

跨音速空气动力学

(速度图理论)

南京航空学院

一九八〇年九月

V211
1050-2



目 录

第一章	基本方程及速度各变换	2
§1-1	基本方程	2
§1-2	速度各变换	4
§1-3	跨音速流动的近似处理	6
§1-4	物理平舌和速度各之间的对应	13
§1-5	速度各平舌与物理平舌之间变换时遇到的奇性	19
第二章	混合型方程的数学基础	31
§2-1	引言	31
§2-2	混合型方程的几种边值问题	33
§2-3	双曲半平舌内的 Tyicomi 方程	34
§2-4	椭圆半平舌内的 Tyicomi 方程	37
§2-5	Tyicomi 方程的 Tyicomi 问题	43
第三章	喷管问题	47
§3-1	Tyicomi 方程的特解	47
§3-2	跨音速喷管问题	53
§3-3	喷管喉道问题的近似解	55
第四章	翼型问题	59
§4-1	严格气动方程的一些特解	59
§4-2	用速度各法求解可压缩流	62
§4-3	无环翼圆柱体的绕流	64
§4-4	无升力的准椭圆翼型绕流	69
§4-5	有环翼圆柱体绕流	74
§4-6	有环翼的准椭圆翼型绕流	85



30895178

V211
1050-2



目 录

第一章	基本方程及速度各变换	2
§1-1	基本方程	2
§1-2	速度各变换	4
§1-3	跨音速流动的近似处理	6
§1-4	物理平舌和速度各之间的对应	13
§1-5	速度各平舌与物理平舌之间变换时遇到的奇性	19
第二章	混合型方程的数学基础	31
§2-1	引言	31
§2-2	混合型方程的几种边值问题	33
§2-3	双曲半平舌内的 Tyicomi 方程	34
§2-4	椭圆半平舌内的 Tyicomi 方程	37
§2-5	Tyicomi 方程的 Tyicomi 问题	43
第三章	喷管问题	47
§3-1	Tyicomi 方程的特解	47
§3-2	跨音速喷管问题	53
§3-3	喷管喉道问题的近似解	55
第四章	翼型问题	59
§4-1	严格气动方程的一些特解	59
§4-2	用速度各法求解可压缩流	62
§4-3	无环易圆柱体的绕流	64
§4-4	无升力的准椭圆翼型绕流	69
§4-5	有环易圆柱体绕流	74
§4-6	有环易的准椭圆翼型绕流	85



30895178

第一章 基本方程及速度变换

§1-1 基本方程

我们研究理想完全气体的定常运动，略去重力，在二元情况下，它满足如下方程组：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \end{cases} \quad (1-1-1)$$

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \end{cases} \quad (1-1-2)$$

$$\begin{cases} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \quad (1-1-3)$$

$$\begin{cases} p = p(\rho) \end{cases} \quad (1-1-4)$$

式中 ρ 为气体密度， p 为压强， (u, v) 为速度， (x, y) 为直角坐标。感兴趣的是所谓势流一类，它满足条件

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1-1-5)$$

利用此式可以求得运动方程 (1-1-2) 和 (1-1-3) 的一个积分

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const} \quad (1-1-6)$$

此即所谓 Bernoulli 关系式。

利用 (1-1-5) 和 (1-1-6) 代替运动方程 (1-1-2) 和 (1-1-3)，即可得到如下等价方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \end{cases} \quad (1-1-1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (1-1-5)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const} \end{cases} \quad (1-1-6)$$

$$\begin{cases} p = p(\rho) \end{cases} \quad (1-1-4)$$

记

$$q^2 = u^2 + v^2$$

(1-1-6) 可知

$$\rho = \rho(\varphi)$$

(1-1-6a)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

(1-1-1)

(1-1-5)

实际上是含两个未知数的方程组；为方便，我们导出一些关系式如下，由(1-1-6)的微分形式

$$\rho \alpha \varphi + \frac{d\rho}{d\varphi} = 0$$

(1-1-6b)

并定义音速

$$a^2 = \frac{d\rho}{d\varphi}$$

(1-1-7)

代入上式，得

$$\rho \alpha \varphi + \frac{a^2}{\varphi} d\varphi = 0$$

由此

$$\frac{\alpha \varphi}{\alpha \varphi} = -\frac{\rho \varphi}{a^2}$$

(1-1-8)

于是

$$M^2 = \frac{\varphi^2}{a^2} = -\frac{\varphi}{\rho} \frac{\alpha \rho}{\alpha \varphi}$$

(1-1-9)

下面我们继续推导方程组，由(1-1-5)，得

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}$$

(1-1-10a)

(1-1-10b)

式中 φ 为势函数。代入(1-1-1)得

$$\rho_x u + \rho_y v + \rho \varphi_{xx} + \rho \varphi_{yy} = 0.$$

由(1-1-6a)

$$\begin{cases} \rho_x = \frac{\alpha \rho}{\alpha \varphi} \varphi_x = -\frac{\rho}{a^2} (u u_x + v v_x), \\ \rho_y = \frac{\alpha \rho}{\alpha \varphi} \varphi_y = -\frac{\rho}{a^2} (u u_y + v v_y). \end{cases}$$

·4·

代入上式，消去 ρ 并整理之，即得

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \varphi_{xx} - 2 \frac{u}{a} \frac{v}{a} \varphi_{xy} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \varphi_{yy} = 0 \quad (1-1-11)$$

式中

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = a^2(\rho) = a^2(\rho(\varphi)) = f(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)$$

可見 (1-1-11) 是一个 φ 的方程。为了考察其类型，作判别式

$$\Delta = \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) - \frac{u^2 v^2}{a^4} = 1 - M^2$$

由此可見，当 $M > 1$ ，即超音速时，方程为双曲型。

当 $M < 1$ ，即亚音速时，方程为椭圆型。

而在既有超音速又有亚音速气流的区域内，方程为混合型。同时还由于方程的类型依赖于解的性质，所以直接研究方程 (1-1-11) 就很困难。幸运的是，方程组 (1-1-1)、(1-1-5) 是可化约系统，它可以利用速度变换的方法而化为线性。下面我们来进行这一工作。

§1-2 速度变换

由 (1-1-10)

$$d\varphi = u dx + v dy \quad (1-2-1)$$

由 (1-1-1)，可引进流函数 ψ

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho^*} u. \end{cases} \quad (1-2-2a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\rho}{\rho^*} v. \end{cases} \quad (1-2-2b)$$

于是

$$d\psi = -\frac{\rho}{\rho^*} v dx + \frac{\rho}{\rho^*} u dy. \quad (1-2-2c)$$

式中 ρ^* 是临界密度

这样一来，(1-2-1) 和 (1-2-2) 就代替了原来的方程组。

顺便指出，与 (1-1-11) 相类似地可求得 ψ 所满足的方程，它是

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2 \frac{u}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (1-2-3)$$

在 (u, v) 平面上引进极坐标 (ϱ, θ) , 即

$$\begin{cases} u = \varrho \cos \theta \\ v = \varrho \sin \theta \end{cases} \quad (1-2-4a)$$

$$\quad (1-2-4b)$$

于是

$$d\varphi = \varrho (\cos \theta dx + \sin \theta dy). \quad (1-2-5)$$

$$d\psi = \frac{\varrho}{\varrho^*} \varrho (-\sin \theta dx + \cos \theta dy) \quad (1-2-6)$$

由此解出

$$dx = \frac{1}{\varrho \varrho^*} (\varrho \cos \theta d\varphi - \varrho^* \sin \theta d\psi) \quad (1-2-7)$$

$$dy = \frac{1}{\varrho \varrho^*} (\varrho \sin \theta d\varphi + \varrho^* \cos \theta d\psi) \quad (1-2-8)$$

所以

$$dx + i dy = \frac{e^{i\theta}}{\varrho} \left(d\varphi + \frac{i\varrho^*}{\varrho} d\psi \right) \quad (1-2-9)$$

上式左边是全微分, 故右边也必须是, 于是有

$$\left(\frac{e^{i\theta}}{\varrho} \right)_{\psi} = \left(\frac{i\varrho^* e^{i\theta}}{\varrho \varrho^*} \right)_{\varphi}$$

微分后并消去 $e^{i\theta}$, 再分开虚部和实部, 得

$$\varrho_{\psi} = \frac{\varrho^* \varrho}{\varrho} \theta_{\varphi} \quad (1-2-10)$$

$$\theta_{\psi} = -\frac{\varrho^*}{\varrho \varrho^*} (1-M^2) \varrho_{\varphi} \quad (1-2-11)$$

这是一个拟线性方程组, 应用速度法方法, 即得

$$\begin{cases} \varphi_0 = \frac{\varrho^* \varrho}{\varrho} \psi_{\varrho} \\ \varphi_{\varrho} = -\frac{\varrho^*}{\varrho \varrho^*} (1-M^2) \psi_0 \end{cases} \quad (1-2-12)$$

$$\quad (1-2-13)$$

这就是著名的速度法平面上的 Чаплыгин 线性方程组。

如果按通常的方法消去 ψ , 即得 Чаплыгин 方程,

$$\varrho^2 \psi_{\varrho\varrho} + (1+M^2) \varrho \psi_{\varrho} + (1-M^2) \psi_{00} = 0 \quad (1-2-14)$$

引进自变量

$$\sigma = \int_{\varrho^*}^1 \frac{\varrho}{\varrho^*} \frac{d\varrho^*}{\varrho^*} \quad (1-2-15)$$

6.

式中 $g^* = g/a^*$ ，而 a^* 为临界音速。

在此变换下，(1-2-12) 和 (1-2-13) 变为

$$\begin{cases} \psi_0 = -\psi_\sigma \\ \psi_\sigma = K(\sigma) \psi_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1-2-16) \\ (1-2-17) \end{matrix}$$

式中 $K(\sigma) = (g^*/g)^2 (1-M^2)$ (1-2-18)

由 (1-2-16) 和 (1-2-17) 消去 ψ ，即得

$$K(\sigma) \psi_{00} + \psi_{\sigma\sigma} = 0 \quad (1-2-19)$$

这就是 Чаплыгин 方程。

显然，在超音速时 $\sigma > 0$ ， $K < 0$ ，方程为双曲型，在亚音速时 $\sigma < 0$ ， $K > 0$ ，方程为椭圆型，而在混合型气流中，方程为混合型。直接对它进行讨论非常复杂，因此必须进行简化。

最后指出，由 (1-2-7)，(1-2-8) 和 (1-2-12)、(1-2-13) 可求出变换的 Jacobian 是

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(g, \sigma)} = -\frac{g^{*2}}{g^2} \left[\psi_g^2 - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{g^2} \right) \psi_0^2 \right] \quad (1-2-20)$$

§1-3 跨音速流动的近似处理

(一) 方程的简化

(1) Tricomi 方程：在跨音速附近， σ 是小量，故

$$K(\sigma) \approx K(0) + K'(0)\sigma + \dots \approx K'(0)\sigma \quad (1-3-1)$$

于是 Чаплыгин 方程变为

$$K'(0)\sigma \psi_{00} + \psi_{\sigma\sigma} = 0 \quad (1-3-2)$$

令

$$s = [K'(0)]^{1/3} \sigma \quad (1-3-3)$$

即得

$$s \psi_{00} + \psi_{ss} = 0 \quad (1-3-4)$$

这就是著名的 Tricomi 方程。

(2) Tricomi 方程的推广：

严格的方程 (1-2-19) 由于 $K(\sigma)$ 太复杂而不易讨论, 其简化形式 $TYiwmi$ 方程 (1-3-4) 只能在 $M=1$ 附近给出近似的结果。现在我们给出 $TYiwmi$ 方程的一种推广, 它可以大大提高适用的范围而又不致引起数学上的实质性困难。

例如, 考虑如下 $\psi(s, \theta)$ 和 $\varphi(s, \theta)$ 的微分方程组

$$\begin{cases} \tau \psi_s = -\frac{1}{\tau} \varphi_\theta \\ \frac{1}{\tau} \varphi_s = s \tau \psi_\theta \end{cases} \quad (1-3-5)$$

式中 τ 是 s 的未定函数

作因变量变换

$$\begin{cases} \psi_1 = \tau \psi \\ \varphi_{1,s} = -\frac{1}{\tau} \varphi_s \\ \varphi_{1,\theta} = -\frac{1}{\tau} \varphi_\theta + \frac{d\tau}{ds} \psi \end{cases} \quad (1-3-6)$$

为了使这一变换和方程 (1-3-5) 中函数之间的关系相容, 必须有 $\frac{d^2\tau}{ds^2} = 0$, 或即 $\tau = cs + b$, 这里 c 和 b 是常数。

将变换代入方程 (1-3-5) 即得

$$\begin{cases} \psi_{1,s} = \varphi_{1,\theta} \\ \varphi_{1,s} = -s \psi_{1,\theta} \end{cases} \quad (1-3-7)$$

消去 φ_1 , 即得 $TYiwmi$ 方程

$$s \psi_{1,\theta\theta} + \psi_{1,ss} = 0, \quad (1-3-8)$$

引出一个新的变量

$$\sigma = \int_0^s \frac{ds}{\tau^2} = \int_0^s \frac{ds}{(cs+b)^2} = \frac{s}{b(cs+b)} \quad (1-3-9)$$

以 σ 代替 s , 则方程 (1-3-5) 变为

$$\psi_{\sigma\sigma} + K_a(\sigma) \psi_{\theta\theta} = 0 \quad (1-3-10)$$

式中

$$K_a(\sigma) = \frac{b^6 \sigma}{(1-(b\sigma)^5)} \quad (1-3-11)$$

这一结果是由 Loewner 和 Germain, Fenain 等人得出的。
 ψ_{00} 的系数可以看作 $K(\sigma)$ 的一个近似，它比线性近似的好处是，可以使由 $K_a(\sigma)$ 表示的曲线与 $K(\sigma)$ 的真实曲线在 $\sigma=0$ 处不但相切，而且曲率相等。利用这些条件，可得

$$K_a(\sigma) = \frac{2.40\sigma}{(1+0.780\sigma)^5} \quad (1-3-12)$$

这一近似压缩性函数，见图 1-3-1。同一图上还画出了真实曲线 $K(\sigma)$ 及其线性近似。

本方法说明为了能够将严格的流动方程化为简单的 Tricomi 方程，限制近似的压缩性函数是 σ 的线性函数是不必要的。

(二) 对于压缩性函数近似的等熵替换：

上面我们已用近似的压缩性函数 $K_a(\sigma)$ 来代替真实的压缩性函数 $K(\sigma)$ ，使方程化到了 Tricomi 方程。现在我们要问是哪一种气体对应于这一类方程呢？显然，这一类气体具有的物理性质将不同于真实气体，特别，可以期望新的假想气体将有一种不同于真实气体的等熵关系。

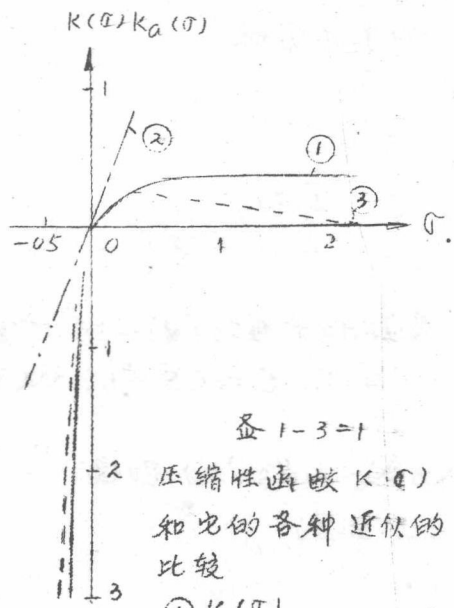


图 1-3-1
 压缩性函数 $K(\sigma)$
 和它的各种近似的比较
 ① $K(\sigma)$
 ② $K_a(\sigma) = (\gamma+1)\sigma$
 ③ $K_a(\sigma) = \frac{2.4\sigma}{(1+0.780\sigma)^5}$

为了得到确定的决定密度作为压强函数的代数公式，首先设

$$f(\sigma) = \frac{1}{\rho^*} \quad (1-3-13)$$

用近似的 $K_a(\sigma)$ 来代替真实的 $K(\sigma)$ 后，由方程 (1-2-15) 和 (1-2-18) 得到

$$f(\sigma) = \frac{1}{\rho^*} \frac{\rho^*}{\rho}$$

$$\ddot{f}(\sigma) = \frac{1}{g^*} \left(\frac{g^*}{\sigma} \right)^2 (1-M^2) = f(\sigma) K_a(\sigma)$$

结果, 问题变为求解如下形式的二阶常微分方程

$$\ddot{f}(\sigma) = K_a(\sigma) f(\sigma) \quad (1-3-14)$$

也具有声音条件作为一个参考点, 即要求

$$f(0) = 1 \quad (1-3-15)$$

和

$$\dot{f}(0) = 1$$

在此方法中, g^* 被决定为假想气体的 σ 的一个函数, 此假想气体具有一近似的压缩性函数 $K_a(\sigma)$ 。

进而, 由于

$$\frac{g^*}{\sigma} = \frac{\dot{f}(\sigma)}{f(\sigma)} \quad (1-3-16)$$

又由于通过求解方程 (1-3-14), 假定已经知道了 $f(\sigma)$, 故出度比也可得到为 σ 的一个函数, 从而也可得到为 g^* 的一个函数。然而, 由于压强函数和 M 数分别由如下公式给出

$$\frac{p-p^*}{\sigma^* a^{*2}} = \int_{g^*}^1 \frac{g}{\sigma^*} g^* dg^* \quad (1-3-17)$$

和

$$M^2 = 1 - K_a(\sigma) \left(\frac{\sigma^*}{\sigma} \right)^{-2} \quad (1-3-18)$$

简直没有任何困难, 即可得到压强比 $\frac{p}{p^*}$ 和出度比 $\frac{g}{g^*}$ 之间的关系, 另一方面也可得到局部 M 数 M 和速度参数 σ 之间的关系。

(1) 对于 $TYiComi$ 近似的线性形式情况,

$f(\sigma)$ 的微分方程是

$$\ddot{f}(\sigma) - (\gamma+1) \sigma \dot{f}(\sigma) = 0$$

或使用前式的代换

$$\sigma_1 = (\gamma+1)^{1/3} \sigma$$

即得

$$f(\sigma_1) - \sigma_1 f'(\sigma_1) = 0$$

解可以简单地按照 $\pm \frac{1}{3}$ 阶的圆柱 Bessel 函数 $J_{\pm \frac{1}{3}}$ 和具有 $\pm \frac{1}{3}$ 阶的纯虚变异的 Bessel 函数 $I_{\pm \frac{1}{3}}$ 得到。当利用方程 (1-3-15) 的条件时, 结果是

$$\frac{1}{q^*} = f = (\sigma_1)^{\frac{1}{2}} \left[3^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} \sigma_1^{\frac{3}{2}}\right) + 3^{-\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \delta I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} \sigma_1^{\frac{3}{2}}\right) \right] \quad \text{对 } \sigma_1 \geq 0.$$

$$\frac{1}{q^*} = f = (-\sigma_1)^{\frac{1}{2}} \left\{ 3^{-\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) J_{-\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3} (-\sigma_1^3)^{\frac{1}{2}}\right] - 3^{-\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \delta J_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3} (-\sigma_1^3)^{\frac{1}{2}}\right] \right\} \quad \text{对 } \sigma_1 \leq 0 \quad (1-3-19)$$

式中 $\delta = (\gamma + 1)^{-\frac{1}{3}}$

回到方程 (1-3-16), 立刻得到密度比为

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{3^{-\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) I_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3} \sigma_1^{\frac{3}{2}}\right) + 3^{-\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \delta I_{-\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3} \sigma_1^{\frac{3}{2}}\right) (\sigma_1)^{\frac{1}{2}}}{3^{-\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} \sigma_1^{\frac{3}{2}}\right) + 3^{-\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \delta I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} \sigma_1^{\frac{3}{2}}\right) \delta} \quad (1-3-20)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{3^{-\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) J_{\frac{2}{3}}\left[\frac{2}{3} (-\sigma_1^3)^{\frac{1}{2}}\right] + 3^{-\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \delta J_{-\frac{2}{3}}\left[\frac{2}{3} (-\sigma_1^3)^{\frac{1}{2}}\right] (-\sigma_1)^{\frac{1}{2}}}{3^{-\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) J_{-\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3} (-\sigma_1^3)^{\frac{1}{2}}\right] - 3^{-\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \delta J_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3} (-\sigma_1^3)^{\frac{1}{2}}\right] \delta} \quad \begin{matrix} \text{对 } \sigma_1 \geq 0 \\ \text{对 } \sigma_1 \leq 0 \end{matrix}$$

对于服从近似式 $K_a(\sigma) = (\gamma + 1)\sigma$ 的这一类气体, 亦即对于所谓的 Tricomi 气体, $\rho/\rho^* \sim q^*$, $p/p^* \sim \rho/\rho^*$, $M \sim \sigma$ 的

关系见参 1-3-2, 为比较, 同一图上也画出了绝热指数 $\gamma = 1.4$ 的真实气体的对应性质。

(2) 对于 Tricomi 近似的推广

此时由方程 (1-3-12) 知

$$K_a(\sigma) = 2.40\sigma / (1 + 0.780\sigma)^5$$

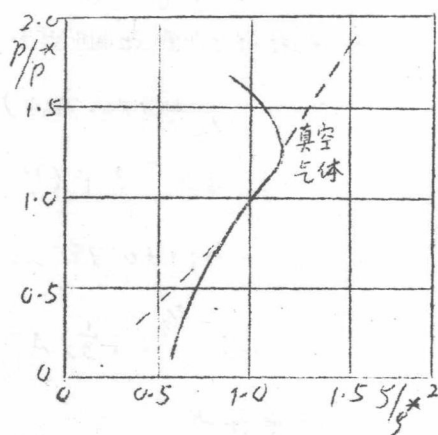
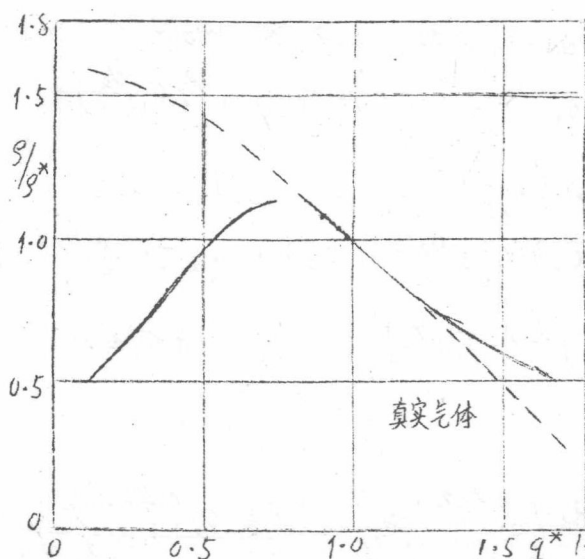
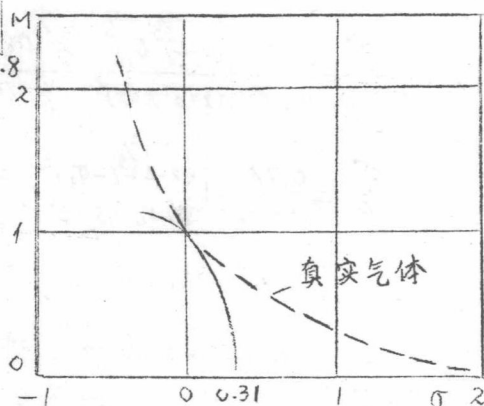


表 1-3-2

TRICOMI 近似与真实气体
对应性质的比较



需要求解的微分方程是

$$(0.78\sigma + 1)^5 \ddot{f}(\sigma) = 2.4\sigma f(\sigma).$$

作变量变换

$$f = (1 + 0.78\sigma) f_1(\sigma)$$

而

$$\sigma_1 = (2.4)^{1/3} \sigma (1 + 0.78\sigma)^{-1}.$$

则微分方程变为

$$\ddot{f}_1 - \sigma_1 f_1 = 0.$$

作为参考点的声速条件是

$$f_1(0) = 1$$

和 $\left(\frac{df_1}{d\sigma_1}\right)_{\sigma_1=0} = A = 0.164318$

由于微分方程和刚得到的一样，故可立刻写出结果

$$f = (1+0.78\sigma)(\sigma_1)^{1/2} \left[3^{-1/3} \Gamma(2/3) I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \sigma_1^{3/2} \right) + 3^{-2/3} \Gamma(1/3) A I_{1/3} \left(\frac{2}{3} \sigma_1^{3/2} \right) \right] \quad \text{对 } \sigma_1 \geq 0. \quad (1-3-21)$$

$$f = (1+0.78\sigma)(-\sigma_1)^{1/2} \left[3^{-1/3} \Gamma(2/3) J_{-1/3} \left[\frac{2}{3} (-\sigma_1^3)^{1/2} \right] - 3^{-2/3} \Gamma(1/3) A J_{1/3} \left[\frac{2}{3} (-\sigma_1^3)^{1/2} \right] \right] \quad \text{对 } \sigma_1 \leq 0.$$

而密度比为

$$\frac{S^*}{S} = \frac{0.78}{1+0.78\sigma} + \frac{(2.4)^{1/3} (\sigma_1)^{1/2}}{(1+0.78\sigma)^2} \frac{3^{-1/3} \Gamma(2/3) I_{2/3} \left(\frac{2}{3} \sigma_1^{3/2} \right) + 3^{-2/3} \Gamma(1/3) A I_{-2/3} \left(\frac{2}{3} \sigma_1^{3/2} \right)}{3^{-1/3} \Gamma(2/3) I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \sigma_1^{3/2} \right) + 3^{-2/3} \Gamma(1/3) A I_{1/3} \left(\frac{2}{3} \sigma_1^{3/2} \right)} \quad \text{对于 } \sigma_1 \geq 0.$$

$$\frac{S^*}{S} = \frac{0.78}{1+0.78\sigma} + \frac{(2.4)^{1/3} (-\sigma_1)^{1/2}}{(1+0.78\sigma)^2} \frac{3^{-1/3} \Gamma(2/3) J_{2/3} \left[\frac{2}{3} (-\sigma_1^3)^{1/2} \right] + 3^{-2/3} \Gamma(1/3) A J_{-2/3} \left[\frac{2}{3} (-\sigma_1^3)^{1/2} \right]}{3^{-1/3} \Gamma(2/3) J_{-1/3} \left[\frac{2}{3} (-\sigma_1^3)^{1/2} \right] - 3^{-2/3} \Gamma(1/3) A J_{1/3} \left[\frac{2}{3} (-\sigma_1^3)^{1/2} \right]} \quad \text{对于 } \sigma_1 \leq 0. \quad (1-3-22)$$

图 1-3-3 给出了对于推广了的 Tricomi 近似的 $\frac{S}{S^*} \sim q^*$,

$p/p^* \sim S/S^*$, $M \sim \sigma$ 的关系

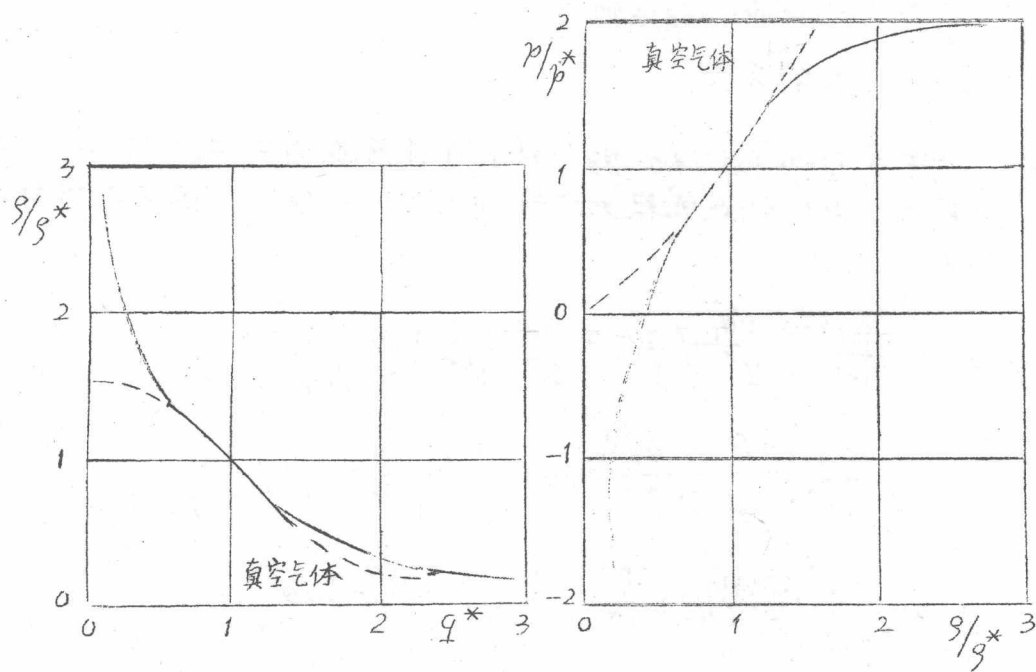
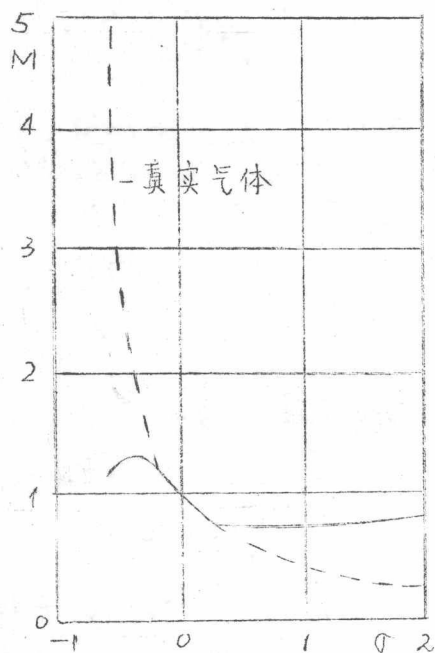


图 1-3-3 推广的
Tricomi 近似与
真实气体对应性质
的比较



§1-4 物理平石和速度参之间的对应

设 $P(x, y)$ 是物理平石内的任一点, 而 $P'(\sigma, \theta)$ 表示它在

速度场内的映象，则我们有

(一) 流线的变换

如果已知 $p_0(x_0, y_0)$ ，对应于速度场内点 $p'_0(\sigma', \theta')$ ，则沿通过 p_0 和 p' 的流线积分方程 (1-2-7) 和 (1-2-8)，即可决定 x 和 y ：

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \left[\int_{\theta'}^{\theta} \frac{\cos \theta_1}{g_1^*} \left(\frac{\varphi_0}{a^*} + \frac{\varphi_\sigma}{a^*} \frac{d\sigma}{d\theta} \right) d\theta_1 \right]_{\psi = \psi(\sigma', \theta')} \\ &= -\frac{1}{a^*} \left[\int_{\theta'}^{\theta} \frac{\cos \theta_1}{g_1^*} \left(\psi_\sigma + k(\sigma_1) \frac{\psi_\sigma^2}{\psi_\sigma} \right) d\theta_1 \right]_{\psi = \psi(\sigma', \theta')} \quad (1-4-1a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \left[\int_{\theta'}^{\theta} \frac{\sin \theta_1}{g_1^*} \left(\frac{\varphi_0}{a^*} + \frac{\varphi_\sigma}{a^*} \frac{d\sigma}{d\theta} \right) d\theta_1 \right]_{\psi = \psi(\sigma', \theta')} \\ &= -\frac{1}{a^*} \left[\int_{\theta'}^{\theta} \frac{\sin \theta_1}{g_1^*} \left(\psi_\sigma + k(\sigma_1) \frac{\psi_\sigma^2}{\psi_\sigma} \right) d\theta_1 \right]_{\psi = \psi(\sigma', \theta')} \quad (1-4-1b) \end{aligned}$$

式中 g_1^* 是 σ_1 的函数，由方程 (1-2-15) 给出。

流线上任一点处的曲率 $\frac{1}{R}$ 可以计称如下，参照 (1-2-7) 和 (1-2-8)

$$|R| = \left| \frac{(dx^2 + dy^2)^{1/2}}{d\theta} \right|_{\psi = \text{const}} = \frac{1}{g} \left| \frac{d\varphi}{d\theta} \right|_{\psi = \text{const}}$$

利用方程 (1-2-15)，(1-2-20) 和 (1-2-18)，可得

$$|R| = \frac{1}{g} \left| \frac{\psi_\sigma^2 + k \psi_\sigma^2}{\psi_\sigma} \right| = g^2 \left| \frac{J}{\psi_\sigma} \right| \quad (1-4-1c)$$

(二) 任一曲线入的变换

设此曲线入由关系式 $\sigma = \sigma(\theta)$ 定义，它连接点 p_0' 和 p' ，则在物理平面内的对应曲线是。

$$x - x_0 = \left\{ \frac{1}{a^*} \int_{\theta'}^{\theta} \frac{1}{g_1^*} \psi_0 \left(k \cos \theta_1 \frac{d\sigma}{d\theta} - \frac{g_1^*}{2} \sin \theta_1 \right) d\theta_1 \right\}_\lambda -$$

$$-\left\{\frac{1}{a^*}\int_{\sigma_1}^0 \frac{1}{q_1^*} \psi_\sigma \left(\cos \sigma_1 + \frac{s^*}{s} \sin \sigma_1 \frac{d\sigma}{d\sigma_1}\right) d\sigma_1\right\}_\lambda \quad (1-4-2a)$$

$$y-y_0 = \left\{\frac{1}{a^*}\int_{\sigma_1}^0 \frac{1}{q_1^*} \psi_\sigma \left(k \sin \sigma_1 \frac{d\sigma}{d\sigma_1} + \frac{s^*}{s} \cos \sigma_1\right) d\sigma_1\right\}_\lambda -$$

$$-\left\{\frac{1}{a^*}\int_{\sigma_1}^0 \frac{1}{q_1^*} \psi_\sigma \left(\sin \sigma_1 - \frac{s^*}{s} \cos \sigma_1 \frac{d\sigma}{d\sigma_1}\right) d\sigma_1\right\}_\lambda \quad (1-4-2b)$$

特别地，如果曲线 λ 是通过 P_0 点的连接等速度点的等速线，则上述积分变为

$$x-x_0 = -\left[\frac{1}{a^*}\int_{\sigma_1}^0 \frac{1}{q_1^*} \left(\frac{s^*}{s} \sin \sigma_1 \psi_\sigma + \psi_\sigma \cos \sigma_1\right) d\sigma_1\right]_{\sigma=\sigma_1} \quad (1-4-3a)$$

$$y-y_0 = \left[\frac{1}{a^*}\int_{\sigma_1}^0 \frac{1}{q_1^*} \left(\frac{s^*}{s} \cos \sigma_1 \psi_\sigma - \psi_\sigma \sin \sigma_1\right) d\sigma_1\right]_{\sigma=\sigma_1} \quad (1-4-3b)$$

如果将上述等速线进一步选为音速线，则有

$$x-x_0 = -\left[\frac{1}{a^*}\int_{\sigma_1}^0 (\psi_\sigma \sin \sigma_1 + \psi_\sigma \cos \sigma_1) d\sigma_1\right]_{\sigma=0} \quad (1-4-4a)$$

$$y-y_0 = \left[\frac{1}{a^*}\int_{\sigma_1}^0 (\psi_\sigma \cos \sigma_1 - \psi_\sigma \sin \sigma_1) d\sigma_1\right]_{\sigma=0} \quad (1-4-4b)$$

在超音速部分，按双曲型方程理论，附属于方程 (1-2-19) 的特征线 Γ 其斜率由二阶导数的系数确定为

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_1} = \begin{cases} [-1/\kappa(\sigma)]^{1/2} & \text{右族特征线 } \Gamma^+ \\ -[-1/\kappa(\sigma)]^{1/2} & \text{左族特征线 } \Gamma^- \end{cases} \quad (1-4-5)$$

用此方法确定的特征线对应于方程 (1-2-3) 的特征线，而后者是与流场的 Mach 线 C 相一致的。结果，Mach 线 C 由下式给出。

$$x-x_0 = \left\{\frac{1}{a^*}\int_{\sigma_1}^0 \frac{\psi_\sigma}{q_1^*} \left[\mp(-\kappa)^{1/2} \cos \sigma_1 - \frac{s^*}{s} \sin \sigma_1\right] d\sigma_1\right\}_\Gamma -$$

$$-\left\{\frac{1}{a^*}\int_{\sigma_1}^0 \frac{\psi_\sigma}{q_1^*} \left[\cos \sigma_1 \pm \frac{s^*}{s} (-1/\kappa)^{1/2} \sin \sigma_1\right] d\sigma_1\right\}_\Gamma \quad (1-4-6a)$$

$$y-y_0 = \left\{\frac{1}{a^*}\int_{\sigma_1}^0 \frac{\psi_\sigma}{q_1^*} \left[\mp(-\kappa)^{1/2} \sin \sigma_1 + \frac{s^*}{s} \cos \sigma_1\right] d\sigma_1\right\}_\Gamma -$$

$$-\left\{\frac{1}{a^*}\int_{\sigma_1}^0 \frac{\psi_\sigma}{q_1^*} \left[\sin \sigma_1 \mp \frac{s^*}{s} (-1/\kappa)^{1/2} \cos \sigma_1\right] d\sigma_1\right\}_\Gamma \quad (1-4-6b)$$