物理习题解答

Ⅱ

南京工学院

1983.5.

第十三章

13－1 在一匀强磁场中放有一横截面积为 1.2×10^{-3} 米²的铁心，设其中磁通为 4.5×10^{-3} 韦伯，铁的相对磁导率为 $\mu_r=5000$，求磁场强度。

解 $H=\dfrac{B}{\mu}=\dfrac{\varphi_B}{\mu S}=\dfrac{45\times10^{-3}}{12.57\times10^{-7}\times5\times10^{3}\times12\times10^{-4}}=598\ A/m$

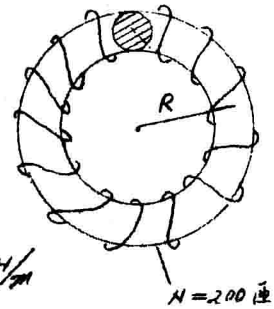
13－2 在平均半径为 0.10 米，横截面积为 6×10^{-4} 米²的铸钢圆环上，均匀地绕有200 匝线圈。当线圈内通入 0.63 安的电流时，钢环中的磁通量为 324 微韦；当电流增大至 4.7 安时，磁通为 618 微韦。求两种情况下钢环的磁导率。

解：$\because B=\mu nI \quad \therefore \varphi_B=\mu nIS$

则 $\mu=\dfrac{\varphi_B}{nIS}=\dfrac{\varphi_B}{NIS}\,l$

$\mu_1=\dfrac{3.24\times10^{-4}}{200\times0.63\times6\times10^{-4}}\times6.28\times0.1=2.7\times10^{-3}\ H/m$

$\mu_2=\dfrac{6.18\times10^{-4}}{200\times4.7\times6\times10^{-4}}\times0.628=6.89\times10^{-4}\ H/m$



13－3 在生产中，为了测试某种磁性材料的相对磁导率 μ_r 常将这种材料做成截面为矩形的环形样品，然后用漆包线绕成一环形螺线管。设圆环的平均周长为 0.10 米，横截面积为 0.5×10^{-4} 米²，线圈的匝数为 200 匝。当线圈通以 0.1 安的电流时测得穿过圆环横截面积的磁通为 6×10^{-5} 韦伯，计算此时该材料的相对磁导率 μ_r。

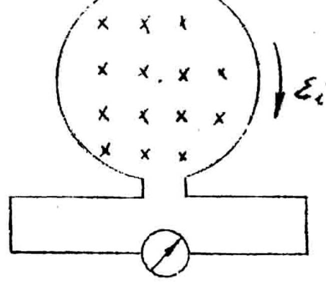
解：$\mu_r=\dfrac{B}{\mu_0 H}=\dfrac{\frac{\Phi}{S}}{\mu_0\frac{N}{l}I}=\dfrac{\Phi}{\mu_0\frac{N}{l}IS}=\dfrac{6\times10^{-5}}{12.5\times10^{-7}\times2\times10^{3}\times0.1\times5\times10^{-5}}$

$=478\times10^{3}$

第十四章

14－1 一长为0.4米的直导线，在一均匀磁场中作匀速直线运动，运动的方向与磁感强度的方向和导线都垂直，速率为2米/秒，已知B为6.0×10^{-3}特斯拉，求导线中的感应电动势。

解 $\mathcal{E}=Bl v\sin\theta=0.06\times0.4\times2=4.8\times10^{-2}V$



14－2 如图所示的线圈平面，穿过它的磁通量为Φ，在0.04秒内，由8×10^{-3}韦伯均匀地减少到2×10^{-3}韦伯。求线圈中的感应电动势。

解：$\mathcal{E}=-d\Phi/dt=-\dfrac{2\times10^{-3}-8\times10^{-3}}{0.04}=0.15V$ 方向如图

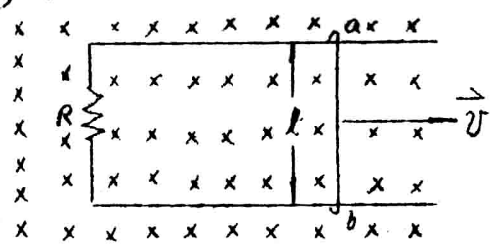
14－3 一铁心上绕有线圈100匝，已知铁心中磁通量与时间的关系为$\Phi=8\times10^{-5}\sin\pi t$韦，求在$t=1.0\times10^{-2}$秒时，线圈中的感应电动势。

解 $\mathcal{E}=-d\phi/dt=-N\dfrac{d\Phi}{dt}=-10^{2}\times8\times10^{-5}\times100\pi\cos100\pi t$

$=-8\pi\times10^{-1}\cos100\pi t(V)$

当$t=0.01S$时，$\mathcal{E}=-0.8\pi\cos\pi=0.8=2.51V$

14－4 在如图所示的回路中，ab是可移动的，设整个回路处在一均匀磁场中，$B=0.5$特，电阻$R=0.5$欧，长度$l=0.5$，$\overline{ab}$以速率$v=4.0$米/秒向右等速移动。问：(1)作用在$\overline{ab}$上的拉力F为多大？(2)拉力所作的功率N_1为多少？(3)感应电流消耗在电阻上的功率N为多少？



解：(1) $\mathcal{E}=Blv=0.5\times0.5\times4=1.0V$

$I=\mathcal{E}/R=1.0/0.5=2A$

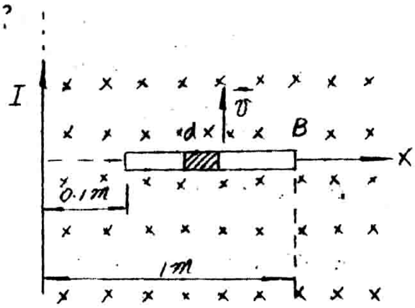
磁力$F_B=BIl$ ab作匀速运动。

所以外力 $F=F_B=BIl=0.5\times2\times0.5=0.5N$

(2) 拉力的功率 $N_1=Fv=0.5\times4=2W$

(3) 感应电流的功率 $N=I^2R=2^2\times0.5=2W$

14-5 如图所示，金属杆 AB 以等速 $v=2$ 米/秒平行于一长直导线移动，此导线通有电流 $I=40$ 安。问：此杆中的感应电动势为多少？杆的哪一端电势较高？



解: $B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{x}$ 在 AB 上取 dx 段

dx 段上的感应电动势

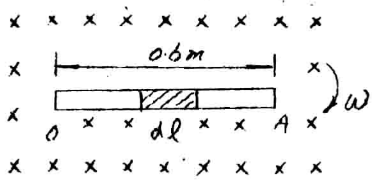
$$d\varepsilon=Bvdx=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{x}vdx$$

$$\therefore \varepsilon=\int_{AB}d\varepsilon=\int_{0.1}^{1}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2Iv}{x}dx$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot 2Iv\ln\frac{1}{0.1}=10^{-7}\times2\times40\times2\times\ln10=3.68\times10^{-5}V$$

A 端的电势较高。

14-6 如图所示，一水平金棒 OA 长 $l=0.60$ 米，在均匀磁场中绕通过端点 O 的铅直轴线旋转，转速为每秒 2 周。试求棒两端的电势差，棒的哪一端电势较高。设磁感强度为 4.14×10^{-3} 特斯拉。



解：取 dr 小段，其速率 $v=r\omega$

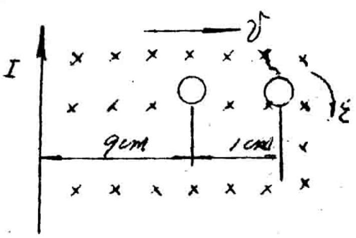
$$\therefore d\varepsilon=Bvdr=Br\omega dr$$

$$\varepsilon=\int_0^{0.6}B\omega r dr=B\omega\frac{1}{2}r^2\Big|^{0.6}$$

$$=41.4\times10^{-4}\times2\pi\times\frac{1}{2}\times0.36=36\times10^{-3}V$$

A 端的电势高

14-7 如图所示，一长直线中通有 $I=5$ 安的电流，在距导线 9 厘米处放一面积 0.1 厘米^2、10 匝的小圆线卷，线卷中的磁场可看作是均匀的。今在 1.0×10^{-2} 秒内把此线卷移



至长导线10厘米处。求：(1)线圈中平均感应电动势；(2)设线圈的电阻1.0×10^{-2}欧，求通过线圈横截面的感应电量。

解：$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r}=10^{-7}\times\frac{10}{r}=\frac{10^{-6}}{r}(T)$

$\therefore \varphi_1=NB_1S=10\times\frac{10^{-6}}{9\times10^{-2}}\times10^{-5}=\frac{1}{9}\times10^{-8}Wb$

$\varphi_2=NB_2S=10\times\frac{10^{-6}}{0.10}\times10^{-5}=\frac{1}{10}\times10^{-8}Wb$

所以(1) $|\bar{\varepsilon}|=\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|=(\frac{1}{9}-\frac{1}{10})\times10^{-8}\times\frac{1}{0.01}=1.11\times10^{-8}V$

方向如图，为顺时针方向

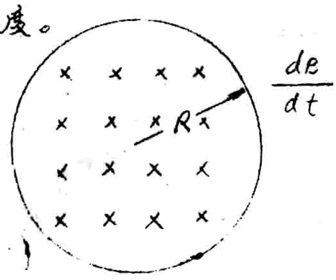
(2) $Q=\frac{1}{R}|\varphi_1-\varphi_2|=\frac{1}{0.01}\times(\frac{1}{9}-\frac{1}{10})\times10^{-8}=1.11\times10^{-8}C$

(或 $Q=\frac{\bar{\varepsilon}}{R}\Delta t=\frac{1.11\times10^{-8}}{0.01}\times0.01=1.11\times10^{-8}C$)

14－8 有一均匀磁场，磁感强度为B，B的量值以恒定的变化率dB/dt在变化。有一块质量为m的铜，用来拉成截面半径为r的导线，做成一个圆形回路(半径为R)。试证：这回路中的感应电流为

$$i=\frac{m}{4\pi\rho\delta}\frac{dB}{dt}$$

式中ρ为铜的电阻率δ为铜的密度。



解：面积为πR^2，长度为$2\pi R$

$m=\delta\cdot2\pi R\cdot\pi r^2=\delta2\pi^2Rr^2$

$\therefore \pi Rr^2=\frac{m}{2\pi\delta}$

电阻 $R_e=\rho\frac{2\pi R}{\pi r^2}=\rho\frac{2R}{r^2}$

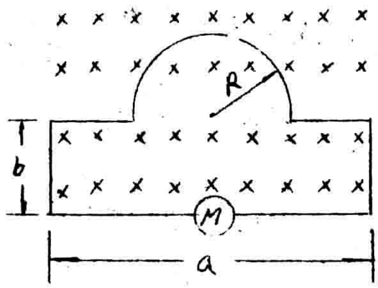
令磁通量为$\phi=\pi R^2B$ $\therefore \varepsilon=\pi R^2\frac{dB}{dt}$

$$I=\frac{\varepsilon}{R_e}=\frac{\pi R^2\frac{dB}{dt}}{\rho\cdot\frac{2R}{r^2}}=\frac{\pi Rr^2}{2\rho}\cdot\frac{dB}{dt}=\frac{m}{4\pi\rho\delta}\frac{dB}{dt}$$

－9 如图所示，用一根硬导线弯成半径为R的一个半圆。使这根半圆形导线，在磁感强度为B的匀强磁场中，以频率f

旋转。整个电路的电阻为R_G。求感应电流的最大值。

解：$\Phi=ab\cdot B+\frac{1}{2}\pi R^2\cos\theta B$



$$\therefore \varepsilon_x=\frac{d\Phi}{dt}=\frac{1}{2}\pi R^2B(-\sin\theta)\omega$$

$$=-\pi^2R^2Bf\sin\omega t$$

$$=\pi^2R^2Bf\sin(\omega t-\frac{\pi}{2})$$

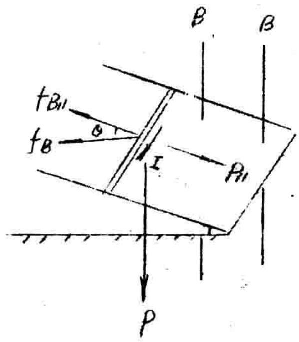
电压振幅为 $\varepsilon_m=\pi^2R^2Bf$

电流振幅为 $i_m=\pi^2R^2Bf/R$

频率为 f

14－10 如图所示，一长为l，质量为m的导体棒ab，其电阻为R，沿两条平行的导电轨道，无摩擦地滑下，轨道的电阻可忽略不计，轨道与导线构成一闭合回路。轨道所在的平面与水平面成θ角，整个装置放在均匀磁场中，磁感强度B的方向为铅直向上。试证：导体棒ab下滑时，达到稳定速度的大小为

$$v=\frac{mgR\sin\theta}{B^2l^2\cos^2\theta}$$



解：(a) $\Phi_B=l\cdot x\cdot B\cos\theta$

$$I=\frac{1}{R}\frac{d\Phi_B}{dt}=\frac{l^2B^2\cos\theta}{R}v$$

导线受到的磁力为

$$f_B=BIl=\frac{l^2B^2\cos\theta}{R}v$$

作匀速运动时，有 $f_{B\parallel}=P_\parallel$

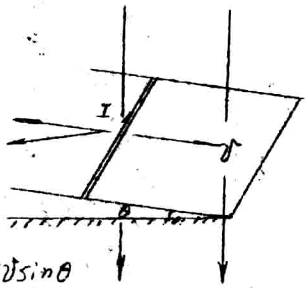
即 $mg\sin\theta=f_B\cos\theta=\frac{l^2B^2\cos^2\theta}{R}v$

$$\therefore v=\frac{mgR\sin\theta}{l^2B^2\cos^2\theta}$$

(b) 从能量守恒的观点，在匀速运动时，重力的功率为

$$Np = mgv\sin\theta$$

电阻上消耗的功率为



$$N_B = I^2R = \frac{l^2B^2\cos^2\theta}{R}v^2$$

$$\because N_p = N_B \quad \therefore \frac{l^2B^2\cos^2\theta}{R}v^2 = mgv\sin\theta$$

$$\therefore v = \frac{mgR\sin\theta}{B^2l^2\cos^2\theta}$$

(c) 若B指向向下，(不是向上)，其结论仍与上面一致，

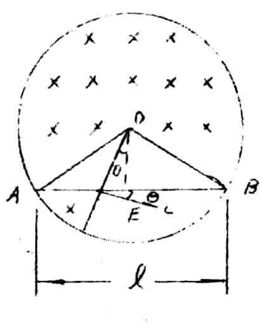
这是因为以楞次定律和安培力方向的判别，可以得出此时f_B 的方向仍然是水平向左，其它分析和(a)(b)的分析相同。

14－11 在圆柱形空间中存在着均匀磁场，B的方向与柱的轴线平行。若B的变化率为$dB/dt=0.10$特/秒，$R=10$厘米，问：在$r=5$厘米处的感应电场的电场强度为多大？

解：$B = \frac{1}{2}r\frac{dB}{dt} = \frac{1}{2}\times5\times10^{-2}\times0.1$

$$=2.5\times10^{-3}\ V/m$$

14－12 在半径为R的圆柱形空间中存在着均匀磁场，B的方向与柱的轴线平行。如图所示，有一长为l的金属棒放在磁场中，设B的变化率为dB/dt，试证：棒上感应电动势的大小为



$$\mathcal{E} = \frac{dB}{dt}\frac{l}{2}\sqrt{R^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

解法(1) $S_{OAB} = \frac{1}{2}l\sqrt{R^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$

$$\therefore \Phi = -B\cdot\frac{1}{2}l\sqrt{R^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2}l\sqrt{R^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}\,\frac{dB}{dt}$$

而在 OA 边上和 OB 边上，$\vec{E}\perp OA$，$\vec{E}\perp OB$，

$$\therefore \int_{\overline{OA}}\vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}=\int_{\overline{OB}}\vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}=0$$

即 $\mathcal{E}_{OA}=\mathcal{E}_{OB}=0$

$$\therefore |\mathcal{E}_{AB}|=|\varepsilon_i|=\frac{1}{2}l\sqrt{R^2-(\frac{l}{2})^2}\;\frac{dB}{dt}$$

解法(2) $\because \vec{E}\cdot\overrightarrow{dx}=E\cos\theta dx=\frac{1}{2}r\frac{dB}{dt}\cos\theta\, dx$

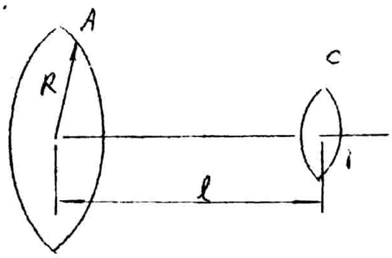
$$=\frac{1}{2}\frac{dB}{dt}\sqrt{R^2-(\frac{l}{2})^2}dx$$

$$\mathcal{E}=\int_{\overline{AB}}\vec{E}\cdot\overrightarrow{dx}=\int_{\overline{AB}}\frac{1}{2}\frac{dB}{dt}\sqrt{R^2-(\frac{l}{2})^2}dx=\frac{l}{2}\sqrt{R^2-(\frac{l}{2})^2}\frac{dB}{dt}$$

14－13 如图所示，A C 为两同轴的圆线圈，半径分别为 R 和 r，两线圈相距为 l，若 r 很小，可认为由 A 线圈在 C 中所产生的磁感强度是均匀的，求两线圈的互感系数。若 C 线圈匝数增加 N 倍，则互感系数又为多少？

解：设 A 中通有电流 I，则

A 在 C 处的磁感强度



$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+l^2)^{3/2}}$$

$$\therefore \Phi_0=BS=\frac{\mu_0 I R^2\cdot\pi r^2}{2(R^2+l^2)^{3/2}}$$

根据互感定义，有

$$M=\frac{\Phi_c}{I}=\frac{\mu_0\pi R^2r^2}{2(R^2+l^2)^{3/2}}$$

若 C 为 N 匝，则互感系数 M_1 为

$$M_1=\frac{N\Phi_c}{I}=\frac{\mu_0\pi N R^2 r^2}{2(R^2+l^2)^{3/2}}$$

14－14 一截面积为 8 厘米^2，长为 0.5 米，总匝数为 $N=1000$ 匝的空心螺线管，线卷中的电流均匀增大，每隔 1 秒增加 7.10 安。现把一个铜绕线的环套在螺线管上，求互感系数和环

内的感应电动势的大小。

解：设管内通有电流 I，则 $B=\mu_0 nI$

$$\Phi=BS=\mu_0\frac{N}{l}I\cdot S \quad \therefore 互感 M=\Phi/I=\mu_0\frac{N}{l}S$$

代入数据得：

$$M=12.57\times10^{-7}\times\frac{10^3}{0.5}\times8\times10^{-4}=2.01\times10^{-6}H=2.01\mu H$$

$$\mathcal{E}_M=-M\frac{dI}{dt}=-2.01\times10^{-6}\times0.1=-2.01\times10^{-7}V$$

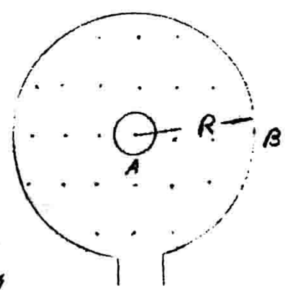
即感应电动势的大小为 $2.01\times10^{-7}V$

14－15 如图所示，一面积为4厘米²共50匝的小圆形线圈A放在半径为20厘米共100匝的大圆形线圈B的正中央，此两线圈同心且同平面，设A线圈内各点的磁感强度可看作是相同的。求（1）两线圈的互感系数；（2）当B线圈中电流的变化率为-50安/秒时，A线圈中的感应电动势的大小和方向。

解：（1）设B线圈中电流为 I，它在圆心处产生的磁感强度为

$$B=N_B\cdot\mu_0 I/2R$$

通过线圈A的磁通链数



$$\Psi_A=N_AN_B\frac{\mu_0 I}{2R}\cdot S$$

$$\therefore M=\frac{\Psi_A}{I}=\frac{\mu_0N_AN_BS}{2R}$$

$$=\frac{12.57\times10^{-7}\times5\times10^{3}\times4\times10^{-4}}{2\times0.2}=6.28\times10^{-6}H$$

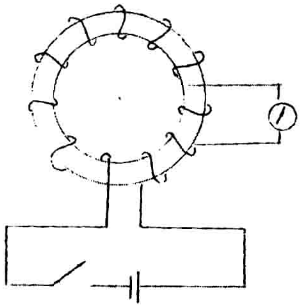
$$(2)\ \mathcal{E}_A=-M\frac{dI}{dt}=6.28\times10^{-6}\times50=3.14\times10^{-4}V$$

14－16 如图所示，环形螺线管A中充满了铁磁质，管的截面积S为2厘米²，沿环每厘米绕有100匝线圈，通有电流 $I_1=4.0\times10^{-2}$ 安，在环上再绕一线圈C共10匝，其电阻为0.10欧，今将电键K突然开启，测得线圈C中的感应电量为 2.0×10^{-2} 库仑，求：当螺线管中通有电流 I_1 时，铁磁质中的B和铁磁质的相

对磁导率 μ_r。

解：$B = \mu_0 \mu_r n_1 I_1 \qquad \psi = N_2 B S$

$$q = -\frac{1}{R}\Delta\psi = \frac{1}{R}(\psi - 0) = \frac{\psi}{R}$$



$\therefore qR = N_2 B S$

$$B = \frac{qR}{N_2 S} = \frac{2\times10^{-3}\times10^{-1}}{10\times2\times10^{-4}} = 0.10T$$

$\because B = \mu_0 \mu_r n_1 I_1$

$$\therefore \mu_r = \frac{B}{\mu_0 n_1 I_1} = \frac{0.1}{12.57\times10^{-7}\times10^{4}\times4\times10^{-2}} = 1.99\times10^{2}$$

16－17 在长为 0.60 米，直径为 5 厘米的圆纸筒上，应绕多少匝线圈才能使绕成的螺线管的自感为 6.0×10^{-3} 亨利。

解：$\because L = \mu_0 n^2 V = \mu_0 (\frac{N}{l})^2 \cdot l \cdot \frac{1}{4}\pi D^2 = \mu_0 N^2 \frac{\pi D^2}{4l}$

$$\therefore N^2 = \frac{4lL}{\mu_0 \pi D^2} = \frac{4\times0.6\times6\times10^{-3}}{12.57\times10^{-7}\times\pi\times25\times10^{-4}} = 1.46\times10^{6}$$

$\therefore \quad N = 1.21\times10^{3}$

16－18 有一个线圈，自感系数是 1.2 亨利，当通过它的电流在 1/200 秒内，由 0.5 安均匀地增加到 5 安时，产生的自感电势是多大？

解：$$\mathcal{E}_i = -L\frac{dI}{dt} = -1.2\times\frac{5-0.5}{\frac{1}{200}} = -1.08\times10^{3}V$$

即自感电动势的大小为 $1.08\times10^{3}V$

14－19 一空心长直螺线管，长为 0.5 米，横截面积为 10 厘米^2，若螺线管上密绕线圈 3000 匝，问：(1) 自感系数为多大？(2) 若其中电流随时间的变化率为每秒增加 10 安，自感电动势的大小和方向如何？

解：(1) $\because L = \mu_0 n^2 V$

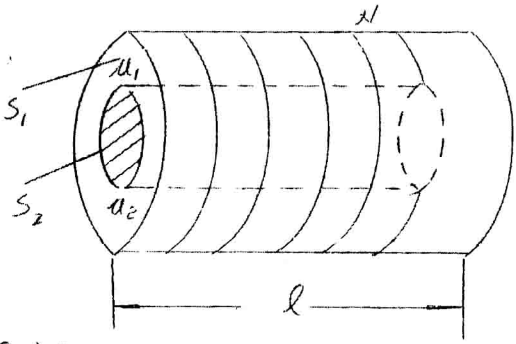
$$\therefore L = 12.57\times10^{-7}\times6^2\times10^{6}\times5\times10^{-4} = 2.26\times10^{-2}H$$

(2) $$\mathcal{E}_i = -L\frac{dI}{dt} = -2.26\times10^{-2}\times10 = -0.226V$$

14－20 要使自感为100毫亨的线圈中产生100伏的自感电动势必须让线圈中的电流怎样变化？

解：$\left|\frac{dI}{dt}\right|=\left|\frac{\varepsilon_i}{L}\right|=100/100\times10^{-3}=1000A/S$

4－21 如图所示，螺线管的管心是两个套在一起的同轴圆柱体，其截面积分别为S_1和S_2，磁导率分别为μ_1和μ_2，管长为l，匝数为N，求螺线管的自感系数。（设管的截面很小）。



解：两介质中的B分别为

$B_1=\mu nI$

$B_2=\mu_2 nI$

$\therefore \Phi=(B_1S_1+B_2S_2)N$

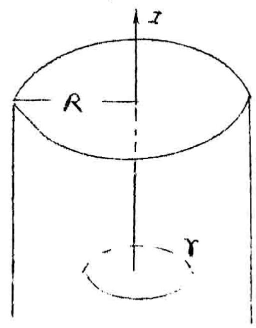
$=(\mu_1\frac{N^2}{l}S_1+\mu_2\frac{N^2}{l}S_2)I$

$\therefore L_1=\Phi/I=\frac{N^2}{l}(\mu_1S_1+\mu_2S_2)=\mu_0\frac{N^2}{l}(\mu_{r_1}S_1+\mu_{r_2}S_2)$

14－22 一螺线管的自感系数为10毫亨，通过它的电流为4安，试求它贮藏的磁场能量。

解：$W_m=\frac{1}{2}L_1I^2=\frac{1}{2}\times10^{-2}\times16=8\times10^{-2}J$

14－23 一无限长直导线，截面各处的电流密度相等，总电流为I。试证：每单位长度导线内所储存的磁能为$\mu_0I^2/16\pi$。



解：电流密度 $\delta=I/\pi R^2$

在r处的磁感强度为

$B=\frac{\mu_0\delta}{2}r=\frac{\mu_0}{2}\frac{I}{\pi R^2}r$

单位长度导线贮存的磁能

$W_m=\int_0^R\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}2\pi rdr$

$=\int_0^R\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mu_0}\frac{\mu_0^2}{4}\cdot\frac{I^2}{\pi^2R^4}r^2\cdot2\pi r=\int_0^R\frac{\mu_0}{4}\frac{I^2}{\pi R^4}\cdot r^3dr=\frac{\mu_0}{16\pi}I$

14－24 在真空中，若一均匀电场中的电场能量密度与一0.50特的均匀磁场中的磁场能量密度相等，该电场的电场强度为多少？

解：$\because w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad w_m=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$

$\therefore \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \qquad E=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}B=1.5\times10^{8}\ V/m$

第十五章 振动习题

15－1 有一个弹簧振子，振幅A为$2\times10^{-2}m$，周期T为1S，初相φ为$3\pi/4$。试写出它的振动方程，并作出$x-t$图，$v-t$图和$a-t$图

解：已知：$A=2\times10^{-2}m$，$T=1S$，$\varphi=\frac{3\pi}{4}$，

$\therefore \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi S^{-1}$

则振动方程为 $x=2\times10^{-2}\cos(2\pi t+\frac{3}{4}\pi)m$

15－2 若谐振动方程为 $x=0.1\cos(20\pi t+\frac{\pi}{4})m$，求

(1) 振幅、频率，角频率、周期和初相；

(2) $t=2S$时的位移，速度和加速度。

解．已知 $x=0.1\cos(20\pi t+\frac{\pi}{4})m$

$\therefore$ (1) $A=0.1m$ $\omega=20\pi S^{-1}$，$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=10Hz$ $\varphi=\frac{\pi}{4}$

(2) $t=2S$时

$x=0.1\cos(40\pi+\frac{\pi}{4})=0.1\cos\frac{\pi}{4}=7.07\times10^{-2}m$

$v=-2\pi\sin(40\pi+\frac{\pi}{4})=-2\pi\times\sin\frac{\pi}{4}=-4.44\ m/s$

$a=-40\pi^2\cos(40\pi+\frac{\pi}{4})=-40\pi^2\times\cos\frac{\pi}{4}=-280\ mS^{-2}$

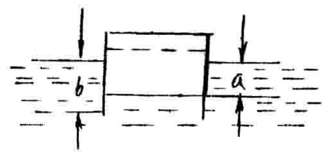
15－3 设四个人的质量共为250Kg，进入汽车后把汽车的弹簧压下$5.0\times10^{-2}m$。若该汽车弹簧共负担1000Kg的质量，求

该汽车的固有频率：

解：由 $k=\frac{F}{x}=\frac{250\times9.8}{5.0\times10^{-2}}=4.9\times10^{4}N\,m^{-1}$

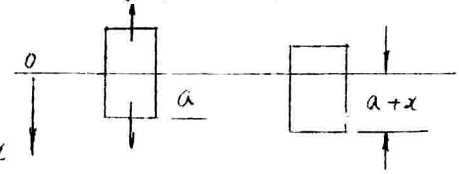
$$\therefore \nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4.9\times10^{4}}{1000}}=\frac{7}{2\pi}=1.11Hz$$

15－4 一立方形木块浮于静水中，其浸入部分的高度为 a。今用手指沿竖直方向将其慢慢压下，使其浸入部分的高度 b，然后放手使其运动。试证明，若不计水对木块的粘滞阻力，木块的运动是谐振动，并求出振动的周期和振幅。



题 15－4

解：



当木块静止时，浮力 F＝重力 P，即 $Sag=mg$（S为木块的截面积）

$\therefore m=Sa$

若木块压入水中，离平衡位置的位移为 x

则有 $m\ddot{x}=mg-S(a+x)g=-Sgx$，即 $k=Sg$

故木块作谐振动，其振动周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{Sa}{Sg}}=2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

$\because t=0 \quad x_0=b-a \quad v_0=0$

$$\therefore A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=b-a$$

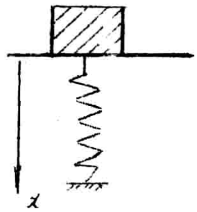
15－5 在一平板下装有弹簧，平板上放一质量为 1.0kg 的重物。若使平板在竖直方向作上、下谐振动，周期为 0.50S，振幅为 $2.0\times10^{-2}m$，求：

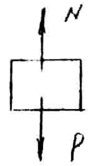
(1) 平板到最低点时，重物对平板的作用力；

(2) 若频率不变，则平板以多大的振幅振动时，重物跳离平板；

(3) 若振幅不变，则平板以多大的频率振动时，重物跳离平板。

解.(1) 平板到最低点时，





$x = 2.0\times10^{-2} m$

$a = -\omega^2 A = -\left(\frac{2\pi}{0.5}\right)^2 \times 2.0\times10^{-2}$

$= -0.32\pi^2 m s^{-2}$

$\because P - N = ma$

$\therefore N = P - ma = m(g-a) = 1.0\left[9.8-(-0.32\pi^2)\right] = 12.96 N$

故重物对平板的作用力 $N' = 12.96 N$

(2) 重物跳离平板 $N = 0$ $\therefore P = ma = m\omega^2 A$

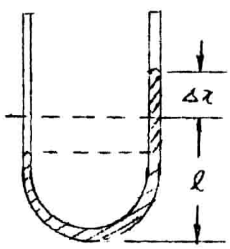
若频率不变由上式得 $A = \frac{P}{m\omega^2} = \frac{9.8}{1\times16\pi^2} = 6.2\times10^{-2} m$

(3) 若振幅不变，由 $P = m\omega^2 A$ 可得

$$\omega = \sqrt{\frac{P}{mA}} = \sqrt{\frac{g}{A}}$$

$$\therefore \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.8}{2.0\times10^{-2}}} = \frac{5}{\pi}\sqrt{4.9} = 3.52 Hz$$

15-6 在U形管中，注入水银，其密度为ρ，高度为l，管的截面积为S，今使水银上、下振动，求振动的周期（设水银与管壁的摩擦略去不计）。



解：设管的半径为r，直径为$d=2r$

则管的截面积为

$$S = \pi r^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$$

如图Δx为相对于平衡位置的位移

$m_1 = \rho V_1 = \rho S(2\Delta x)$

$\therefore f = -2\rho g S\cdot\Delta x$ $f = -Kx$

得 $K=2\rho gS$ 又已知 $m=\rho V=\rho S(2l)$

故 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{2\rho gS}}=2\pi\sqrt{\frac{2\rho Sl}{2\rho gS}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

15－7 一物体放置在平板上，此板沿水平方向作谐振动，已知振动频率为2Hz，物体与板面的最大静摩擦系数为0.5，问：要使物体在板上不发生滑动，最大振幅是多少？

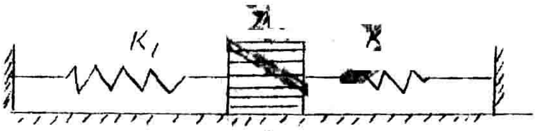
解：$ma_{max}=\mu mg$ 或 $m\omega^2A=\mu mg$

$\therefore A=\frac{\mu g}{\omega^2}=\frac{\mu g}{(2\pi\nu)^2}=\frac{\mu g}{16\pi^2}=\frac{0.5\times9.8}{16\pi^2}=3.1\times10^{-2}m$

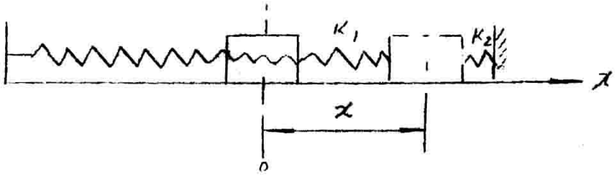
15－8 证明图示的振动系统的振动频率为

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_1+K_2}{m}}$$

式中 K_1，K_2 分别为两个弹簧的倔强系数，m 为物体的质量



证：



如图取平衡位置为坐标原点，选x轴向右为正，当物体的位移为x时，弹簧对它的作用力为

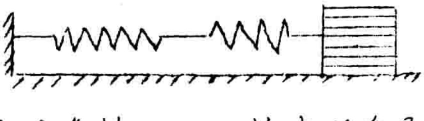
$f_1+f_2=-k_1x-k_2x=-(k_1+k_2)x$

所以沿x方向有 $m\ddot{x}=-(k_1+k_2)x$

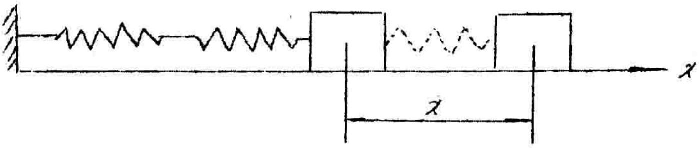
得物体作谐振动的频率 $\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$

15－9 证明图示的振动系统的振动频率为

$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_1K_2}{(K_1+K_2)m}}$



式中：K_1，K_2 分别为两个弹簧的倔强系数，m 为物体的质量



证：选坐标如图所示，设两弹簧分别伸长 x_1，x_2，则有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x \\ k_1 x_1 = k_2 x_2 \end{cases}$$

解以上两式可得 $x_1 = \dfrac{k_2 x}{k_1 + k_2}$

由运动方程 $m\ddot{x} = f$ 即 $m\ddot{x} = -k_1 x_1 = -\dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x$

得 $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}$

15－10　有一水平放置的弹簧在[redacted]到 1N 的力作用时，伸长 5.0×10^{-2} m。现在此弹簧[redacted]量为 0.064 kg 的物体，并拉长 0.10 m[redacted]其振动[redacted]此弹簧振子作谐振动时的周期，最[redacted]。

解：由 $k = \left|\dfrac{f}{x}\right| = \dfrac{1}{5\times10}$　$20\ N m^{-1}$

则 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{0.064}{20}} = 2\pi\times10^{-2}\sqrt{32} = 0.355 S$

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{20}{0.064}} = \sqrt{3.12\times10} = 17.7 S^{-1}$

$\therefore v_{max} = A\omega = 0.1\times17.7 = 1.77\ m s^{-1}$

$a_{max} = A\omega^2 = 0.1\times(17.7)^2 = 31.3\ m S^{-2}$

15－11 一放置在水平桌面上的弹簧振子，振幅 $A = 2.0\times10^{-2}$ m

周期 $T = 0.50 S$。当 $t = 0$ 时

（1）物体在正方向的端点；

（2）物体在负方向的端点，

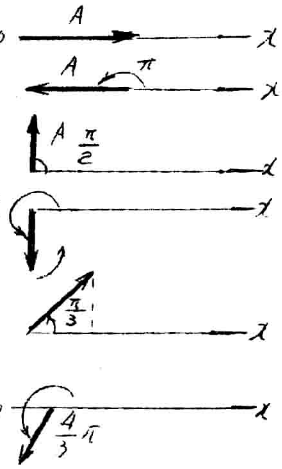
（3）物体在平衡位置，向负方向运动；

（4）〃〃〃〃〃〃〃，向正〃〃〃〃；

（5）物体在 $x = 1.0\times10^{-2}$ m 处，向负方向运动；

(6) 物体在 $x=-1.0\times10^{-2}$ 处，向正方向运动。

求以上各种情况的振动方程。



解：(1) $\varphi=0$，$x=2\times10^{-2}\cos4\pi t\ m$。

(2) $\varphi=\pi$，$x=2\times10^{-2}\cos(4\pi t+\pi)\ m$

(3) $\varphi=\frac{\pi}{2}$，$x=2\times10^{-2}\cos(4\pi t+\frac{\pi}{2})\ m$

(4) $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ $x=2\times10^{-2}\cos(4\pi t+\frac{3\pi}{2})\ m$

(5) $\varphi=\frac{\pi}{3}$ $x=2\times10^{-2}\cos(4\pi t+\frac{\pi}{3})\ m$

(6) $\varphi=\frac{3}{4}\pi$ $x=2\times10^{-2}\cos(4\pi t+\frac{4}{3})\ m$

15-12 音叉的一端作谐振的频率为 1.0×10^{3} Hz，振幅为 0.40 mm（忽略阻尼），求（1）端点振动的最大速度和最大加速度；（2）当位移为 0.20 mm 时的速度和加速度。

解：(1) $v_{max}=A\omega=0.40\times10^{-3}\times2\pi\times10^{3}=2.51\ m/s$

$$a_{max}=A\omega^2=2.51\times2\pi\times10^{3}=1.58\times10^{4}\ m/s^2$$

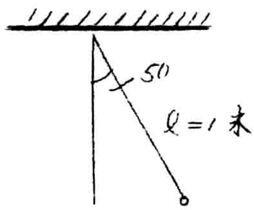
(2) ∵ $x=A\cos(\omega t+\varphi)$，当 $x=0.20\ mm=\frac{1}{2}A$ 时

$$\cos(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}\qquad\therefore(\omega t+\varphi)=\pm\frac{\pi}{3}$$

$$v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)=-2.51\sin(\pm\frac{\pi}{3})=\mp2.18\ m/s$$

$$a=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)=-1.58\times10^{4}\times\frac{1}{2}=-7.9\times10^{3}\ m/s^2$$

15-13 有一单摆的摆长为1米，最大的摆角为 5°，如图所示



(1) 求摆的角频率和周期；

(2) 设开始时，摆角最大，试写出此单摆的振动方程

(3) 当摆角为 3° 时的速度为若干？

解：(1) $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{1}{9.8}}=\frac{2\pi}{3.13}=2.0\ S$