

舰艇内燃机动力学

JIANTING NEIRANJI DONGLIXUE

下 册

(艦艇內燃機的減震)

张志华 编

一九六三年四月

总编号: 3020157

开本: $787 \times 1092^{1/25}$

$3^{9/25}$ 印张 78,120 字

印数: 1—500 份

成本费: 0.96 元

DIES 63
常用符号凡例

- u, v, w 物体重心沿坐标轴 x, y, z 方向的正位移;
- α, β, γ 物体绕 x, y, z 轴的角位移;
- x_i, y_i, z_i 第 i 减震器的坐标值;
- u_i, v_i, w_i 第 i 减震器沿坐标轴 x, y, z 方向的正位移;
- C_x^i, C_y^i, C_z^i 第 i 减震器沿坐标轴方向的刚度;
- C_x, C_y, C_z 减震物体在坐标轴方向的总刚度;
- C_{xx}, C_{yy}, C_{zz} 减震物体绕坐标轴的回转刚度;
- J_x, J_y, J_z 物体对坐标轴的转动惯量;
- $x, y, z, \varphi, \psi, \beta$ 舰体在直角坐标系内的位移及角位移;
- $\theta_1, \theta_2, \zeta_1, \zeta_2, v, \beta$ 在广义坐标(主坐标)系统内的物体振动位移;
- $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, y, \beta$ 在主坐标系内的舰体振动位移;
- $\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2, S, B$ 在主坐标系内物体对于舰体的相对位移;
- $M(G)$ 物体质量(重量);
- M_0 干扰作用力矩;
- F, P 干扰作用力;
- y_c 刚度中心坐标值;
- m_i 当量质量;
- n_i 当量刚度;
- b_i 双牵连振动振幅比值;
- f_x 物体沿 x 轴方向的振动频率(赫芝);
- ω_x 物体沿 x 轴方向的振动角频率(弧度/秒);
- ω 外界干扰力(力矩)作用频率;
- τ 能量消散系数;
- D 动力放大系数;
- E 传递系数;
- δ 减震系数;
- ε 相对位移系数;
- ξ 相位差角。

目 錄

常用符号凡例

第三章 艦艇內燃机的減震裝置

§ 3-1 艦艇內燃机減震的作用·····	1
§ 3-2 減震器类型及基本特性参数·····	3
§ 3-3 減震原理：減震物体的自由振动·····	11
一、自由振动的一般情况·····	11
二、合理的減震情况·····	15
三、用主坐标方法研究双牽連振动·····	21
§ 3-4 減震物体的强迫振动·····	24
一、干扰作用的特性·····	24
二、单自由度强迫振动·····	29
三、双牽連的强迫振动·····	41
§ 3-5 內燃机減震的基本要求·····	53
§ 3-6 计算例題·····	59

第三章 舰艇内燃机减震装置

§ 3-1 舰艇内燃机减震的作用

在舰艇执行战斗任务时，敌人兵器爆炸造成的巨大冲击波作用于舰体上。如果内燃机或其他舰用设备与舰体是刚性连接的话，则此爆炸冲击力亦作用于内燃机或其他舰用设备上而无任何减弱。过去的战争经验表明：往往敌人兵器爆炸未使舰艇遭受重大破损，而却引起舰艇动力装置和舰艇其他设备的局部故障或全部破损。

最典型的破损有：发动机及辅机装置的基础固定螺栓被拉断、破坏了管路的连接使之发生漏损、定好的轴系中心线被破坏、透平鼓风机的固定螺栓被折断、各种仪表的精细零件被损坏、各种设备从舰体基础上脱落等。

舰艇设备除了受到兵器爆炸的破坏影响之外，还有由于其他原因所引起的舰体振动，也影响了舰艇设备的正常工作。

使舰体产生振动的源泉有以下几种：

- ① 敌人兵器爆炸的作用；
- ② 不平衡机械（如内燃机，空气压缩机等）的作用力和力矩；
- ③ 舰艇航行振动（由螺旋桨工作所引起的）；
- ④ 舰艇摇摆和颠簸。

内燃机是舰体振动的主要源泉之一。发动机旋转质量与往复运动质量惯性力及力矩的外部不平衡性以及不均匀的扭矩都会造成发动机和舰体的振动，因而会影响其他舰用设备的正常工作。

现代高速大功率发动机的机件具有相当大的质量和加速度，所以当制造得即使有极轻微的不平衡和间隙，即足以引起发动机的振动。

舰艇航行时，螺旋桨旋转不平衡质量及桨叶带起的水对舰体的冲击都使舰体产生振动，这种振动对各种舰用设备和仪表的工作都有影响。

在舰艇摇摆时产生的舰艇设备惯性力及力矩是比较小的。但在暴风及不正常的海浪情况下，舰体受水质量影响较厉害时，情况便复杂

化；这时能产生波浪与舰舷的强烈冲击，而使整个舰体振动，因此对舰艇设备的工作也就相应的产生干扰。对于快速舰艇，特别是小排水量的舰艇，在大航速下舰体的不正常振动最为明显。

舰体的振动使得一系列舰艇技术装备的工作条件恶化：

① 由于振动而引起的附加应力破坏了各舰构连接处的强度（铆接，焊接及螺栓联接等）。

② 破坏了各种机械，特别是仪表的正常工作条件。

在振动情况下，由于具有变化的惯性力，所以使得仪表指针颤动或移动，使观察困难，读数不准；照象设备所拍照片不清晰；各种电气控制及仪表系统中的自动机构与继电器动作不协调；另外也大大地缩短仪表灯泡及照明系统灯泡的使用期限。

③ 由于舰体振动而使得舰用设备的另件损坏或加速磨损，损失其精密程度。如轴及轴承的磨损、某些另件气密性的丧失、细管及导线的折断、电机电刷的破裂等。

④ 使人员的工作条件恶化：增加疲劳、减弱注意力、使接受与反应迟钝。

发动机工作时能引起舰体的振动，另一方面舰体由于其他原因而引起的振动也对发动机产生影响。

因此，为了使舰体免于受不平衡机械振动的影响以及舰用设备免于受各种舰体振动的影响，尤其对于军用舰艇而言，减弱敌人兵器所产生的巨大冲击力对舰用设备的作用，现在绝大多数舰艇内燃机动力装置及其他舰用设备都安装有减震装置；即在舰用设备和舰体结构间采用弹性连接。

此外，还有第三个可由减震装置来解决的任务：它对于设备或舰体的工作无直接影响，但对于舰艇的战斗勤务却具有重大的意义，这就是舰艇的消音任务。

舰体能把音波传播给水，这就使得用水音探测器材可能在远距离上发现舰艇。产生声音的根源乃是舰船螺旋桨和工作的机械。如果把机械安装在橡胶减震器上，便可显著地减弱传给舰体的音响能量。

§ 3-2 減震器类型及其基本特性参数

为了使舰用装备能达到減震的效果，一般是在装备的底座下方安装減震器。

在舰艇上採用的形式最简单的減震器为鋼絲螺旋形弹簧或板状弹簧減震器。被減震的机械是悬吊或安在它的上面。舰上的某些灵敏的航海仪表，舰炮仪表，无线电通讯及雷达等的设备都有用弹簧來減震的。

现在，在舰艇制造中橡皮減震器得到了广泛的应用，在这种減震器中用橡皮作为弹性元件。橡皮的重要性能除弹性之外，还有吸收振动能量的性能，因此橡皮也是一种良好的消音体。

用来制造減震器的橡皮可分为三类：软的，半硬的和硬的。对于装在发动机下面的減震器而言，最合适的是具有肖氏回跳硬度35~50的半硬橡皮，它的许用应力为 $\sigma = 10$ 公斤/厘米²。

減震器的基本特性参数为其额定靜力载荷及刚度。

減震器的额定靜力载荷是当其只受被減震物的重力作用时，所允许的最大压缩（或拉伸）载荷。不同型号及尺寸的減震器其额定靜力载荷亦有所不同，其数值分别在以后相应表格中列出。

在減震器变形一厘米时，所承受的作用力称为刚度。橡皮減震器的刚度数值与加在其上的负荷性质有关。当減震器在以1-2毫米/分的变形速度缓慢改变负荷时，所测得的刚度称为靜力刚度。实际上，橡皮減震器的刚度是随载荷而变化的。图3-1上示出了利用实验方法在橡皮方块上加载和卸载情况下得到的特性曲线。我们可以看出：橡皮块的变形不是随作用力成正比例变化，而且加载和卸载的特性线也不相合。这特性线所包围的面积为其在該载荷变化一循环时被橡皮所吸收的能量。然而我们一般是忽略此特性线的非线性，而採用等于其相当靜载荷平均值的计算刚度。

減震器在有交变的变形，其频率为200—300次/分、振动振幅为0.2~1.0厘米的情况下，测定的刚度（温度为+15°~20°）称为动力刚度。动力刚度常较靜力刚度为大，这是由于橡皮延迟变形影响的结果。

在以2-6米/秒的速度作冲击变形的条件下，所测定的减震器刚度称为冲击刚度。

在减震器的产品目录中分别列出按减震器本身的坐标轴 x_a , y_a , z_a 方向给定的静力刚度及动力刚度，而冲击刚度可取为动力刚度的1~1.5倍。

舰艇摇摆、纵倾、横倾时，被减震设备对平衡位置的位移计算是按减震器静力刚度进行。

计算减振设备的自由振动频率时，是按减震器的动力刚度进行的。

舰体冲击振动时（如受兵器爆炸冲击波的作用），减震设备的变形和所受冲击力的计算是按减震器冲击刚度进行的。

舰用设备所采用的橡皮减震器有以下几种：

1. C和A-C型橡皮减震器（图3-2）

C型减震器的组成部分有橡皮块（圆环状）1，在环的中心放置带有固定螺栓3的钢质套筒2。在圆环橡皮的外圈边上嵌入矩形薄钢板

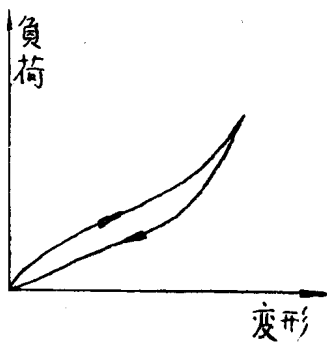


图 3-1 橡胶变形曲线

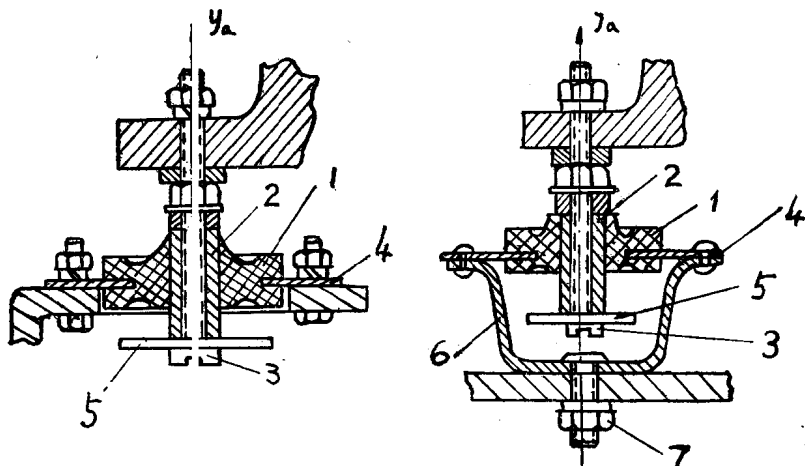


图 3-2 A和A-C型减震器

4。薄钢钣4上的孔是为了将减震器固定于基座上用的。圆形薄钣5在橡皮环遭到破坏的情况下用来防止机械脱落。A—C型减震器与C型的不同地方是具有螺栓7的铆接十字接头6。螺栓7是用来固定减震器用的。这种减震器是加强的，它的固定方法较方便，损坏的减震器很容易更换。

A和A—C型减震器制成了八种尺寸类型的工业产品，它主要应用于仪表板或轻型机械上。

减震器能承受不小于15倍额定载荷的作用负荷而不致破坏。

两种型式的减震器的静力刚度示于表3-1中，其动力刚度及冲击刚度可取较静力刚度大30%。

表 3-1

序号	系列号	减震器号	额定载荷 (公斤)	静力刚度 (公斤/厘米)		
				C'_{x_n}	C'_{z_n}	C'_{y_n}
1	1	1	0.45	6.5	6.5	2.8
2		2	0.90	13	13	5.6
3		3	1.35	19.3	19.3	8.4
4	2	4	1.80	26	26	11.2
5		6	2.70	39	39	17
6		10	4.50	65	65	28
7		12	5.40	77	77	33.7
8	3	25	11.25	150	150	65

2. AKCC型减震器 (图3-3)

它由金属骨架2和一块金属底座钣4组成，骨架和底座钣之间充满橡胶3（方格形影线）。在橡胶中放进一个金属筒1。筒子有带螺纹的圆孔。金属筒是为安装固定螺钉用的。减震器用螺钉固定于机械的基座上。

金属筒的下部最大尺寸比骨架上部孔的直径大些，这样就避免了当橡胶被破坏时，设备自基座上脱落。

AKCC型減震器制成了11種類型，其額定載荷分別為10~400公斤。這種減震器可用於中小型平衡的或不平衡的機械和設備上，它能可靠地工作於有顯著震動的地方，並且能夠消音。

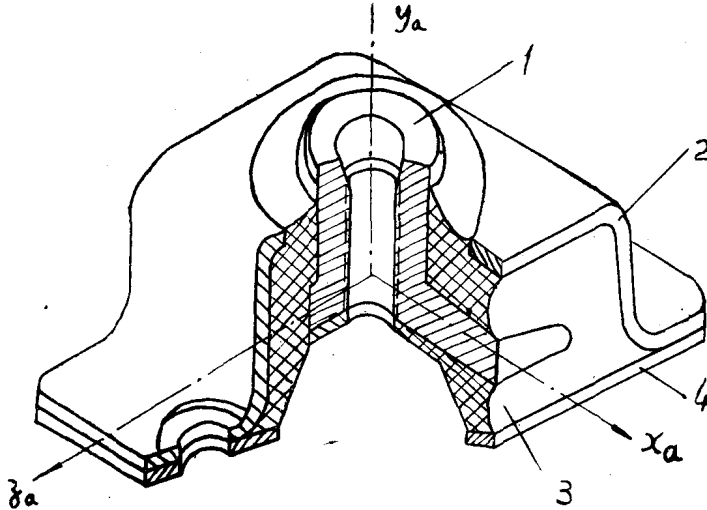


圖 3-3 AKCC型減震器

依橡膠成分的不同，減震器可分為抗油的和普通的兩種。抗油減震器在周圍介質自 -5°C 至 $+70^{\circ}\text{C}$ 有滑油或燃油氣氛條件下，以及可能有滑油、燃油及海水沾染條件下，允許長期使用。

AKCC型減震器沿 y_a 軸交變變形的阻尼係數為 $0.2\sim 0.25$ 。

減震器能承受相當於15倍額定載荷的靜壓縮負荷而不損壞。

在正確地選擇減震固定件和減震物的基座時，減震器能保證音響強度級數下降15分貝。

AKCC型減震器在標準的K-200型衝擊試驗機上實驗得出：當試驗機平台的振動加速度傳至被減震物體時，加速度（在減震器承受額定載荷的情況下）減至 $\frac{1}{8}\sim\frac{1}{13}$ 。

減震器在額定載荷作用下的變形分別為 $0.6\sim 1.2$ 毫米，而自由行程為 $8\sim 12$ 毫米。

減震器的額定載荷及剛度列於表3-2中。

AKCC型減震器的冲击刚度可取为动力刚度(1~1.5)倍,其中小的数值相应为減震器变形速度小于1米/秒时。

表 3-2

序 号	型 号	減震器 x_a, y_a 及 z_a 轴向上的 額定載荷 (公斤)			減震器 x_a, y_a 及 z_a 轴向上的 靜力刚度 (公斤/厘米)			減震器 x_a, y_a 及 z_a 轴 向上的动力刚度 (公斤/厘米)		
		P_{y_a}	P_{z_a}	P_{x_a}	C'_{y_a}	C'_{z_a}	C'_{x_a}	C_{y_a}	C_{z_a}	C_{x_a}
1	AKCC-10M	10	10	5	125	170	100	550	800	300
2	-15M	15	15	10	150	250	130	650	1150	450
3	-25M	25	25	10	220	500	210	1100	1200	650
4	-40M	40	40	15	400	600	350	1650	1700	1000
5	-60M	60	60	25	640	800	600	2200	1700	900
6	-85M	85	85	35	850	900	620	3100	1900	1000
7	-120M	120	110	50	1150	1200	650	3500	2100	1300
8	-160M	160	150	70	2800	1600	700	7600	2300	1600
9	-220M	220	190	80	4700	2500	750	10000	3000	1800
10	-300M	300	210	90	5200	3200	800	11000	4200	2000
11	-400M	400	260	100	7200	4060	900	14500	5600	2000

3. KAC型減震器

KAC型橡胶金属減震器共有12种型号,前四种为圆柱形,而后8种为矩形。各型号的減震器能承受6~650公斤的額定載荷,它主要应用在舰艇的中小型设备上。

图3-4所示为双金属鉸KAC型減震器,它是由两个平置的圆形或矩形金属鉸组成,其中间用硫化橡胶连接。通常上鉸是固定于被減震的物体上,而下鉸则固定于基座上。

減震器在周围介质温度为 -5° 至 $+70^{\circ}\text{C}$ 以及可能沾染上滑油、燃油和海水的情况下允许长期工作。

減震器在每分钟振动频率在3000次以内，橡胶块轴向 z_a 、 y_a 和 x_a 的变形幅度在0.75毫米内时允许长期使用。

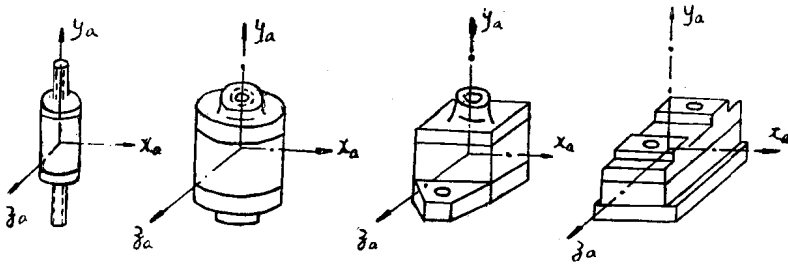


图 3-4 KAC型減震器

当減震器承受压缩时，能经受15倍短时间的靜过载，当承受拉力和剪力时能经受10倍的靜过载不致使橡胶受到损坏和永久变形。減震器在 y_a 轴向额定载荷作用下的靜变形分别为0.8~1.2毫米，其最大压缩变形为20~30毫米，而最大拉伸变形为12~35毫米。

在正确选择減震固定件和減震物体的基座时，KAC型減震器能保证音响强度级数下降不小于15分贝。

KAC型減震器在标准试验机K-200上试验结果：试验机平台的振动加速度在传至被減震物体时，已减小至 $\frac{1}{10} \sim \frac{1}{20}$ （減震器在额定载荷下）。其在交变变形条件下的阻尼系数等于0.2~0.5。

減震器的额定载荷及刚度数值列于表3-3中。

減震器的冲击刚度可取为动力刚度(1~1.5)倍。

KAC型橡胶金属減震器的 x_a 、 z_a 轴向刚度远小于 y_a 轴向的压缩刚度，因此減震器的布置如仅是在支承面上时，是保证不了舰艇纵横倾时，減震物体的必要稳定性，必须另在減震物体的侧向上另加推力減震器。

为了保护減震器在激烈振动时的拉伸变形不超过允许值（根据減震器的型号而有所不同），应采用位移限制器（推力減震器及位移限制器均可采用KAC型或圆筒型減震器）。

在选择減震器时，应尽可能的选择标准尺寸较小的減震器，因其具有较大的橡胶层厚度和拉伸破坏备用强度，具有更高的消音效能。

表 3-3

序 号	型 号	減震器 y_a 轴向 额定载 荷 (公斤)	減震器 x_a, y_a, z_a 轴 向的靜力刚度 (公斤/厘米)			減震器 x_a, y_a, z_a 轴 向的动力刚度 (公斤/厘米)		
			C'_{y_a}	C'_{z_a}	C'_{x_a}	C_{y_a}	C_{z_a}	C_{x_a}
			1	$KAC-1$	6	50	5	5
2	$KAC-2$	12	110	15	15	200	25	25
3	$KAC-3$	25	270	30	30	490	55	55
4	$KAC-4$	45	450	50	50	800	90	90
5	$KAC-5$	70	650	120	120	1150	210	230
6	$KAC-6$	100	870	160	170	1550	280	300
7	$KAC-7$	140	1100	200	210	1900	350	370
8	$KAC-8$	200	1900	280	300	3300	500	515
9	$KAC-9$	280	3100	400	370	5200	670	620
10	$KAC-10$	380	4200	450	420	6800	725	675
11	$KAC-11$	500	5500	520	520	8500	850	810
12	$KAC-12$	650	6900	720	680	10300	1070	1010

4. 非标准的双金属板 and 圆筒形減震器

对于舰艇主机付机及其设备(重量2吨以上)可采用额定载荷为500~2200公斤的非标准的双金属板式和圆筒形的減震器(图3-5)。

圆筒形減震器(型号151-B31)是由两金属套筒组成,外套筒带有支架用来固定于舰艇基座上,而内部套筒则以插入其内孔的专用销与被減震物体连接。

这些減震器的特性与 KAC 型減震器相同,其额定载荷及刚度数值如表3-4所示。

当此种类型減震器受到冲击振动时,其冲击刚度可取为(1.0~1.5)倍的动力刚度,其中小的数值相应为減震器变形速度小于1米/秒时。

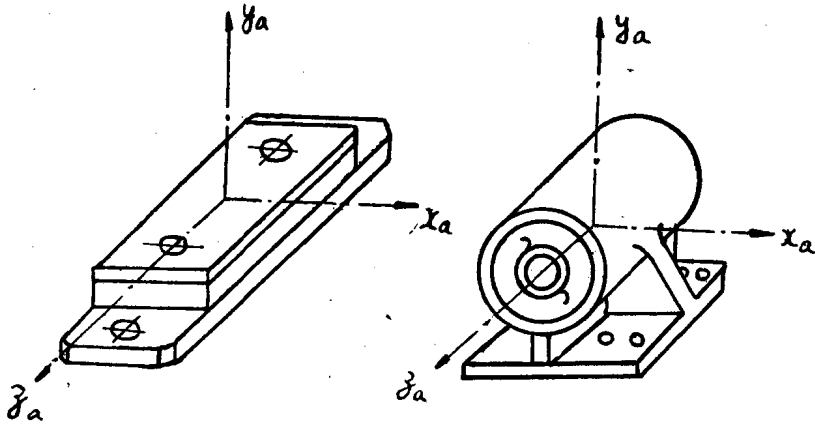


图 3-5 双金属板式和圆筒形减震器

表 3-4

序号	减震器图号	减震器形式	y_a 轴 向的 额定 静负 荷 (公 斤)	在额定负荷下 z_a, x_a, y_a 轴 向的 静力 刚度 (公斤/厘米)			z_a, y_a, x_a 轴 向 的 动力 刚度 (公斤/厘米)		
				$C_{y'a}$	$C_{z'a}$	$C_{x'a}$	C_{y_a}	C_{z_a}	C_{x_a}
1	151-B65	双金属板型	500	5600	600	650	10000	1250	1000
2	HN-12492	双金属板型	600	7800	800	750	12000	1300	1100
3	151-B62	双金属板型	750	12800	900	850	18000	2000	1750
4	HN-12491	双金属板型	950	16000	1100	1000	25000	2400	2000
5	151-B83	双金属板型	1150	17000	1250	1150	35000	2700	2500
6	151-B68	双金属板型	1450	22000	1800	1650	40000	3600	3200
7	151-B91	双金属板型	1750	26600	2100	1900	54000	4200	4900
8	027-B2728	双金属板型	1900	48000	3200	3000	60000	4800	4000
	027-B2730								
	027-B2732								
9	151-B86	双金属板型	2200	50000	2500	2260	78000	5300	4800
	151-B89								
10	151-B31	圆柱型	2300	28000	6200	28000	61000	12000	61000

減震器的阻尼系数约为0.15~0.25。

§ 3-3 減震原理：減震物体的自由振动

一、自由振动的一般情况

我们可以把減震的内燃机看作是與靜止的基座弹性联接的刚体。这一物体的形状、減震器的安装地位、其数目及減震器的弹性反力大小及方向，在一般情况下是不受限制的。显然，減震物体相对于靜止空间有六个运动自由度，即三个沿着坐标轴的重心位移和相对于同样坐标轴的三个回转运动。与此相应，減震物体可能发生六个自由度的振动。

实际的舰用減震设备一般不会具有这种六个自由度的复杂振动。然而，如果我们研究了一般情况下的振动问题，对于简单的单自由度和两自由度双牽連的振动，可以很容易的由一般情况下导演出来，也就是说，将之当作一般情况的特例来研究。

将所要讨论的減震物体考虑为刚体，以 M 代表其质量。将此刚体用 n 个減震器弹性地支持在舰艇基座上。取固定于舰艇上的直角坐标轴 x, y, z 的原点与物体在正常状态下（靜稳定状态）之重心位置相重合。坐标轴的方向与被減震物体的中心惯性主轴相重合。在大多数情况中，此坐标轴与舰艇的常用坐标轴，尤其是 y 轴相平行（图3-6）。

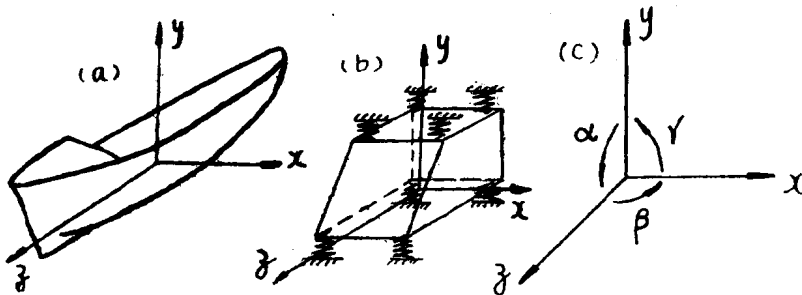


图 3-6 艦艇及物体的坐标轴

设減震物体的位移较小（不超过減震器弹性元件的弹性极限），因此由位移所发生的弹力与位移成正比例。若減震器本身比減震物体的尺寸小得多，则我们可以考虑每个減震器是集中在連接点上。因

此，減震器的任何彈性變形都可考慮為三個獨立的沿着主軸方向變形之和，而沒有任何回轉變形。這一假定使得計算得到很大的簡化。

當減震物體的重心沿坐標軸作微小正位移 u, v, w 和物體對此坐標軸轉動微小角度 α, β, γ ，時（見圖3-6B, C），如某個減震器連接點原來的坐標是 x_i, y_i, z_i ，則其位移將為：

$$\left. \begin{aligned} \text{沿 } x \text{ 軸 } \quad u_i &= u + z_i\beta - y_i\gamma \\ \text{沿 } y \text{ 軸 } \quad v_i &= v + x_i\gamma - z_i\alpha \\ \text{沿 } z \text{ 軸 } \quad w_i &= w + y_i\alpha - x_i\beta \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

如某個減震器在主軸方向的彈性係數為 C_x^i, C_y^i, C_z^i ，則減震器所產生的彈性力將是：

$$\left. \begin{aligned} F_{ix} &= C_x^i u_i = C_x^i (u + z_i\beta - y_i\gamma) \\ F_{iy} &= C_y^i v_i = C_y^i (v + x_i\gamma - z_i\alpha) \\ F_{iz} &= C_z^i w_i = C_z^i (w + y_i\alpha - x_i\beta) \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

包括有 n 個減震器的系統其位能為：

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n F_{ix} u_i + \sum_{i=1}^n F_{iy} v_i + \sum_{i=1}^n F_{iz} w_i \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n C_x^i (u + z_i\beta - y_i\gamma)^2 + \sum_{i=1}^n C_y^i (v + x_i\gamma - z_i\alpha)^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n C_z^i (w + y_i\alpha - x_i\beta)^2 \right] \end{aligned} \quad (3-3)$$

系統的動能為：

$$E_K = \frac{1}{2} M (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (J_x \dot{\alpha}^2 + J_y \dot{\beta}^2 + J_z \dot{\gamma}^2) \quad (3-4)$$

式中： M —減震物體的質量；

J_x, J_y, J_z —相對於坐標軸（即中心慣性主軸）的物體轉動慣量。

為了得出減震物體的運動方程式，可以利用拉格蘭日（Lagrange）方程式：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial E_n}{\partial q} = 0 \quad (3-5)$$

此处： q 和 q 为广义坐标 $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ 及其对时间的微分。

现在我们按全部六个坐标来求出拉格朗日方程式的各项：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{u}} \right) &= M \ddot{u}; & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\alpha}} \right) &= J_x \ddot{\alpha}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{v}} \right) &= M \ddot{v}; & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\beta}} \right) &= J_y \ddot{\beta}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{w}} \right) &= M \ddot{w}; & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\gamma}} \right) &= J_z \ddot{\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

$$\frac{\partial E_n}{\partial u} = \sum_{i=1}^n C_x^i (u + z_i \beta - y_i \gamma) = u \sum_{i=1}^n C_x^i + \beta \sum_{i=1}^n C_x^i z_i - \gamma \sum_{i=1}^n C_x^i y_i;$$

$$\frac{\partial E_n}{\partial v} = v \sum_{i=1}^n C_y^i + \gamma \sum_{i=1}^n C_y^i x_i - \alpha \sum_{i=1}^n C_y^i z_i;$$

$$\frac{\partial E_n}{\partial w} = w \sum_{i=1}^n C_z^i + \alpha \sum_{i=1}^n C_z^i y_i - \beta \sum_{i=1}^n C_z^i x_i;$$

$$\frac{\partial E_n}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n C_y^i (v - z_i \alpha + x_i \gamma) (-z_i) + \sum_{i=1}^n C_z^i (w - x_i \beta + y_i \alpha) (y_i)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^n (C_y^i z_i^2 + C_z^i y_i^2) - v \sum_{i=1}^n C_y^i z_i + w \sum_{i=1}^n C_z^i y_i -$$

$$- \gamma \sum_{i=1}^n C_y^i z_i x_i - \beta \sum_{i=1}^n C_z^i x_i y_i;$$

$$\frac{\partial E_n}{\partial \beta} = \beta \sum_{i=1}^n (C_x^i x_i^2 + C_z^i z_i^2) - w \sum_{i=1}^n C_z^i x_i + u \sum_{i=1}^n C_x^i z_i$$

$$- \alpha \sum_{i=1}^n C_z^i x_i y_i - \gamma \sum_{i=1}^n C_x^i y_i z_i$$

$$\frac{\partial E_n}{\partial \gamma} = \gamma \sum_{i=1}^n (C_x^i y_i^2 + C_y^i x_i^2) - u \sum_{i=1}^n C_x^i y_i + v \sum_{i=1}^n C_y^i x_i -$$

$$- \beta \sum_{i=1}^n C_z^i y_i z_i - \alpha \sum_{i=1}^n C_y^i z_i x_i$$

现在我们可以由拉格朗日方程式写出减震物体的运动方程式：