称 Ω 为对应于此随机试验的样本空间. 可见样本空间 Ω 表现了随机试验的所有可能结果.

例 1 掷一枚硬币,考察出现向上的面,试验的可能结果有两个:$\omega_1=$"正面向上",$\omega_2=$"反面向上",因此样本空间由两个样本点组成,即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$.

例 2 同时掷两枚可区别的硬币,试验的可能结果共有四个:$\omega_1=$(正,正),$\omega_2=$(正,反),$\omega_3=$(反,正),$\omega_4=$(反,反),四个样本点,其中第一个分量表示第一枚硬币向上的面,第二个分量表示第二枚硬币向上的面. 样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$.

例 3 从大批量的种子中,取 50 粒种子进行发芽试验,试验的可能结果有 51 种:0 粒,1 粒,2 粒,…,50 粒种子发芽,以 ω_i 表示有 i 粒种子发芽的事件,记为 $\omega_i=i(i=0,1,2,\cdots,50)$共 51 个样本点,则样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots,50\}$.

例 4 向圆 $x^2+y^2=1$ 内均匀地投点,样本点是(x,y),$x^2+y^2<1$,样本空间是 $\Omega=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$它含有无限不可列个样本点.

下面我们用集合论的观点定义随机事件.

设 A 为由某些样本点组成的一个集合(即是 Ω 的子集),则称 A 为一个随机事件,简称事件(显然这个定义与前边所说"随机试验的每一个可能结果称为随机事件"是一致的). 当试验结果出现了 A 中所含的某一个样本点 ω 时,称事件 A 发生,记为 $\omega\in A$. 如果说试验中事件 A 发生,则试验出现的结果 $\omega\in A$;当试验的结果 ω 不是 A 的样本点时,称事件 A 不发生,记为 $\omega\notin A$. 由单个样本点构成的集合(单点集)也是一个事件,称为基本事件. 有时习惯上把样本点也称为基本事件. 因 Ω 含有全体样本点,在每次试验时,必然出现 Ω 中所含样本点中的一个,即每次试验中 Ω 都发生,故称 Ω 为必然事件. 我们把不含任何样本点的集合(空集)记为$\varnothing$,因每次试验中出现的结果都不在$\varnothing$中,故$\varnothing$称为不可能事件.

对于只含有限个样本点的随机试验，它可能出现的各种不同的事件至多也只有有限个，而且可以全部写出来.

例 5 投掷质量均匀的骰子，列出所有事件，总共有 64 个不同的事件：

(1)不可能事件 1 个：$\varnothing$；

(2)含一个样本点的事件 $C_6^1=6$(个)；

(3)含两个样本点的事件有 $C_6^2=15$(个)；

(4)含三个样本点的事件有 $C_6^3=20$(个)；

(5)含四个样本点的事件有 $C_6^4=15$(个)；

(6)含五个样本点的事件有 $C_6^5=6$(个)；

(7)含六个样本点的事件(必然事件)1 个.

习 题 1-1

1. 举出几个必然事件、不可能事件和随机事件的例子.

2. 样本空间与随机试验是什么关系？随机事件与样本空间是什么关系？

3. 写出从含有 3 件正品(记作 a_1,a_2,a_3)和 2 件次品(记作 b_1,b_2)中，任意抽取两件. 这一试验的所有样本点和样本空间.

4. 连续不断地投篮，直到投中为止，若记"投进"为 1，"投不进"为 0. 试写出该试验的样本点和样本空间.

5. 写出"某电话交换台，在单位时间内接到呼唤的次数"，这一试验的样本点和样本空间.

6. 写出随机试验"在一批灯泡中，任意取一只测试其寿命 t(h)"；和"测量一汽车通过给定点的速度 v(km/h)"的样本空间.

§1.2 事件的关系与运算

进行一个试验，有这样或那样的事件发生，它们各有不同的特性，彼此之间存在着一定的联系，下面我们讨论事件的关系和运算. 这将有利于今后对事件和它的概率的叙述和研究.

一、用事件的集合论定义研究事件的关系与运算

在以下的叙述中，将用 $A,B,C,\cdots$ 等大写字母表示事件.

1. 事件的包含与相等

定义 如果任一属于 A 的样本点一定属于 B，则称事件 B 包含事件 A，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$. 即 $B\supset A\Leftrightarrow$"若 $\omega\in A$，则 $\omega\in B$". 显然 $B\supset A$ 的含意是：事件 A 发生，必导致事件 B 发生.

例如，在 $1,2,3,\cdots,9$ 这九个数中任取一数，记 $A=$"取得数 3"，$B=$"取得 3 的倍数"，显然 $A\subset B$.

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则 A 与 B 相等，记为 $A=B$. 它表示若 A 发生则 B 必然发生，反之 B 发生则 A 也必然发生.

例如，在上述试验中，若 $A=$"取得数 3 或 6 或 9"，而 $B=$"取得 3 的倍数"，显然 $A=B$.

2. 事件的并(或和)

定义 由属于 A 或属于 B 的所有样本点组成的集合，称为 A 与 B 的并(或和)，记为 $A\cup B$. 即 $\omega\in A\cup B\Leftrightarrow\omega\in A$ 或 $\omega\in B$. 显然，事件 $A\cup B$ 发生表示事件 A 与事件 B 至少有一个发生.

例如：某校在课堂教学改革过程中进行了检查语文、数学作业情况的试验，设 $A=$"做完语文作业的学生"，$B=$"做完数学作业的学生"则 $A\cup B=$"做完语文作业或数学作业的学生".

类似地，推广到有限多个事件或可列多个事件的场合.

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生通常表述为"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生."同样，可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的并 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$ 记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 发生，通常表述为"$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生."

3. 事件的交(积)

定义 由属于 A 同时又属于 B 的所有样本点组成的集合，称为 A 与 B 的交(或积)，记为 $A\cap B$ 或 AB. 即 $\omega\in A\cap B\Leftrightarrow\omega\in A$ 且 $\omega\in B$. 显然事件 $A\cap B$ 发生，表示事件 A 与事件 B 同时发生. 例如：$A=$"18 的约数"，$B=$"24 的约数"，则 $A\cap B=$"18 和 24 的公约数".

类似地,推广到有限多个事件或可列多个事件的场合.

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$,通常表述为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生则"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生".同样,可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的交 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$ 记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$,通常表述为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 发生,则"$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生."

4. 事件的差

定义 由属于 A 但不属于 B 的所有样本点组成的集合,称为 A 与 B 的差.记为 $A-B$.即 $\omega\in A-B\Leftrightarrow\omega\in A$ 但 $\omega\notin B$.显然,事件 $A-B$ 发生,表示 A 发生但 B 不发生.例如,$A=$"取数 1 或 3 或 5 或 8",$B=$"取数 2 或 3",则 $A-B=$"取数 1 或 5 或 8".

5. 事件的对立(逆)

定义 样本空间 Ω 与 A 的差 $\Omega-A$ 称为事件 A 的对立事件(或逆事件),记为 $\overline{A}$,即 $\omega\in\overline{A}\Rightarrow\omega\notin A,\omega\in A\Rightarrow\omega\notin\overline{A}$.由此知,$\overline{A}$ 发生则 A 不发生,反之,若 A 发生则 $\overline{A}$ 不发生.所以 $\overline{A}$ 表示与 A 性质相反的事件.

例如:在取数试验中,$A=$"取得奇数"则与之对立的事件 $\overline{A}=$"取得偶数";在种子发芽试验中 $A=$"多于 20 粒种子发芽",则与之相反的事件 $\overline{A}=$"不多于 20 粒种子发芽".

必然事件与不可能事件互为对立事件.即有 $\Omega=\overline{\varnothing},\overline{\varnothing}=\overline{\Omega}=\Omega$.

对立事件 A 和 $\overline{A}$ 间的关系可描述为

$$A\cup\overline{A}=\Omega,A\cap\overline{A}=\varnothing.$$

6. 事件的互不相容(互斥)

定义 如果 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互不相容.即 $\omega\in A$,则 $\omega\notin B$,反之,若 $\omega\in B$,则 $\omega\notin A$.这表示互不相容的两事件 A、B 不会同时发生.

例如,掷一枚硬币,$A=$"正面向上",$B=$"反面向上"则 A、B 互不相容.

易知，A 与它的对立事件 $\overline{A}$ 是互不相容的. 又如在取数试验中，令 $A=$“取得偶数”，$B=$“取得 1 或 3”则 A、B 互不相容. 但它们不是对立事件.

二、用文氏图表示事件的关系与运算

在讨论事件的关系和运算时，常用文氏图(Venn 图)直观地示意.

首先以平面上的某一矩形表示样本空间 Ω，矩形内的每一点表示样本点，用画在 Ω 内的两个小圆形表示事件 A 和 B. 如图 1-2-1 所示，第 1 个图表示 $A\subset B$，其它图的阴影部分表示事件 A 与 B 的各种关系及运算.

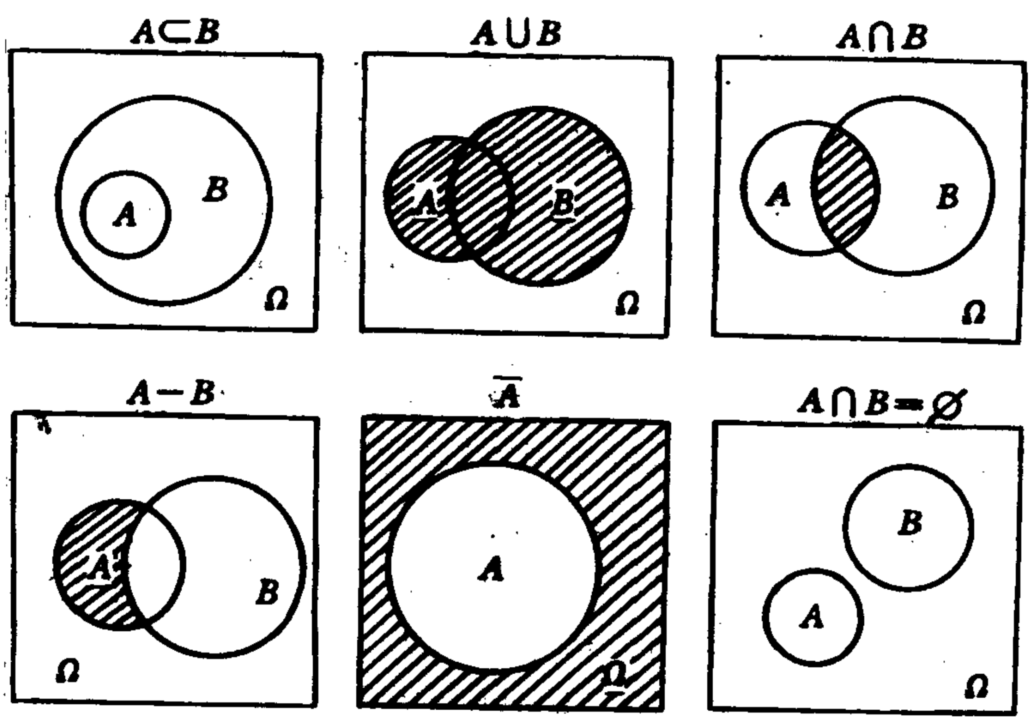

图 1-2-1

例 1 设 A、B、C 为三个事件，那么

(1)因 A 发生而 B 与 C 不发生 $\Leftrightarrow \omega\in A,\omega\notin B,\omega\notin C \Leftrightarrow \omega\in A-B-C$；另一方面 $\omega\in A,\omega\notin B,\omega\notin C\Leftrightarrow\omega\in A\overline{B}\overline{C}$，故“$A$ 发生，B 与 C 不发生”的事件可表示为 $A-B-C$ 或 $A\overline{B}\overline{C}$.

进行类似的分析可得以下的结论：

(2)“A、B、C 同时发生”的事件是 ABC.

(3)“A、B、C 同时不发生”的事件是 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

(4)“A 与 B 发生而 C 不发生”的事件是 $AB-C$ 或 $AB\bar{C}$.

(5)“A、B、C 中至少有一个发生”的事件是 $A\cup B\cup C$ 或 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$. 这两种表示的区别在于前者三个事件可能是相容的，而后者诸事件是互不相容的.

(6)“A、B、C 中至多有一个发生”的事件是 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}B\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}$.

(7)“A、B、C 中恰有一个发生”的事件是 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$.

(8)“A、B、C 中至多有二个发生”的事件是 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$ 或 $A\cup B\cup C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}-ABC$.

例 2 袋中有红、白、黄球各一个，有放回(有放回的意思是抽出球后仍把抽出的球放回原袋中)地抽三次，每次任取一个球，试说明下列各组事件是否相容？如不相容，还要说明是否对立？

(1)A=“三次抽取，颜色全不同”，B=“三次抽取，颜色不全同”.

(2)A=“三次抽取，颜色全同”，B=“三次抽取，颜色不全同”.

(3)A=“三次抽取，无红色球”，B=“三次抽取，无黄色球”.

(4)A=“三次抽取，无红色球和无黄色球”，B=“三次抽取，无白色球”.

解 (1)因为三次抽取颜色不全同包括了颜色全不同的事件，所以 A 与 B 相容.

(2)颜色全同的反面就是颜色不全同，所以 A、B 是对立的，因此 A 与 B 互不相容.

(3)三次抽取无红色球包括了颜色全白的事件，而三次抽取无黄色球也包括了颜色全白的事件，所以 A 与 B 相容.

(4)三次抽取无红色球且无黄色球的事件是一个三次抽取颜色全白的事件，而三次抽取无白色球与三次抽取颜色全白的事件不能同时发生，所以 A 与 B 互不相容；但无白色球不等于不全白，故 A 与 B 不对立.

三、事件运算的基本性质

事件运算具有下面的基本性质：

(1)否定律：$\overline{\overline{A}}=A,\overline{\Omega}=\varnothing$.

(2)幂等律：$AA=A,A\cup A=A$.

(3)交换律：$AB=BA,A\cup B=B\cup A$.

(4)结合律：$A(BC)=(AB)C,A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

(5)分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC$,

$$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C).$$

分配律可以推广到有限个或可列多个事件的情形，即 $A(\bigcup\limits_i A_i)=\bigcup\limits_i AA_i,A\cup(\bigcap\limits_i A_i)=\bigcap\limits_i(A\cup A_i)$；

(6)$A-B=A\cap\overline{B}$.

(7)德·莫根(De Morgan)公式(对偶原则)：

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，推广到有限个或可列多个事件的情形，即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i;$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i,\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i.$$

以上性质容易通过文氏图看出，也可运用事件的关系与运算的定义证明.

例3 证明分配律 $A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$

证明 若 $A\cup BC$ 发生，则 A 与 BC 中至少有一个发生. 若 A 发生，则 $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 同时发生，即$(A\cup B)(A\cup C)$发生；若 BC 发生，则 B 与 C 同时发生，从而 $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 同时发生，即$(A\cup B)(A\cup C)$发生. 综上所述，$A\cup BC$ 发生必导致$(A\cup B)(A\cup C)$发生，故 $A\cup BC\subset(A\cup B)(A\cup C)$. 反过来，仿前可证：$(A\cup B)(A\cup C)\subset A\cup BC$，由此得 $A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$.

另法证 若 $\omega\in A\cup BC\Rightarrow\omega\in A$ 或 $\omega\in BC$，若 $\omega\in A\Rightarrow\omega\in A\cup B$ 且 $\omega\in A\cup C\Rightarrow\omega\in(A\cup B)(A\cup C)$；若 $\omega\in BC\Rightarrow\omega\in B$ 且 $\omega\in C\Rightarrow\omega\in$

$A\cup B$ 且 $\omega\in A\cup C\Rightarrow\omega\in(A\cup B)(A\cup C)$. 由此 $A\cup BC\subset(A\cup B)(A\cup C)$. 类似地可证 $(A\cup B)(A\cup C)\subset A\cup BC$，所以 $A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$.

其它性质，请读者自行证明.

习　题　1-2

1. 举例说明事件的对立与互不相容有何异同？

2. 将下列事件用 A、B、C 的运算式子表示出来：

(1) A、B 都发生，而 C 不发生；

(2) A、B、C 都不发生；

(3) A、B、C 中至多有一个发生；

(4) A、B、C 中至多有二个发生；

(5) A、B、C 中至少有二个发生.

3. 下列两式各说明 A、B 之间有什么样的包含关系：

(1) $A\cup B=A$　；　(2) $AB=A$.

4. 检查一个学生做的三道习题，A="至少错一道题"，B="全做对"，问 (1) $A\cup B$，(2) $A\cap B$ 各表示什么意义？

5. 设 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$A=\{2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$，$C=\{5,6,7\}$，求下列事件：

(1) $\overline{A}\cap\overline{B}$；　(2) $\overline{A\cap(\overline{B\cap C})}$.

6. 利用事件的运算和关系证明：

(1) $\overline{\overline{A}}=A$；(2) $(A-A\cap B)\cup B=A\cup B=\overline{(\overline{A}\cap\overline{B})}$；

7. 用文氏图说明下列各式：

(1) $(A\cup B)C=AC\cup BC$；(2) $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

(3) $A-B=A\overline{B}$；　(4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$.

8. 设 A、B、C 分别表示甲、乙、丙三人击中目标的条件，则用 A、B、C 的运算表示下列条件：

(1) 甲、乙、丙至少有一个人击中目标；

(2) 甲、乙、丙均击中目标；

(3) 甲、乙、丙均未击中目标；

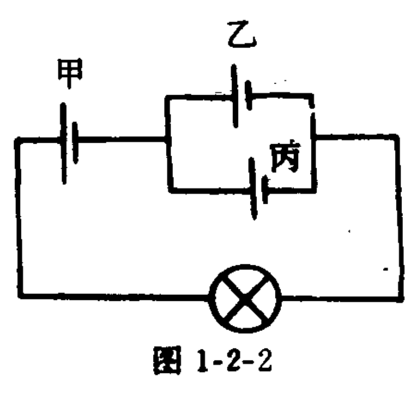

图 1-2-2

(4)甲、乙、丙只一人击中目标;

(5)甲、乙、丙至多一人击中目标;

(6)甲、乙、丙至多二人击中目标.

9. 记 A、B、C 分别为电源甲、乙、丙无损的事件,则"灯亮"应怎样表示.(图1-2-2)

§1.3 概率的概念

一、频率与概率

1. 频率及其稳定性

在讨论随机现象时,我们将从样本空间与事件这两个基本概念出发,此外,还要对随机事件发生的可能性大小有一个定量的表示.由我们前面进行过的随机试验(抛硬币等)可知,对于随机事件来说,虽然在某次试验中,它可能发生也可能不发生.但在相同条件下进行多次重复试验时,将发现它的发生呈现出规律性来,用数量描述这种规律性,就要联系到下面的概念.

定义 对于事件 A,若在 n 次试验中,事件 A 发生的次数为 μ_n,则称

$$F_n(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 发生的次数 } \mu_n}{\text{试验总次数 } n} \tag{3.1}$$

为事件 A 在 n 次试验中发生的频率,μ_n 称为事件 A 在这 n 次试验中的频数.

显然,频率是一种经验值,当试验次数不同时,频率常会发生变化,但实践证明,当试验次数足够多时,频率就将呈现出稳定性来.也就是说,在不同试验序列中,当试验的次数充分大时,事件的频率常在一个确定的数值 p 附近摆动,这就是频率的稳定性.

频率的稳定性说明事件在一次试验中发生的可能性大小是事件本身固有的,是客观存在的.因面,我们用一个数表示这种可能性的大小是必要的也是可能的,在理论上这个数就是该事件的概率.比如对于事件 A,用一个数 $P(A)$来度量该事件发生的可能性大小,这个

数 $P(A)$称为事件 A 的概率.

2. 概率的统计定义

定义 在同样的条件下进行大量试验时，根据频率的稳定性，事件 A 的频率必然稳定在某一个确定数 p 的附近，则定义事件 A 的概率为 $P(A)=p$. (3.2)

这样定义的概率有着普遍的现实意义. 它不仅肯定了概率的存在，而且给出了确定概率近似值的方法，即当实验次数 n 充分大时，可用$\frac{\mu_n}{n}$作为该事件概率的近似值. 例如，检验某种种子的发芽率(发芽的概率)，从大批量的种子中随机抽取 10 批种子做发芽试验，所得结果如下表：

种子粒数	2	5	10	70	130	310	700	1500	2000	3000
发芽粒数	2	4	9	60	116	282	639	1339	1806	2715
发 芽 率	1	0.8	0.9	0.875	0.892	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

从表上可以看出，发芽率在 0.9 附近摆动，故可认为这种种子的发芽率为 0.9.

另一方面，如果知道事件 A 的概率，那么就能以一定程度的可靠性来预测事件 A 在将进行的试验中发生的频率. 这种预测至少在当试验次数足够多时是可能的. 因此，频率不仅能适当地反映事件 A 出现的可能性大小，而且频率的概念比较具体，易于掌握，所以常根据频率的性质去推想概率的性质.

3. 频率的性质

从频率的定义可见频率具有下列性质：

(1)非负性：$0\leqslant F_n(A)\leqslant 1$；

(2)规范性：$F_n(\Omega)=1$；

(3)可加性：若 $AB=\varnothing$，则 $F_n(A\cup B)=F_n(A)+F_n(B)$.

一般地，对于任意有限多个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$，有

$$F_n(\bigcup_{i=1}^{m} A_i)=\sum_{i=1}^{m} F_n(A_i)$$

它称为有限可加性.

4. 概率的性质

根据频率的性质,容易想到概率具有下面三个基本性质,即

(1)非负性:$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(2)规范性:$P(\Omega)=1$;

(3)可加性:若 $AB=\varnothing$,则 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.

一般地,对两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 成立有限可加性:$P(\bigcup_{i=1}^{m} A_i)=\sum_{i=1}^{m} P(A_i)$.

二、古典概型

1. 古典概型的特征

下面我们讨论一类最简单的特殊的随机试验,其特征是:

(1)试验的结果只有有限个,即样本空间中的基本事件只有有限个:$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m\}$;

(2)一切基本事件的发生是等可能的,即它们发生的概率相等:$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$.

上述两个特征分别称为有限性、等可能性,具有这两个特征的试验称为古典概型.

古典概型在概率论发展的历史中,占有相当重要的地位,一方面由于它简单,对于它的讨论有助于直接地理解概率论中许多基本概念,因此也常借助它引入新概念;另一方面古典概型事件概率的计算在实际问题中有着重要的应用.

2. 概率的古典定义

古典概型的事件概率用下面的方法确定.

定义　设古典概型试验的样本空间 Ω 由 n 个等可能的基本事件组成. 即 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$事件 A 含有其中 m 个基本事件($m \leqslant n$),则定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{3.3}$$

此定义称为概率的古典定义，由(3.3)式规定的概率称为古典概率.(3.3)式是计算古典概率的公式.只要能确定样本空间 Ω 中的样本点的个数 n 和事件 A 所含的样本点个数 m，就可用(3.3)式求出事件 A 的概率.

通常在古典概率的计算中，往往涉及到两种不同的抽取方法，一种是有放回的抽样.即抽取后，仍放回原处，继续参加抽样试验，这样的抽样可以重复，并且可无止境地进行下去.另一种是无放回的抽样.即抽取后不放回，不能再参加抽样试验，这样的抽样不会出现重复，并且只能进行有限次.

下面介绍计算古典概率的基本原则.遇到一个问题，首先要分清问题是否与顺序有关？元素是否允许重复？然后考虑用排列的工具或组合的工具.现把考虑问题的基本原则列表如下：

	抽样方法	
	无放回抽样（元素不重复）	有放回抽样（元素可重复）
	工具	
与顺序有关	排列（全排列，选排列）	有重复的排列
与顺序无关	组合	有重复的组合

3. 例题

例 1 在一批 a 件产品中有 b 件次品，从这批产品中任意取 n 件产品，求其中恰有 m 件次品的概率.($b<a, n<a, m\leqslant n, m\leqslant b, n-m\leqslant a-b$)

解 基本事件总数为 C_a^n(因与顺序无关)，A=“恰有 m 件次品”所包含的基本事件数为 $C_b^m\cdot C_{a-b}^{n-m}$，故所求事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{C_b^m\cdot C_{a-b}^{n-m}}{C_a^n}$$