全国工商管理硕士入学考试辅导教材

MBA 数学

（上 册）

张天德　王　玮　孙爱珍　编著

山东大学

全国工商管理硕士入学考试辅导教材

MBA 数 学

（上 册）

张天德 王 玮 孙爱珍 编著

山 东 大 学

前　言

自 1997 年工商管理硕士实行全国联考以来，报考人数逐年增加。为了帮助考生在短时间内系统地复习数学知识，掌握重点，熟悉联考命题的内容，掌握解题方法和技巧，应广大考生的要求，根据教育部新修订的全国工商硕士研究生入学考试数学考试大纲编写了这本书。

本书是根据编者近几年来从事 MBA 数学考前辅导的教学经验编写而成的。尤其是通过 1999 年在山东建筑工程学院举办的 MBA 考前辅导班及 2000 年在济南新起点学校 MBA 考前辅导班两届应考学生的使用，学生们数学单科成绩十分理想，从而印证了本书的针对性强、选材紧扣联考大纲，在 MBA 联考辅导书中属佼佼者。使本书无论是在基本内容的讨论，还是题目的选择上更趋成熟。

本书共四篇，分上、下两册。上册为初等数学和微积分；下册为线性代数和概率论。第一篇为初等数学，分为四章，内容包括：代数基础知识，方程(组)，不等式(组)，数列、排列、组合、二项式定理。第二篇为微积分，分为四章，内容包括：函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，多元函数微分学。第三篇为线性代数，分为四章，内容包括：行列式，矩阵，向量，线性方程组。第四篇为概率论，分为三章，内容包括：随机事件和概率，随机变

量及其分布，随机变量的数字特征。每章包括五部分：一、考试内容与要求；二、内容提要；三、例题；四、习题；五、习题答案及提示。书中典型例题是仿照考试试题的形式与结构而编选的，例题解法中注重思路、方法与技巧，并随时指出解题过程中容易出现的错误。

编写本书的目的有两个：一是作为报考 MBA 研究生入学数学的复习用书；二是本书也可供各类高等学校的教师从事科研和学生学习的参考用书。

本书由张天德、王玮、孙爱珍编著。在编写过程中得到了山东大学数学与系统科学学院有关领导和老师的支持与帮助，本书的出版得到济南新起点学校可真箴校长的大力支持，在此谨向他们表示衷心地感谢！

限于水平，书中难免有疏漏和错误，欢迎读者批评指正。

编　者

2001 年 4 月

下　册

线性代数

概　率　论

目　　录

第一篇　初等数学

第二篇　微　积　分

第三篇 线性代数

第四篇 概 率 论

第一篇　初等数学

第一章　代数基础知识

一、考试内容与要求

1. 理解绝对值的概念，掌握绝对值的运算法则.

2. 掌握比和比例的概念及它们的性质，会计算百分比的应用题.

3. 掌握平均值公式，会计算 n 个数的算术平均值和几何平均值，掌握平均值不等式.

4. 了解代数式的基本概念，掌握整式和分式的运算.

二、内容提要

（一）绝对值

1. 绝对值的定义　正数的绝对值是它本身；负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零. 用公式表示为：

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

2. 绝对值的几何意义　在数轴上，绝对值表示实数的点到原点的距离. 例如：$|3|$ 是在数轴上表示 3 的点到原点的距离；$|x-3|$ 是在数轴上表示 x 的点，到表示 3 的点之间的距离.

3. 绝对值的性质

(1) 非负性　$|a| \geqslant 0$，当且仅当 $a = 0$ 时等号成立.

(2) 对称性　$|-a|=|a|$

(3) 运算性

① $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

② $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$　$(b\neq 0)$

③ $|a^n|=|a|^n$　$(n\in N)$

④ $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$　当且仅当 $a\geqslant 0$ 时右边等号成立，$a\leqslant 0$ 时左边等号成立.

⑤ $||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$，当且仅当 $ab\geqslant 0$ 时右边等号成立，$a\leqslant 0$ 时左边等号成立.

推广到 n 个数则有：

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

4. 三个重要的非负实数及性质

(1) $|a|\geqslant 0$

(2) $a^2\geqslant 0$

(3) $\sqrt{a}\geqslant 0$　$(a\geqslant 0)$

性质　几个非负数之和为 0 的充要条件是它们全为 0.

(二) 比、比例

1. 比的定义　a 除以 $b(b\neq 0)$ 称 a 比 b，记作 $a:b$ 或 $\frac{a}{b}$，$\frac{a}{b}$ 也叫比值. 当比值用百分号表示时，称为百分比.

2. 比的性质　$a:b=ma:mb$　$(m\neq 0)$

$a:b:c=ma:mb:mc$　$(m\neq 0)$

3. 比例的定义　两个比相等时，称四个量成比例. 记作 $a:b=c:d$ 或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. a、d 称为比例外项，b、c 称为比例内项.

若 $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$，即 $x^2=ab$，则 x 叫做 a、b 的比例中项. 任何同号的二数都有两个比例中项：$x=\pm\sqrt{ab}(ab>0)$，它也叫 a、b 的等

比中项．特别地，$\sqrt{ab}$ 也叫 a、b 的几何平均值．

4. 比例的性质

(1) 基本性质　　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$

故成比例的量也称等积量．

(2) 性质

更比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

反比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

合比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

分比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

合分比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$

等比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$

5. 解应用题的基本知识　有关百分比试题以应用题为主．在求解过程中最主要的是准确理解题意，合理选择正确的方法，准确寻找每一个百分比的标准量，尽量简捷地得出答案．

常用解应用题的方法有：

(1) 穷举法　对讨论对象加以分类，使问题简化．

(2) 图解法　用图形表示题目，便于理解题意，发现隐含条件，找到解题途径．

(3) 转化法　将题中条件加以转化，或重新组合，以便于得到清晰的解题思路．

(4) 代数法　通过设未知量找等式关系得到方程．

(5) 逆推法　假设某结论正确，通过推导判断是否与题目条件吻合．

另外，还有归纳法、综合法也常用于解应用题．

(三) 平均值

1. 定义

(1) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个数,称 $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ 为这 n 个数的算术平均值,记作 $\overline{x}$,即 $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

(2) 当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个大于零的数时,称 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n}$ 为这 n 个正数的几何平均值,记作 $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$.

当 $n = 2$ 时,称两正数 x_1, x_2 的几何平均值 $\sqrt{x_1 x_2}$ 为比例中项,即

$$x_1 : \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{x_1 x_2} : x_2$$

(3) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个数,称 $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$ 为这 n 个数的平方平均值.

2. 有关平均值不等式的结论

(1) 若 $a, b \in R$,则 $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. 当且仅当 $a = b$ 时,等号成立.

(2) 若 $a, b \in R^+$ 时,则

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

当且仅当 $a = b$ 时,等号成立.

(3) 若 $a, b, c \in R^+$,则 $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$. 当且仅当 $a = b = c$ 时,等号成立.

(4) 当 $a, b, c \in R^+$ 时,有

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leqslant \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

(5) 当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正数时，它们的算术平均值不小于它们的几何平均值，即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

也就是 $$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时，等号成立．

(四) 代数式

1. 代数式的定义(略)

2. 代数式的运算法则

(1) 幂的运算法则

$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \quad (m, n \in \mathbf{Z})$

$(x^m)^n = x^{mn} \quad (m, n \in \mathbf{Z})$

$(xy)^n = x^n \cdot y^n \quad (m, n \in \mathbf{Z})$

$(\frac{x}{y})^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (m, n \in \mathbf{Z}, y \neq 0)$

$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad (m, n \in \mathbf{Z}, x \neq 0)$

(2) 乘法公式

$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$

$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$

$(x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2) = x^3 \pm y^3$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

三、例　　题

（一）填空题

1. 化去下列各式中的根号及绝对值号：

(1) $\sqrt{(a-b)^2} =$ __________；

(2) $\sqrt{2^{2x} - 2^{x+1} + 1} =$ __________；

(3) $|x+2| + |x-3| =$ __________；

(4) $|x+2| + |x-3| - 2x + 1 =$ __________.

分析

(1) 原式 $= |a-b| = \begin{cases} a-b, & a \geqslant b \\ b-a, & a < b \end{cases}$

(2) 原式 $= |2^x - 1| = \begin{cases} 2^x - 1, & x \geqslant 0 \\ 1 - 2^x, & x < 0 \end{cases}$

(3) 原式 $= \begin{cases} 1-2x, & x < -2 \\ 5, & -2 \leqslant x < 3 \\ 2x-1, & x \geqslant 3 \end{cases}$

(4) 原式 $= \begin{cases} 2-4x, & x < -2 \\ 6-2x, & -2 \leqslant x < 3 \\ 0, & x \geqslant 3 \end{cases}$

2. 若 $|x-3| + (2-y)^8 = 0$，则 $x^y =$ __________.

分析　由绝对值和偶次乘方的非负性可知

$|x-3| = 0$ 且 $(2-y)^8 = 0$，即 $x = 3, y = 2$

则 $x^y = 3^2 = 9$

3. 某商场九折会使销售量增加 20%，则这一折扣会使销售额增加__________.

分析　本题考查百分比的概念和应用，需了解销售额是销售量与单价之积，求出打折后的销售额，再按百分比的概念求出增加的百分比.

设打折前该商品的单价为 a，打折前该商品的销售量为 b，则打折前该商品的销售额为 ab.

由题意知打折后的销售额为

$$a \cdot 90\% \cdot b \cdot 120\% = ab \cdot 108\%$$

销售额增加的百分比为

$$\frac{108ab - 100ab}{100} \div ab = 8\%$$

故应填 8%.

4. 已知 $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$，则 $\frac{3x + 2y}{3x - 2y} =$ ______.

分析　因为 $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$，所以 $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$　（更比定理）

则 $\frac{3}{2} \cdot \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5}$，从而 $\frac{3x}{2y} = \frac{9}{10}$

故 $\frac{3x + 2y}{3x - 2y} = \frac{9 + 10}{9 - 10} = -19$　（合分比定理）

故应填 -19.

5. 已知 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$，$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$，则 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} =$ ______.

分析

由 $0 = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz}$ 可得：

$$ayz + bxz + cxy = 0$$

从而

$$\begin{aligned}&\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \\ &= \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac}\right) \\ &= 1 - \frac{2}{abc}(ayz + bxz + cxy) = 1\end{aligned}$$

故应填 1.

6. 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的几何平均值为 3，而前 $n-1$ 个数的几何平均值为 2，则 $x_n=$ ______.

分析 由题意可得

$$\begin{cases}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}=3\\ \sqrt[n-1]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_{n-1}}=2\end{cases}\quad 也即\quad \begin{cases}x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n=3^n\\ x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_{n-1}=2^{n-1}\end{cases}$$

两式相除得 $x_n=\dfrac{3^n}{2^{n-1}}=2(\dfrac{3}{2})^n$

故应填 $2(\dfrac{3}{2})^n$.

（二）**选择题**

1. 若 $\sqrt{(a-60)^2}+|b+90|+(c-130)^{10}=0$，则 $a+b+c=$

(A) 0 (B) 280 (C) 100 (D) -100

分析 由已知条件得 $a=60,b=-90,c=130$

所以 $a+b+c=100$

故应选(C).

2. $|x-3|+|y+2|=2$，则整数对 (x,y) 有几对

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

分析 由已知条件知 $|x-3|\geqslant 0,|y+2|\geqslant 0$ 且为整数

所以有

$$\begin{cases}|x-3|=0\\ |y+2|=2\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}|x-3|=1\\ |y+2|=1\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}|x-3|=2\\ |y+2|=0\end{cases}$$

可解得 8 对数满足等式.

故应选(D).

3. 若 $|3-x|+|x-2|<m$ 的解集为 $x\in\phi$，则 m 的可取值范围是

(A) $m<1$ (B) $m\leqslant 1$