

经济数学基础辅导材料

广州市财贸管理干部学院

目 录

第一章 函 数

(000)	内容提要	(1)
(000)	一、函数的概念	(1)
	二、常见的经济函数	(3)
	三、函数的简单性质	(4)
(001)	四、反函数与复合函数	(5)
(100)	五、初等函数	(6)
(001)	习题解答	(6)

第二章 极限与连续

	内容提要	(27)
	一、数列的极限	(27)
(001)	二、函数的极限	(27)
(001)	三、无穷大量与无穷小量	(28)
(001)	四、极限运算法则	(30)
	五、两个重要的极限	(33)
(001)	六、函数的连续性	(33)
(001)	习题解答	(34)

第三章 导数与微分

	内容提要	(55)
	一、导数的概念	(55)

	隐函数求导法	(56)
	一、对数求导法	(57)
	四、高阶导数	(57)
	五、导数在经济学中的应用	(57)
	六、弹性分析	(58)
(1)	七、微分及其应用	(59)
(1)	习题解答	(60)

第四章 导数的应用

(2)	内容提要	(109)
(8)	一、函数的单调性	(109)
(8)	二、函数的极值	(109)
	三、罗必塔法则	(110)
	习题解答	(111)

第五章 积 分

(7)	内容提要	(139)
(8)	一、不定积分	(139)
(8)	二、微分与不定积分的关系	(140)
(3)	三、基本技能——计算不定积分	(140)
(3)	的三大方法	(140)
(4)	四、定积分	(143)
	五、广义积分	(144)
	习题解答	(145)

第六章 多元函数

(302)	内容提要	(220)
(302)	一、二元函数	(220)
(302)	二、偏导数	(220)
(302)	三、二元函数的极值问题	(220)
(312)	习题解答	(222)

第七章 微分方程

(333)	内容提要	(240)
(333)	一、基本概念	(240)
(333)	二、一阶微分方程	(240)
(334)	习题解答	(241)

第八章 线性代数

(335)	内容提要	(262)
(335)	一、行列式	(262)
(335)	二、矩阵的概念及其运算	(266)
(335)	三、矩阵的逆及利用初等行变换解线性方程组	(271)
(335)	习题解答	(274)

第九章 线性规划

(300)	内容提要	(304)
(300)	一、什么叫线性规划	(304)
(300)	二、线性规划问题的数学模型	(304)

	三、两个变量线性规划问题	
	图解法的步骤	(305)
(055)	四、线性规划问题的标准形式	(305)
(055)	五、线性规划问题的解	(306)
(055)	六、线性规划问题的几个概念	(306)
(055)	七、线性规划的单纯形法	(307)
(555)	习题解答	(312)

第十章 概率论

	内容提要	(333)
(015)	一、随机事件及其概率	(333)
(015)	二、概率定义及其性质	(333)
(115)	三、古典概型条件概率	(334)
	四、全概率公式	(334)
	五、常见的离散型随机变量	(335)
(555)	习题解答	(337)

第十一章 数理统计

	内容提要	(371)
(175)	一、样本的频率分布与特征数	(371)
(175)	二、假设检验	(374)
	三、参数估计	(380)
	四、回归分析	(384)
(101)	习题解答	(390)

第一章 函 数

内容提要

一、函数的概念

设有两个变量 x 和 y ，如果对于 x 在其变化范围内的每一个值， y 按照一定的规律总有确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数， x 叫自变量，记作 $y=f(x)$ 。

在函数的定义中，包含着三个要素，即定义域（自变量 x 的变化范围）对应规律和值域（函数 y 的变化范围），前两个要素决定第三个要素。两个函数当且仅当其定义域和对应规律完全相同时，它们才是相同的。

1. 函数和函数值记号

用记号 $y=f(x)$ ， $x \in [a, b]$ 表示一个函数，则 x 表示自变量， $[a, b]$ 表示定义域， y 表示因变量，而 f 则表示对应规律，记号 f 可以用任何字母代替。在同一个问题中，若出现多个函数时，就需要用不同的记号去加以区别。

求函数 $y=f(x)$ ， $x \in [a, b]$ 当 $x=a$ 的值，是指当 $x=a$ 时对应的 y 值，通常用 $f(a)$ 表示，例如，如果 $y=f(x)=2x^2$ ，那么，当 $x=5$ 时对应的函数值 $f(5)=2 \times 5^2=50$ 。

2. 函数定义域的求法

当自变量 x 在其变化范围内取定某一个值 x_0 时，函数 y 有

确定的值 y_0 与之对应，我们就说函数在点 x_0 有定义。使函数有定义的 x 的变化范围称为函数的定义域。

对于分段函数来说，函数的定义域是用明显的形式给出的，例如，分段函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & 0 \leq x < 1 \\ 2x, & 1 \leq x \leq 2 \\ x+1, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

的定义域就是 $[0, 3]$ 。

对于由解析式表示的函数，如果未对定义域作特别的说明，那么，这种函数的定义域就依据解析式所涉及到的运算在实数中是否能进行而定。

一般地说，由解析式给出的函数 $y=f(x)$ ，可以这样确定其定义域：

①如果 $f(x)$ 是多项式，其定义域是 $(-\infty, +\infty)$ 。

②如果 $f(x)$ 是有理分式，即 $f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$ ，则其定义域由

$g(x) \neq 0$ 确定。

③如果 $f(x)$ 是偶次根式，即 $f(x) = \sqrt[2k]{p(x)}$ ，(k 是自然数)，则其定义域由 $p(x) \geq 0$ 确定。

④如果 $f(x)$ 是一个对数式，即 $f(x) = \log_a p(x)$ ($a > 0$, $a \neq 1$)，则其定义域由 $p(x) > 0$ 确定。

⑤如果 $f(x)$ 是三角函数，或反三角函数则其定义域由这些函数的特定定义来确定，比如 $f(x) = \arcsin p(x)$ ，则其定义域由 $|p(x)| \leq 1$ 来确定。

3. 函数的表示法

函数表示法,说得准确点就是函数对应规律表示法,通常有三种形式,即解折法,列表法,图象法。

二、常见的经济函数

1. 需求函数

社会对某种商品的需求量 Q 是价格 p 的函数: $Q = f(p)$,叫做需求函数。

一般地,需求函数是一个递减函数。

2. 供应函数

社会上某种商品的供应量是价格 p 的函数: $Q = g(p)$,叫做供应函数。

一般地,供应函数是一个递增函数。

3. 成本函数

总成本 C 是产量 x 的函数: $C = C(x) = C_0 + C_1(x)$ 叫成本函数,其中: C_0 是固定成本, $C_1(x)$ 是可变成本。

4. 利润函数

总利润 L 是产量 x 的函数: $L = L(x) = R(x) - C(x)$ 叫利润函数。其中: $R(x)$ 是销售总收入, $C(x)$ 是总成本。

如果商品的单价是 P ,销售量为 x ,则销售总收入 $R(x)$ 是销售量 x 的函数: $R(x) = P(x)$

5. 库存问题

库存问题就是在时间 t 内如何降低总需求量 Q 的进货费用和储存费用的问题。虽然,在时间 t 内的总需求是 Q ,其一次进货是不合理的。如果进货费用和储存费用之和为 y ,

则

$y = \text{进货费用} + \text{储存费用}$

进货费用 = 进货次数 $\times$ 每次进货费

$$= \frac{\text{总需求量}}{\text{每次进货量}} \times \text{每次进货费}$$

储存费用 = 平均库存量 $\times$ 单价储存费

$$= \frac{1}{2} \times \text{每次进货量} \times \text{单价储存费}$$

6. 复利计算

复利，通俗地说，就是利计利，即第一周期的利息将作为第二个周期的本金来计算利息。因此，如果本金是 a 元，一个周期的利息为 r ，那么经过 n 个周期后，用复利计算本利和时，其本利和为

$$s = a(1+r)^n$$

如果一个周期计算复利 m 次，则经过 n 个周以后，本利和为

$$s = a\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}$$

如果采取连续复制法，就是令 $m \rightarrow \infty$ ，得

$$s = ae^{nr}$$

(其中 $e = 2.71828\cdots$)

三、函数的简单性质

1. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 对于 (a, b) 内任意两点 x_1, x_2 , 如果 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调增加; 如果 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调减少。

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调增加或单调减少, 则称此区间为 $f(x)$ 的单调区间。

2. 奇偶性

对于函数 $y=f(x)$ 的定义域内的任何 x , 如果都有 $f(-x)=f(x)$, 则称函数 $y=f(x)$ 为偶函数。如果都有 $f(-x)=-f(x)$, 则称函数 $y=f(x)$ 为奇函数。

4. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 如果存在一个正数 M , 使得对于 (a, b) 内的任何 x 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是有界函数, 否则称为无界函数。

四、反函数与复合函数

1. 反函数

设 y 是 x 的函数

$$y=f(x)$$

如果由它可以确定 x 是 y 的函数

$$x=\varphi(y)$$

则称函数 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数。

反之, 也称 $y=f(x)$ 是函数 $x=\varphi(y)$ 的反函数。

习惯上, 把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 写成 $y=\varphi(x)$

2. 复合函数

如果 $y=f(u)$ ，而 $u=\varphi(x)$ 且 $f(u)$ 的定义域是 $\varphi(x)$ 的值域的全部或部分，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是 x 的复合函数， u 为中间变量， f 叫外层函数， φ 叫内层函数。

复合函数不一定只复合一次，而是可以进行有限多次的复合。例如，由 $y=\lg u$ ， $u=3+v$ ， $v=1+2x^2$ 经过三次复

合便构成函数 $y=\lg(3+\sqrt{1+2x^2})$ 。进行函数复合时，要注意中间变量的值域必须属于外层函数的定义域。

五、初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数包括常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数。

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限复合所构成的并用一个解析式表示的函数，称为初等函数。

习 题 一

1. 已知 $f(x)=4-2x^2-x^4$ ，求 $f(0)$ 、 $f(1)$ 、 $f(2)$ 、 $f(-2)$ 的值。

解 $f(0)=4-2\cdot 0^2-0^4=4$ ，

$f(1)=4-2\cdot 1^2-1^4=1$ ，

$f(2)=4-2\cdot 2^2-2^4=-20$ ，

$f(-2)=4-2\cdot (-2)^2-(-2)^4=-20$ 。

2. 已知 $g(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$, 求 $g(1)$, $g(2)$, $g(-2)$,

$g(6)$ 的值。

$$\text{解 } g(1) = \frac{|1-2|}{1+1} = \frac{|-1|}{2} = \frac{1}{2},$$

$$g(2) = \frac{|2-2|}{2+1} = \frac{0}{3} = 0,$$

$$g(-2) = \frac{|-2-2|}{-2+1} = \frac{|-4|}{-1} = -4,$$

$$g(6) = \frac{|6-2|}{6+1} = \frac{|4|}{7} = \frac{4}{7}.$$

3. 已知 $f(t) = t^2 - 2t + 6$, 验证:

$$f(y+h) = y^2 - 2y + 6 + 2(y-1)h + h^2$$

解 $f(y+h) = (y+h)^2 - 2(y+h) + 6$

$$= y^2 + 2yh + h^2 - 2y - 2h + 6$$

$$= y^2 - 2y + 6 + 2(y-1)h + h^2$$

4. 已知 $f(x) = x^3 + 3x$, 验证:

$$f(x+h) - f(x) = 3(x^2+1)h + 3xh^2 + h^3$$

解 $f(x+h) - f(x) = (x+h)^3 + 3(x+h) - (x^3 + 3x)$

$$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 3x + 3h$$

$$- x^3 - 3x$$

$$= 3(x^2+1)h + 3xh^2 + h^3$$

5. 已知 $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, 求证 $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = -\frac{1}{x^2+xh}$

证明: $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$

$$= \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-1}{x(x+h)h}$$

$$= -\frac{1}{x^2 - xh}$$

6. 已知 $\varphi(x) = a^x$, 试证 $\varphi(y) \cdot \varphi(z) = \varphi(y+z)$
证明

因为 $\varphi(y) \cdot \varphi(z) = a^y \cdot a^z = a^{y+z}$

$$\varphi(y+z) = a^{y+z}$$

所以 $\varphi(y) \cdot \varphi(z) = \varphi(y+z)$

7. 设 $f(x) = x^2 - 3x + 7$,

求 $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

解 $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - 3(x+h) + 7 - (x^2 - 3x + 7)}{h}$

$$= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 7 - x^2 + 3x - 7}{h}$$

$$= \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} = 2x + h - 3$$

8. 设 $f(x) = \lg x$, 证明 $f(x) + f(x+1) = f[x(x+1)]$
证明

$$\begin{aligned} f(x) + f(x+1) &= \lg x + \lg(x+1) \\ &= \lg [x(x+1)] \\ &= f[x(x+1)] \end{aligned}$$

9. 设 $g(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$,

证明 $g(a) + g(b) = g\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$

证明

$$\begin{aligned} g(a) + g(b) &= \lg \frac{1-a}{1+a} + \lg \frac{1-b}{1+b} \\ &= \lg \frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)} \\ &= \lg \frac{1-a-b+ab}{1+a+b+ab} \end{aligned}$$

$$g\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) = \lg \frac{1 - \frac{a+b}{1+ab}}{1 + \frac{a+b}{1+ab}}$$

$$\begin{aligned} &= \lg \frac{\frac{1+ab-a-b}{1+ab}}{\frac{1+ab+a+b}{1+ab}} \\ &= \lg \frac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b} \end{aligned}$$

$$= \lg \frac{1 - a - b + ab}{1 + a + b + ab}$$

所以

$$g(a) + g(b) = g\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$

10. 求下列函数的定义域

<1> $y = x^2 - 4x + 5$

解 y 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$

<2> $y = \frac{1}{3-x}$

解 要使 $\frac{1}{3-x}$ 有意义, 必须

$$3-x \neq 0 \quad \text{即 } x \neq 3$$

所以 y 的定义域是 $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

<3> $y = \frac{1}{1+x^2}$

解 无论 x 取什么实数, $\frac{1}{1+x^2}$ 都有意义,

所以 y 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$ 。

<4> $y = \sqrt{3-5x}$

解 要使 $\sqrt{3-5x}$ 有意义, 必须

$$3 - 5x \geq 0, \text{ 即 } x \leq \frac{3}{5}$$

所以 y 的定义域是 $(-\infty, \frac{3}{5})$ 。

$$\langle 5 \rangle y = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$$

解 要使 $\frac{1}{\sqrt{4-x}}$ 有意义, 必须 $0 < \frac{1}{x-1}$

$$4-x > 0, \text{ 即 } x < 4$$

所以 y 的定义域为 $(-\infty, 4)$ 。

$$\langle 6 \rangle y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$

解 要使 $\frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ 有意义, 必须

$$x^2-3x+2 > 0 \quad \text{即}$$

$$(x-2)(x-1) > 0$$

解之得: $x > 2$ 或 $x < 1$,

所以 y 的定义域是 $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ 。

$$\langle 7 \rangle y = \frac{1}{\lg(1-x)}$$

解 要使 $\frac{1}{\lg(1-x)}$ 有意义, 必须

$$1-x > 0 \quad \text{且} \quad 1-x \neq 1$$

解之得 $x < 1, x \neq 0$

所以 y 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ 。

$$\langle 8 \rangle \quad y = \lg \frac{1}{1-x} + \sqrt{x+2}$$

解 要使 $\lg \frac{1}{1-x} + \sqrt{x+2}$ 有意义, 必须

$$\frac{1}{1-x} > 0, \quad 1-x \neq 0, \quad x+2 \geq 0$$

解之得 $x < 1, x \neq 1, x \geq -2$,

所以 y 的定义域为 $[-2, 1)$ 。

$$\langle 9 \rangle \quad y = \sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}}$$

解 要使 $\sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}}$ 有意义, 必须

$$\lg \frac{5x-x^2}{4} \geq 0$$

$$\text{即} \quad \frac{5x-x^2}{4} \geq 1$$

$$5x-x^2 \geq 4。$$

$$x^2-5x+4 \leq 0。$$

$$(x-4)(x-1) \leq 0。$$

解之得 $x \leq 4, x \geq 1,$