经济数学基础辅导材料

广州市财贸管理干部学院

目　录

第四章 导数的应用

第五章 积 分

第一章 函 数

内容提要

一、函数的概念

设有两个变量x和y，如果对于x在其变化范围内的每一个值，y按照一定的规律总有确定的值与之对应，则称y是x的函数，x叫自变量，记作$y=f(x)$。

在函数的定义中，包含着三个要素，即定义域（自变量x的变化范围）对应规律和值域（函数y的变化范围），前两个要素决定第三个要素。两个函数当且仅当其定义域和对应规律完全相同时，它们才是相同的。

1．函数和函数值记号

用记号$y=f(x)$，$x\in[a, b]$表示一个函数，则x表示自变量，$[a, b]$表示定义域，y表示因变量，而f则表示对应规律，记号f可以用任何字母代替。在同一个问题中，若出现多个函数时，就需要用不同的记号去加以区别。

求函数$y=f(x)$，$x\in[a, b]$当$x=a$的值，是指当$x=a$时对应的y值，通常用$f(a)$表示，例如，如果$y=f(x)=2x^2$、那么，当$x=5$时对应的函数值$f(5)=2\times5^2=50$。

2．函数定义域的求法

当自变量x在其变化范围内取定某一个值x_0时，函数y有

确定的值y_0与之对应，我们就说函数在点x_0有定义。使函数有定义的x的变化范围称为函数的定义域。

对于分段函数来说，函数的定义域是用明显的形式给出的，例如，分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & 0\leqslant x<1\\ 2x, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ x+1, & 2<x\leqslant 3\end{cases}$$

的定义域就是〔0，3〕。

对于由解析式表示的函数，如果未对定义域作特别的说明，那么，这种函数的定义域就依据解析式所涉及到的运算在实数中是否能进行而定。

一般地说，由解析式给出的函数$y=f(x)$，可以这样确定其定义域：

①如果$f(x)$是多项式，其定义域是$(-\infty, +\infty)$

②如果$f(x)$是有理分式，即$f(x)=\dfrac{p(x)}{g(x)}$，则其定义域由$g(x)\neq 0$确定。

③如果$f(x)$是偶次根式，即$f(x)=\sqrt[2k]{p(x)}$，（k是自然数），则其定义域由$p(x)\geqslant 0$确定。

④如果$f(x)$是一个对数式，即$f(x)=\log_a p(x)$（$a>0$，$a\neq 1$），则其定义域由$p(x)>0$确定。

⑤如果$f(x)$是三角函数，或反三角函数则其定义域由这些函数的特定定义来确定，比如$f(x)=\arcsin p(x)$，则其定义域由$|p(x)|\leqslant 1$来确定。

3．函数的表示法

函数表示法，说得准确点就是函数对应规律表示法，通常有三种形式，即解折法，列表法，图象法。

二、常见的经济函数

1．需求函数

社会对某种商品的需求量Q是价格p的函数：$Q=f(p)$，叫做需求函数。

一般地，需求函数是一个递减函数。

2．供应函数

社会上某种商品的供应量是价格p的函 数：$Q=g(p)$，叫做供应函数。

一般地，供应函数是一个递增函数。

3．成本函数

总成本C是产量x的函数：$C=C(x)=C_0+C_1(x)$叫成本函数，其中：C_0是固定成本，$C_1(x)$是可变成本。

4．利润函数

总利润L是产量x的函数：$L=L(x)=R(x)-C(x)$叫利润函数。其中：$R(x)$是销售总收入，$C(x)$是总成本。

如果商品的单价是P，销售量为x，则销售总收 入$R(x)$是销售量x的函数：$R(x)=P(x)$

5．库存问题

库存问题就是在时间t内如何降低总需求量Q的 进 货 费用和储存费用的问题。虽然，在时间t内的总需 求 是Q，一次进货是不合理的。如果进货费用和储存费用之 和 为 y，

则

y= 进货费用 + 储存费用

进货费用 = 进货次数 × 每次进货费

$$= \frac{\text{总需求量}}{\text{每次进货量}} \times \text{每次进货费。}$$

储存费用 = 平均库存量 × 单价储存费

$$= \frac{1}{2} \times \text{每次进货量} \times \text{单价储存费。}$$

6．复利计算

复利，通俗地说，就是利计利，即第一周期的利息将作为第二个周期的本金来计算利息。因此，如果本金是a元，一个周期的利息为r，那么经过n个周期后，用复利计算本利和时，其本利和为

$$s = a(1 + r)^n。$$

如果一个周期计算复利m次，则经过n个周以后，本利和为

$$s = a\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}$$

如果采取连续复制法，就是令$m \to \infty$，得

$$s = ae^{nr}$$

（其中e = 2.71828…）

三、函数的简单性质

1．单调性

设函数$y=f(x)$在区间（a, b）内有定义，对于（a,b）内任意两点x_1、x_2，如果$x_1<x_2$，恒有$f(x_1)<f(x_2)$，则称$y=f(x)$在区间（a, b）内单调增加；如果$x_1<x_2$，恒有$f(x_1)>f(x_2)$，则称$y=f(x)$在区间（a, b）内单调减少。

如果函数$y=f(x)$在区间（a, b）内单调增加或单调减少，则称此区间为$f(x)$的单调区间。

2．奇偶性

对于函数$y=f(x)$的定义域内的任何x，如果都有$f(-x)=f(x)$，则称函数$y=f(x)$为偶函数。如果都有$f(-x)=-f(x)$，则称函数$y=f(x)$为奇函数。

4．有界性

设函数$y=f(x)$在区间（a, b）内有定义，如果存在一个正数M，使得对于（a、b）内的任何x都有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在区间（a、b）内是有界函数，否则称为无界函数。

四、反函数与复合函数

1．反函数

设y是x的函数

$$y=f(x)$$

如果由它可以确定x是y的函数

$$x=\varphi(y)$$

则称函数$x=\varphi(y)$是函数$y=f(x)$的反函数。

反之，也称$y=f(x)$是函数$x=\varphi(y)$的反函数。

习惯上，把$y=f(x)$的反函数$x=\varphi(y)$写成$y=\varphi(x)$

2．复合函数

如果$y=f(u)$，而$u=\varphi(x)$且$f(u)$的定义域是$\varphi(x)$的值域的全部或部分，则称$y=f[\varphi(x)]$是x的复合函数，u为中间变量，f叫外层函数，φ叫内层函数。

复合函数不一定只复合一次，而是可以进行有限多次的复合。例如，由$y=lgu$，$u=3+v$，$v=1+2x^2$经过三次复合便构成函数$y=lg(3+\sqrt{1+2x^2}$。)进行函数复合时，要注意中间变量的值域必须属于外层函数的定义域。

五、初等函数

1．基本初等函数

基本初等函数包括常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数。

2．初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限复合所构成的并用一个解析式表示的函数，称为初等函数。

习　题　一

1．已知$f(x)=4-2x^2-x^4$，求$f(0)$、$f(1)$、$f(2)$、$f(-2)$的值。

解　$f(0)=4-2\cdot0^2-0^4=4$，

$f(1)=4-2\cdot1^2-1^4=1$，

$f(2)=4-2\cdot2^2-2^4=-20$，

$f(-2)=4-2\cdot(-2)^2-(-2)^4=-20$。

2．已知$g(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求$g(1)$、$g(2)$、$g(-2)$、$g(6)$的值。

解 $g(1)=\dfrac{|1-2|}{1+1}=\dfrac{|-1|}{2}=\dfrac{1}{2}$，

$g(2)=\dfrac{|2-2|}{2+1}=\dfrac{0}{3}=0$，

$g(-2)=\dfrac{|-2-2|}{-2+1}=\dfrac{|-4|}{-1}=-4$，

$g(6)=\dfrac{|6-2|}{6+1}=\dfrac{|4|}{7}=\dfrac{4}{7}$。

3．已知$f(t)=t^2-2t+6$，验证：

$f(y+h)=y^2-2y+6+2(y-1)h+h^2$

解 $f(y+h)=(y+h)^2-2(y+h)+6$

$=y^2+2yh+h^2-2y-2h+6$

$=y^2-2y+6+2(y-1)h+h^2$

4．已知$f(x)=x^3+3x$，验证：

$f(x+h)-f(x)=3(x^2+1)h+3xh^2+h^3$

解 $f(x+h)-f(x)=(x+h)^3+3(x+h)-(x^3+3x)$

$=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+3x+3h$

$-x^3-3x$

$=3(x^2+1)h+3xh^2+h^4$

5．已知$\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$，求证$\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=-\dfrac{1}{x^2+xh}$

证明：$\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$

$$=\frac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$=-\frac{1}{x^2-xh}$$

6．已知$\varphi(x)=a^x$，试证$\varphi(y)\cdot\varphi(z)=\varphi(y+z)$

证明

因为$\varphi(y)\cdot\varphi(z)=a^y\cdot a^z=a^{y+z}$

$\varphi(y+z)=a^{y+z}$

所以$\varphi(y)\cdot\varphi(z)=\varphi(y+z)$

7．设$f(x)=x^2-3x+7$，

求 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

解 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(x+h)^2-3(x+y)+7-(x^2-3x+7)}{h}$

$$=\frac{x^2+2xh+h^2-3x-3h+7-x^2+3x-7}{h}$$

$$=\frac{2xh+h^2-3h}{h}=2x+h-3$$

8．设$f(x)=lgx$，证明$f(x)+f(x+1)=f〔x(x+1)〕$

证明

$$
\begin{aligned}
f(x)+f(x+1)&=lgx+lg(x+1)\\
&=lg〔x(x+1)〕\\
&=f〔x(x+1)〕
\end{aligned}
$$

9．设$g(x)=lg\frac{1-x}{1+x}$，

证明$g(a)+g(b)=g\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$

证明

$$
\begin{aligned}
g(a)+g(b)&=lg\frac{1-a}{1+a}+lg\frac{1-b}{1+b}\\
&=lg\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}\\
&=lg\frac{1-a-b+ab}{1+a+b+ab}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)&=lg\frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{1+\frac{a+b}{1+ab}}\\
&=lg\frac{\frac{1+ab-a-b}{1+ab}}{\frac{1+ab+a+b}{1+ab}}
\end{aligned}
$$

$$=lg\frac{1-a-b+ab}{1+a+b+ab}$$

所以

$$g(a)+g(b)=g\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$

10. 求下列函数的定义域

〈1〉 $y=x^2-4x+5$

解 y的定义域是 $(-\infty, +\infty)$

〈2〉 $y=\frac{1}{3-x}$

解 要使$\frac{1}{3-x}$有意义，必须

$$3-x\neq 0 \quad 即x\neq 3$$

所以y的定义域是$(-\infty, 3)U(3, +\infty)$

〈3〉$y=\frac{1}{1+x^2}$

解 无论x取什么实数，$\frac{1}{1+x^2}$都有意义，

所以y的定义域是 $(-\infty, +\infty)$。

〈4〉 $y=\sqrt{3-5x}$

解 要使$\sqrt{3-5x}$ 有意义，必须

$$3-5x\geqslant 0，即 x\leqslant\frac{3}{5}$$

所以y的定义域是$\left(-\infty,\ \frac{3}{5}\right)$。

〈5〉 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$

解 要使$\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$有意义，必须

$4-x>0$，即$x<4$

所以y的定义域为$(-\infty,\ 4)$。

〈6〉 $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

解 要使$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$有意义，必须

$x^2-3x+2>0$ 即

$(x-2)(x-1)>0$

解之得：$x>2$或$x<1$，

所以y的定义域是$(-\infty,\ 1)U(2,\ +\infty)$。

〈7〉$y=\dfrac{1}{lg(1-x)}$

解 要使$\dfrac{1}{lg(1-x)}$有意义，必须

$$1-x>0 \quad 且 1-x \neq 1$$

解之得$x<1$，$x\neq 0$

所以y的定义域是$(-\infty, 0)U(0, 1)$。

〈8〉 $y=lg\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$

解 要使$lg\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$ 有意义，必须

$$\frac{1}{1-x}>0，1-x\neq 0，x+2\geqslant 0$$

解之得 $x<1$，$x\neq 1$，$x\geqslant -2$，

所以y的定义域为$[-2, 1)$。

〈9〉 $y=\sqrt{lg\frac{5x-x^2}{4}}$

解 要使$\sqrt{lg\frac{5x-x^2}{4}}$有意义，必须

$$lg\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$$

即 $\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$

$5x-x^2\geqslant 4$。

$x^2-5x+4\leqslant 0$。

$(x-4)(x-1)\leqslant 0$。

解之得 $x\leqslant 4$，$x\geqslant 1$，