

非 Abel 规范理论中形状因子 高能行为的六阶计算

吴 詠 时 戴 元 本

(中国科学院物理研究所)

摘 要

非 Abel 规范场理论, 作为电磁场理论的一种推广, 近年来在基本粒子理论研究
中颇受人们注意。它已被用来构造统一弱——电磁作用以及强作用的模型。研究非
Abel 规范场的性质, 对于研究基本粒子的内部结构具有相当的意义。本文是研究非
Abel 规范场理论中形状因子的高能行为, 它反映粒子在短距离的性质。我们计算了
非 Abel 规范理论中费米子形状因子的高能行为至微扰论的第六阶。在计算中找到了
一些处理办法和检验判据以保证在分离有领头贡献的积分区域时既不发生重叠, 又
不出现遗漏。计算结果表明: 只取领头对数项, 形状因子的规范群标量部分是指数
化的, 但是它的规范群矢量部分不是指数化的, 破坏指数化的项从第六阶开始出现。
由于领头项是由规范场的红外行为所决定的, 本文的结果对弄清非 Abel 规范场理论
的红外结构也有一定的意义。

一、

从强子是有结构的观点来看, 研究强子的电磁形状因子, 对于了解组成强子的层子之间的
相互作用(超强作用)有着重要的意义。由于超强作用是一种很强烈的作用, 按照量子场论, 层
子本身也具有超强作用的重整化效应所造成的形状因子。强子的电磁形状因子, 就是由层子
在强子内的运动和分布(束缚态波函数)以及这种层子本身的形状因子共同决定的。此外, 层
子发射超强作用胶子的形状因子的高能行为, 可以反映超强作用的一些短距离性质, 对于研究
层子的动力学亦颇重要。为了探索超强作用, 我们决定比较系统地对各种类型的可重整化
场论研究费米子的形状因子。

在对赝标或标量耦合理论^[1]、Abel 规范(矢量耦合)理论^[2]进行了研究之后, 我们转向了非
Abel 规范理论。在近年来基本粒子理论研究中, 它是受人们注意的一个方向。除了用来构造
弱——电磁作用统一模型外, 用非 Abel 规范场来构造超强作用模型也引起了人们很大的兴
趣。进一步研究非 Abel 规范理论, 对于探讨超强作用和层子的动力学, 已成为不可忽视的一
个方面。这里, 我们对非 Abel 规范理论中形状因子的高能行为进行了微扰论六阶计算(在资料
[3]中我们报告过四阶计算结果)。

非 Abel 规范理论中的质壳形状因子, 当规范介子的质量 $\mu \rightarrow 0$ 时, 有红外发散; 因而, 不能象赝标理论^[1]那样直接用齐次 Callan-Symanzik 方程来讨论其高能行为. 而且由于生成元的不可交换性, 非 Abel 规范理论中的红外发散, 也不能象 Abel 规范理论^[2]那样, 用量子电动力学中分离出红外发散因子的办法^[4]来处理. 这些困难迫使我们只好用逐个计算低阶图的领头对数项的方法, 来研究非 Abel 规范理论中形状因子的高能行为. 为此, 我们从微扰论图振幅的 Feynman 参数积分表示^[5,6]出发, 应用并发展了逐次对一些 Feynman 参数进行尺度变换的方法^[7], 以分离出有领头贡献的积分区域(以后简称为领头的积分区域). 因为六阶图(即三圈图)中积分变量比较多, 如何做到既不重叠、又无遗漏地分离出领头的积分区域, 就成了一件困难然而必须的事. 我们在计算中找到了一些方法来解决这个问题(主要是如何避免重叠). 但是我们所用的方法还不是很系统化的(尤其是在遗漏问题上). 所以在计算中需要十分细心, 特别是还需要一些检验方法, 对计算结果进行校核, 以便判断有无遗漏. 我们从非线性规范下的量子电动力学, 找到了一些这样的检验判据, 并用它们对计算结果作了校核.

计算结果是: 取领头对数近似, 到微扰论六阶, 质壳费米子的电磁形状因子是

$$F_V^{(S)}(q^2) = Q_S \gamma_\mu \left(1 - \theta + \frac{1}{2!} \theta^2 - \frac{1}{3!} \theta^3 \right), \quad (1)$$

$$F_V^{(V)}(q^2) = Q_V \gamma_\mu \left(1 - \bar{\theta} + \frac{1}{2!} \bar{\theta}^2 - \frac{1}{3!} \bar{\theta}^3 \right) + \gamma_\mu \delta_V \Theta, \quad (1')$$

其中 q 为四动量传递, g 为规范群耦合常数,

$$\theta = \frac{Ag^2}{16\pi^2} C_2 \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^2, \quad \bar{\theta} = \frac{Ag^2}{16\pi^2} \left(C_2 - \frac{1}{2} \right) \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^2, \quad (2)$$

$$\Theta = -\frac{11}{60} \frac{1}{3!} \left(\frac{Ag^2}{16\pi^2} \right)^3 \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^6. \quad (2')$$

在(1)和(1')式中, $F_V^{(S)}$ 和 $F_V^{(V)}$ 对应于费米子电荷矩阵 Q 按规范群生成元的矩阵表示 T_a 的分解: $Q = Q_S + Q_V$, 这里 Q_S 与一切 T_a 对易, 而 $Q_V = \sum_a C_a T_a$ 是 T_a 的线性组合; (2) 式中 A 与群结构常数 f_{abc} 的关系是 $f_{abc} f_{a'bc} = A \delta_{aa'}$ (注意: Ag^2 在生成元的尺度变换下是不变的); C_2 和 δ_V 的定义是

$$-f_{abc} f_{a'cb} T_a T_{a'} = A^2 C_2, \quad (3)$$

$$\delta_V = \sum_a C_a \delta_a, \quad A^3 \delta_a = f_{a'bc} f_{acd} f_{a''dc} f_{a'''cb} T_{a'} T_{a''} T_{a'''}. \quad (3')$$

规范介子 B_a^μ 与费米子作用的形状因子 $F_B^{(a)}$ 可在(1')式中把 Q_V 换成 T_a , δ_V 换为 δ_a 而得到.

从以上结果可见: 形状因子的规范群标量部分 $F_V^{(S)}(q^2)$ 符合于我们在资料[2]中的猜测, 它仍然保持是指数化的. 但是与我们早先的猜测相反, 形状因子的规范群矢量部分 $F_V^{(V)}(q^2)$, 到六阶已不再是指数化的了.

本文的结构安排如下: 第二节讨论作为我们计算的出发点的拉氏量; 第三节结合具体例子说明计算方法, 并讨论如何做到不重叠地分离领头的积分区域; 第四节中较详细地给出了两个典型图例的计算; 第五节中列出了我们对各个六阶图的计算结果, 并说明我们为检验计算中是否有遗漏而设计的核验方法; 最后在第六节中对我们的结果进行某些讨论.

二、

为了避免非 Abel 规范理论固有的红外发散, 使规范介子获得质量, 可以考虑, 例如, 有 Higgs 自发破坏的情形. 此时原始拉氏量的一般形式是

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a - \bar{\psi}(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi - |D_\mu\phi|^2 - V(\phi), \quad (4)$$

其中

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + gf_{abc}B_\mu^b B_\nu^c,$$

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu - igB_\mu^a T_a)\psi, \quad D_\mu\phi = (\partial_\mu - igB_\mu^a L_a)\phi,$$

T_a 和 L_a 分别是规范群的生成元在费米子 ψ 的表示中以及在 Higgs 复标量场 ϕ 的表示中的表示矩阵; $V(\phi)$ 是 ϕ 的不超过四次的多项式, 以保证拉氏量(4)式是可重整化的.

设 v 是 Landau 规范下 ϕ 场的真空平均值. 定义 $\phi' = \phi - v$, 取 ξ 规范^[8], 令

$$F_a = \sqrt{\xi} \left[\partial_\mu B_\mu^a - \frac{2}{\xi} \text{Im}(v, L_a \phi') \right], \quad (5)$$

则按照通常非 Abel 规范场的量子化方案, 与(4)式相应的有效拉氏量是

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L} - \frac{1}{2} F^T F + \text{虚构标量粒子项}. \quad (6)$$

我们取 $\xi = 1$ 的 R_ξ 规范^[8], 此时规范介子的传播子为

$$\Delta_{F\mu\nu}(k) = -i\delta_{\mu\nu}/(k^2 + \mu^2). \quad (7)$$

显然我们总可以对群的生成元, 从而也对规范势 B_μ^a 做正交变换, 将规范介子的质量矩阵 $(\mu^2)_{ab} = 2g^2(v, L_a L_b v)$ 对角化. 我们假设对角元素均相等: $(\mu^2)_{ab} = \mu^2 \delta_{ab}$. 实际上, 对角元素若不等, 对于我们的结果并无实质影响. 其余的 Feynman 规则是熟知的. 为方便起见, 我们特别列出与我们的结果最有关系的三个顶点:

$\bar{\psi} B_\mu^a \psi$ 顶点

$$-g\gamma_\mu T_a \quad (8)$$

$B_\mu^a B_\nu^b B_\rho^c$ 顶点(动量从顶点向外)

$$gf_{abc}[\delta_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\rho + \delta_{\nu\rho}(k_2 - k_3)_\mu + \delta_{\rho\mu}(k_3 - k_1)_\nu], \quad (9)$$

$B_\mu^a B_\nu^b C_\rho^c B_\sigma^d$ 顶点

$$-ig^2\{f_{abc}f_{cde}(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}) + f_{ace}f_{bde} \\ \times (\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}) + f_{ade}f_{bce}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma})\}. \quad (10)$$

为了引进电磁作用, 且同时保持电荷规范群 $U(1)$ 的规范不变性, 应该在已包含规范固定项及虚构标量粒子项的有效拉氏量(6)式[而非原始拉氏量(4)]中进行最小电磁作用的替代:

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu Q \quad (11)$$

(其中 Q 是 ∂_μ 所作用的粒子的电荷矩阵). 应当注意: 这样得到的规范场的电磁作用, 是与对 B_μ^a 所取的规范有关的. 我们仍取 $\xi = 1$ 的规范. 此外, 当 $v \approx 0$ 时, A_μ 与中性规范介子 B_μ^3 一般是有混合的, 这种混合不影响 $F_V^{(S)}$, 但可能行起 $F_V^{(V)}$ 的(1')式的一些修正.

于此我们指出: 我们的计算结果, 基本上只依赖于(7)–(11)式, 而与规范介子获得质量的机制无关, 因而也适用于其它类型的自发破坏的情形.

最后, 为了后面检验方法的需要, 我们简单地叙述一下非线性规范下的量子电动力学^[9],

量子电动力学的原始拉氏量是

$$\mathcal{L}^{(QED)} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \bar{\psi}[\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m]\psi. \quad (12)$$

通常量子化方案中所用的有效拉氏量是

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(QED)} = \mathcal{L}^{(QED)} - \frac{1}{2}F^2 + \text{虚构标量粒子项}. \quad (13)$$

过去一般只取线性规范,即规范固定项 $\left(-\frac{1}{2}F^2\right)$ 中的 F 对于 A_μ 是线性的,例如 $F = \partial_\mu A_\mu$ (Feynman 规范);此时虚构标量粒子项为0.如果我们取非线性规范^[9]

$$F = \partial_\mu A_\mu + \frac{\alpha}{2}A_\mu^2, \quad (14)$$

则虚构标量粒子项不为0,而且有效拉氏量(13)式所导致的 Feynman 规则在形式上与非 Abel 规范理论极为相似.例如出现了三光子、四光子顶点:

$A_\mu A_\nu A_\rho$ 顶点(动量从顶点向外)

$$- \alpha(\delta_{\mu\nu} k_{3\rho} + \delta_{\nu\rho} k_{1\mu} + \delta_{\rho\mu} k_{2\nu}), \quad (15)$$

$A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma$ 顶点

$$- i\alpha^2(\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}), \quad (16)$$

而光子传播子仍和普通 Feynman 规范中一样:

光子传播子

$$-i\delta_{\mu\nu}/k^2. \quad (17)$$

如资料[9]中所证明,非线性规范(14)式中所有的 Green 函数和普通的 Feynman 规范的情形完全一样.这就是说,如果把到某阶为止的有关微扰论图都取全了的话,非线性规范(14)式中的量子电动力学的结果与普通 Feynman 规范下的结果是完全一致的.由于后者的许多结果往往是已知的,所以我们可以用非线性规范下的量子电动力学来核验非 Abel 规范理论中的计算.

三、

作为计算的出发点,我们采用微扰论图振幅的 Feynman 参数积分表示^[4,5](我们所用的记号基本上与资料[4]相同).原来振幅中分子上含有 l 个内线动量之积的一项,现在表示为一些项的和:

$$M = M_0 + M_1 + M_2 + \cdots, \quad (18)$$

其中

$$M_0 = \frac{(-i)^N}{(-16\pi^2 i)^n} (N - 2n - 1)! \int_0^1 dx_1 \cdots dx_N \delta(1 - \sum x_i) \frac{Y_1 \cdots Y_l}{U^2 E_0^{N-2n}}. \quad (19)$$

在我们所讨论的质壳形状因子的情形下:

$$Y_i = Y_i^{(p)} p + Y_i^{(p')} p' \quad (p, p' \text{ 是费米子的始、末动量}), \quad (20)$$

$$E_0 = (q^2 W^2 - m^2 W^{\nu\nu'})/U + \sum x_i m_i^2. \quad (21)$$

当 $N - 2n - m > 0$ 时,可由 M_0 得到含 m 个 X_{jk} 的项 M_m :把 $(N - 2n - 1)!$ 换为 $(N - 2n - m - 1)!$,同时把 m 对 $(Y_i)_\mu (Y_k)_\nu$ 换为 $(E_0/2)X_{jk}\delta_{\mu\nu}$,并对所有可能的此种替换求和.

以上诸式中 N 为内线数, n 为独立的圈数, x_i 为第 i 条内线的 Feynman 参数, Y_i 对应于原来分子上的内线动量因子; $U, W^{q^2}, W^{p^2}, UY_i^{(p)}, UY_i^{(p')}, UX_{jk}$ 都是 x_i 的多线性齐次函数, 由 Feynman 图得到它们的规则可参阅资料[4]或资料[5]的附录 A.

现在主要问题是, 计算这些积分当 $q^2 \rightarrow \infty$ 时增长最快的领头项. 众所周知, 只要积分当 $\mu^2 \rightarrow 0$ 时出现红外发散, 则它的领头项总是由紫外有限的红外区域给出. 这是因为紫外发散需要减除, 在减除后给出 $g^2 \ln \frac{q^2}{\mu^2}$ 的幂次, 而红外区域可以给出 $g^2 \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^2$ 的幂次的领头项. 因此我们只需考虑那些不含紫外发散的积分. 这些积分的领头项要从 W^{q^2}/U 的零点的邻域中去找. 由其构成规则^[5,6]知, W^{q^2} 对 x_i 是正定的, 故仅当某些参数 $(x_1, \dots, x_m)$ 为 0 时, W^{q^2}/U 才为 0. 如果 $\mu^2 \rightarrow 0$ 时积分在此点发散, 这样的参数组就叫做红外组. 对红外组中的参数进行如下的“归一尺度变换”(以后简称为尺度变换):

$$x_i = \rho x'_i \quad (i = 1, \dots, m); \quad \sum_{i=1}^m x'_i = 1. \quad (22)$$

则由 W^{q^2} 对 x_i 的多线性性质知: 红外组 $(x_1, \dots, x_m)$ 的尺度参数 ρ 的零点即是 W^{q^2}/U 的零点. 所以, 我们可以用对若干红外组逐次进行尺度变换(22)式的方法^[7], 来分离出领头的积分区域.

有时一个(或几个)红外组可能包含某个闭合圈的所有参数, 则这组(或这几组)参数为 0, 不但是 W^{q^2}/U 的零点, 而且也是 U 的零点. 为了简化在这种情形下的计算, 应当预先把 U 的这些闭合圈零因子分离出来. 这个问题已经由 Speer 在讨论紫外发散的重整化问题时解决了^[10]. 在三圈图的情形下, 他的做法是: 任意拆去原图 G_0 的一条内线 (记为 x_{i_0}). 剩下的双圈若有公共的内线, 则记此双圈子图(不计它的外线)为 G_1 ; 再任意拆去 G_1 的一条内线, 记为 x_{i_1} . 把剩下的单圈图(不计它的外线)记为 G_2 ; 再从 G_2 任意拆去一条内线, 记为 x_{i_2} . 如果拆去 x_{i_0} 后剩下的双圈没有公共线, 则把那两个单圈图(不计它们的外线)分别记为 G_1 和 G_2 , 并从中各自拆去任意一条内线, 记为 x_{i_1} 和 x_{i_2} . 这样一个手续得到的一系列图形, 叫做一个奇性族 E , 它对应于一个有序的三参数组 $E = (x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2})$. 在 Feynman 参数的空间中, 相应于每个 E , 定义区域 $D(E)$:

$$D(E) = \{x_{j_k} \leq x_{i_k}, \text{ 若 } x_{i_k} \in G_k\} \quad (k = 0, 1, 2). \quad (23)$$

容易看出: 若 $E_\alpha \neq E_\beta$, 则 $D(E_\alpha) \cap D(E_\beta)$ 的测度为 0; 对一切可能的 E_α , $\bigcup_\alpha D(E_\alpha)$ 等于整个积分区域. 这样便把整个积分区域划分为不重叠的子区域 $D(E_i)$ 之和. 区域(23)在 G_1 包含 G_2 的情形下可表为:

$$\begin{cases} x_{i_0} = \lambda; x_j = \lambda x'_j & (j \neq i_0, x_j \notin G_1), \\ x_{i_1} = \lambda \lambda_1; x_j = \lambda \lambda_1 x'_j & (j \neq i_1, x_j \in G_1, x_j \notin G_2), \\ x_{i_2} = \lambda \lambda_1 \lambda_2; x_j = \lambda \lambda_1 \lambda_2 x'_j & (j \neq i_2, x_j \in G_2), \end{cases} \quad (24)$$

其中 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, x'_j \leq 1$. 容易证明此时有

$$U = \lambda^3 \lambda_1^2 \lambda_2 \tilde{U}. \quad (25)$$

在 G_1 与 G_2 不相交的情形下, 区域(23)可表为:

$$\begin{cases} x_{i_0} = \lambda; & x_j = \lambda x'_j \quad (j \neq i_0, x_i \in G_1, G_2), \\ x_{i_1} = \lambda \lambda_1; & x_j = \lambda \lambda_1 x'_j \quad (j \neq i_1, x_i \in G_1), \\ x_{i_2} = \lambda \lambda_2; & x_j = \lambda \lambda_2 x'_j \quad (j \neq i_2, x_i \in G_2), \end{cases} \quad (24')$$

其中 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, x'_j \leq 1$, 容易证明此时有

$$U = \lambda^3 \lambda_1 \lambda_2 \tilde{U}. \quad (25')$$

在(25)和(25')式中, $\tilde{U} \geq 1$. 这样就把 U 在 $\lambda_1, \lambda_2 = 0$ 处的零因子分离出来了. 这种做法有一个优点: 对同一图形的不同的奇性族, 变换(24)或(24')式所定义的区域是彼此不重迭的, 因而它们对积分(包括对积分的领头项)的贡献是可加的.

把变换式(24)或(24')代入积分(18)式中, 对参数 λ 的积分可以积掉. 为了求出剩下的积分的领头项, 现在可以在参数 $\lambda_1, \lambda_2, x'_j$ 中用对若干红外组逐次进行尺度变换(22)式的方法(注意: 有时 λ_1 或 λ_2 本身就是红外组). 为了今后书写的简便, 我们用如下的简写记号

$$(x_1, \dots, x_m); \rho \quad (26)$$

来代表变换(22)式, 并用它的尺度参数来称呼这一变换. 显然, 在积分中实施积分变数的 ρ 变换(22)式等价于下列步骤:

$$\begin{cases} \text{在积分中插入恒等式 } \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} \delta\left(1 - \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^m x_i\right) = 1, \\ \text{做尺度变换 } x_i \rightarrow \rho x_i, \quad (i = 1, \dots, m). \end{cases} \quad (27)$$

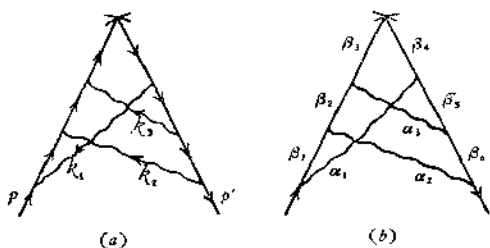


图 1 例 1 附图

(——费米子线, ~~~~规范介子线, x 外光子顶点)

(此后, 在不致引起混淆时, 我们往往把变换后的变数仍记为 x_i .)

为了说明这种方法的运用及其遇到的问题, 让我们来考察一个具体的例子.

例 1. 考虑广义梯形图 1.

与量子电动力学相似, 在求本图的领头项时, 可以忽略费米子传播子分子中的 $\hat{k}_i$ 项 ($i = 1, 2, 3$). 经过一些化简后可得

$$\Gamma_\mu = g^6 T_b T_c T_a Q T_c T_b T_a (-4 p \cdot p')^2 \bar{u}_{p'} \gamma_\mu u_p \cdot J, \quad (28)$$

$$J = (-i)^9 \int \prod_{i=1}^3 \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{D} \quad (D \text{ 为传播子分母之积}).$$

用参数积分表示, 可把积分 J 表为

$$J = \frac{2}{(-16\pi^2)^3} I, \quad I = \int_0^1 \prod_{i=1}^3 d\alpha_i \prod_{j=1}^6 d\beta_j \frac{\delta(1 - \sum \alpha_i - \sum \beta_j)}{U^2 E_0^3}, \quad (29)$$

其中

$$E_0 = \{ (q^2 W^2 - m^2 W p p') / U \} + \sum (\alpha_i \mu^2 + \beta_j m^2),$$

α_i, β_j 分别是规范介子、费米子的内线参数, 其标记见图 1(b). 由其构成规则^[5,6]知,

$$\begin{aligned} W^2 = & \beta_4 [\beta_1 (\alpha_2 + \beta_2) (\alpha_3 + \beta_3) + \alpha_2 \beta_2 (\alpha_3 + \beta_3) + \alpha_3 \beta_3 (\alpha_2 + \beta_2)] \\ & + (\beta_2 + \beta_3) \beta_4 \beta_5 \beta_6 + \beta_2 \beta_3 \beta_4 (\beta_5 + \beta_6) + \alpha_1 \{ (\beta_4 + \beta_5) [\beta_2 \beta_3 + (\beta_2 + \beta_3) \beta_6] + \beta_2 \beta_3 \beta_6 \} \\ & + \alpha_3 (\beta_2 + \beta_3) \beta_4 (\beta_5 + \beta_6) + \alpha_1 \alpha_3 (\beta_2 + \beta_3) (\beta_4 + \beta_5 + \beta_6) + \beta_1 \beta_3 \beta_4 \beta_6 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 (\beta_4 + \beta_5) \\ & + \alpha_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5. \end{aligned} \quad (30)$$

在相应于 $E_1 = (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3)$ 的区域 $D(E_1)$ 中, 利用变换式(24), 可以把积分(29)式表为

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\lambda_1^2 d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3 d\beta_4 d\beta_5 d\beta_6}{\tilde{U}^2 \{ [q^2 \tilde{W}^{q^2} / \tilde{U}] - [m^2 \tilde{W}^{\rho\rho'} / \tilde{U}] + \mu^2 [1 + O(\lambda_1, \lambda_2, \beta_i)] \}^3}, \quad (31)$$

其中

$$\tilde{W}^{q^2} = W^{q^2} / \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2, \quad \tilde{W}^{\rho\rho'} = W^{\rho\rho'} / \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2,$$

$$\tilde{U} = 1 + O(\lambda_1, \lambda_2, \beta_i), \quad O(\lambda_1, \lambda_2, \beta_i) \rightarrow 0 \quad (\text{当 } \lambda_1, \lambda_2, \beta_i \rightarrow 0 \text{ 时})$$

把变换式(24)代入(30)式可得

$$\begin{aligned} (\lambda_1)^{-1} \tilde{W}^{q^2} = & \lambda_2 \beta_4 [\beta_1 (1 + \lambda_1 \beta_2) (1 + \beta_3) + \beta_2 (1 + \beta_3) + \lambda_2 \beta_3 (1 + \lambda_1 \beta_1)] \\ & + \lambda_2 (\beta_2 + \lambda_2 \beta_3) \beta_4 \beta_5 \beta_6 + \lambda_2 \beta_2 \beta_3 \beta_4 (\lambda_1 \lambda_2 \beta_5 + \beta_6) + \{ (\beta_4 + \beta_5) [\lambda_1 \lambda_2 \beta_2 \beta_3 \\ & + (\beta_2 + \lambda_2 \beta_3) \beta_6] + \beta_2 \beta_3 \beta_6 \} + \lambda_2 (\beta_2 + \lambda_2 \beta_3) \beta_4 (\lambda_1 \lambda_2 \beta_5 + \beta_6) \\ & + (\beta_2 + \lambda_2 \beta_3) [\lambda_1 \lambda_2 (\beta_4 + \beta_5) + \beta_6] + \lambda_2 \beta_1 \beta_3 \beta_4 \beta_6 + \lambda_3 \beta_3 (\beta_4 + \beta_5) + \lambda_2^2 \beta_3 \beta_4 \beta_5. \end{aligned}$$

由上式容易看出: 可取下列红外组的尺度变换

$$(1) (\beta_1, \beta_2, \beta_3): \rho_1, \quad (2) (\beta_4, \beta_5, \beta_6): \rho_2, \quad (3) (\beta_2, \beta_3, \beta_4): \rho_3,$$

$$(4) (\lambda_2, \beta_2): \rho_4, \quad (5) (\lambda_2, \beta_6): \rho_5,$$

则

$$\tilde{W}^{q^2} = \lambda_1 \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 \rho_5 [1 + O(\lambda_1, \rho_i)],$$

$$\tilde{W}^{\rho\rho'} = O(\lambda_1, \rho_i),$$

$$\int \lambda_2 d\lambda_2 \prod_{i=1}^6 d\beta_i = \int \lambda_2 d\lambda_2 \prod_{i=1}^5 \rho_i^2 d\rho_i \prod_{j=1}^6 d\beta_j \times 5 \text{ 个 } \delta \text{ 函数因子.}$$

注意到 λ_1 本身也是一个红外组, 故 $\lambda_1, \rho_i = 0$ 的邻域对积分(31)式的领头项有贡献. 在 $\lambda_1, \rho_i < \varepsilon \ll 1$ 的近似下, 得到此区域对领头项的贡献为

$$I'_1 \approx \int_0^1 \lambda_2 d\lambda_2 d\beta_6 \delta(1 - \lambda_2 - \beta_6) \int_0^1 d\lambda_1 \prod_{i=1}^5 d\rho_i \frac{\lambda_1^2 \prod_{i=1}^5 \rho_i^2}{(q^2 \lambda_1 \prod_{i=1}^5 \rho_i + \mu^2)^3}.$$

用 Mellin 变换法, 可以求出第二个因子的领头项:

$$\int_0^1 \frac{\prod_{i=1}^m a_i^{n-1} da_i}{\left(q^2 \prod_{i=1}^m a_i + \mu^2 \right)^n} \approx \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{(q^2)^n} \cdot \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^m, \quad (32)$$

故得

$$I'_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{(q^2)^3} \cdot \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^6. \quad (33)$$

在这样的计算中, 需要注意下列几点:

1. 若对参数组 $(x_1, \dots, x_m)$ 做 ρ 变换, 代入积分后使 W^{q^2}/U 正比于 ρ , 而积分的其余部分给出因子 $\rho^l d\rho$, 则定义 $l+1$ 是此参数组的有效长度. 例如, 上例中 λ_1, ρ_i 诸变换的有效长度均为 3. 在三圈图里, 只有有效长度为 3 的参数组才是积分 M_0 的红外组, 才能为 M_0 的领头项贡献一个对数因子 $\ln \frac{q^2}{\mu^2}$.

2. 在例 1 中, 每个红外组都必定至少有一个参数不出现在后面的红外组内. 只有这样才

能保证最后取所有红外组的尺度参数都接近于 0 时,每次尺度变换中的 δ 函数约束不被破坏,如此顺序的一系列红外组叫做相容序列。

3. 在非 Abcl 规范理论中,顶角六阶图的领头项是 $g^6 \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^6$ 。因此在一个六阶图中,只有能找出六个相容的红外组的区域,才能对六阶领头项有贡献。

如果仔细考察这个计算,则不难看出存在着如下的问题:

I. 从表面上看,我们也应当取拆去某些费米子线所构成的奇性族。例如取 $E = (\beta_6, \alpha_1, \beta_5)$, 我们仍旧可以找到六个相容的红外组: 只要用 $(\beta_2, \beta_3, \alpha_2)$ 和 $(\beta_2, \beta_3, \alpha_3)$ 代替 $(\beta_4, \beta_5, \beta_6)$ 和 (λ_2, β_6) 就行了。

II. 不难看出 $(\lambda_1, \beta_3, \beta_4, \beta_6)$ 也是红外组。若把变换(4)改为

$$(4') (\lambda_1, \beta_3, \beta_4, \beta_6): \rho_4^{1/2}$$

(注意: 此变换的尺度参数, 在 W^2/U 中以平方因子的形式出现, 故最好取为 $\rho_4^{1/2}$ 的形状), 而其它(1), (2), (3), (5)诸变换均不变, 则可算出

$$I_1'' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{(q^2)^3} \cdot \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^3, \quad (33')$$

容易看出: 区域 I_1'' 与 I_1' 并不重迭; 因为在第(3)步变换后有约束 $\delta(1 - \beta_2 - \beta_3 - \beta_4)$, 因而 $(\lambda_1, \beta_3, \beta_4, \beta_6)$ 与 (λ_2, β_2) 不相容。但是如果抽掉 $(\beta_2, \beta_3, \beta_4)$, 而改用

$$(3') (\lambda_1, \beta_3, \beta_4, \beta_6): \rho_3^{1/2},$$

其它(1), (2), (4), (5)均不变, 那么也能算出一个

$$I_1''' = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{(q^2)^3} \cdot \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^3.$$

我们要问: 积分区域 I_1''' 是否与 I_1' 和 I_1'' 重迭? 更一般的问题是: 在有六个以上的红外组, 可以组成多个六红外组的相容序列时, 我们如何保证积分区域没有重迭?

III. 如果疏忽的话, $(\lambda_1, \beta_3, \beta_4, \beta_6)$ 这个红外组可能不被注意到, 从而遗漏了领头区域 I_1' 。我们如何避免遗漏?

显然, 这些问题如不妥善解决, 那就很容易出现有的积分区域算重了, 有的漏掉了的现象, 其结果很难是可靠的。现在让我们依次回答上述问题如下。

I. 我们指出: 积分表示(29)式是做了一个近似(即忽略费米子传播子分子中的 $\hat{k}_i$ 项)之后得到的。如果不做这个近似, 直接把原图的振幅化成参数积分表示的形式, 那就能够看出: 上述近似等价于取 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 相应的 $Y_1^{(p)} \approx Y_2^{(p)} \approx Y_3^{(p)} \approx 1$, 而 $\beta_4, \beta_5, \beta_6$ 相应的 $Y_4^{(p')} \approx Y_5^{(p')} \approx Y_6^{(p')} \approx 1$ 。由求 Y_i 的规则^[1]写出其表达式, 即可发现: 若用 $(\beta_2, \beta_3, \alpha_2)$ 和 $(\beta_2, \beta_3, \alpha_3)$ 代替 $(\beta_4, \beta_5, \beta_6)$ 和 (λ_2, β_6) 进行尺度变换, 则有 $Y_6^{(p')} = O(\rho_i)$, $Y_5^{(p')} = O(\rho_i)$ 。所以这时不能用上述近似。对于直接由原图振幅化成的积分表示, $(\beta_2, \beta_3, \alpha_2)$ 和 $(\beta_2, \beta_3, \alpha_3)$ 的有效长度都大于 3, 因而实际上不是红外组。

从这个讨论得到的教训是: 如果在不改变领头项的情形下, 做了“在费米子传播子分子中忽略规范介子动量 $\hat{k}_i$ 项”的近似, 那么就只能考虑拆规范介子内线 $(\alpha_i, \alpha_i, \alpha_i)$ 的奇性族, 而无需考虑拆去某些费米子内线的奇性族了。

II. 在有六个以上的红外组, 可以组成多个六红外组的相容序列时, 为了避免积分区域的

重迭, 我们提出如下的“先做总的尺度变换”的方法: 先把那些重迭关系搞不清的红外组中的所有参数(前面已经出现过的红外组的尺度参数除外)一起进行尺度变换, 这组参数可能是红外组, 也可能不是. 在后一情形下, 总可以找到适当的参数, 与这组参数的尺度参数一起形成红外组. 由于这个“总的尺度变换”所带来的 δ 函数约束, 然后再从那几个红外组中选择一部分形成相容序列时, 尽管有时相容序列的数目还不少, 但是它们之中有许多是互不重迭的. 如果还有一部分相容序列的重迭关系仍然不清楚, 那么可以再重复一次, 不过所涉及到的红外组已经比前一次减少了.

例 1. (续)

从四个红外组 $(\beta_2, \beta_3, \beta_4)$, $(\lambda_1, \beta_3, \beta_4, \beta_6)$, (λ_2, β_2) 和 (λ_2, β_6) 中任选三个, 均可形成相容序列, 其重叠关系不易看清. 为了无重叠地分离领头积分区域, 我们把第(3)步尺度变换改为如下“总的尺度变换”:

$$(3^*) (\lambda_2, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_6): \rho_3^{1/2},$$

(注意: λ_1 已是红外组的尺度参数, 不参加这个变换). 这是一个红外组, 下面只需要从那四个红外组中选出两个来形成相容序列. 由于因子 $\delta(1 - \lambda_2 - \beta_2 - \beta_3 - \beta_4 - \beta_6)$ 的限制, 共有四种选择方法:

- 1) $(\beta_2, \beta_3, \beta_4): \rho_4; (\lambda_1, \beta_3, \beta_4, \beta_6): \rho_3^{1/2},$
- 2) $(\beta_2, \beta_3, \beta_4): \rho_4; (\lambda_2, \beta_2): \rho_3,$
- 3) $(\lambda_2, \beta_2): \rho_4; (\lambda_2, \beta_6): \rho_5,$
- 4) $(\lambda_1, \beta_3, \beta_4, \beta_6): \rho_3^{1/2}; (\lambda_2, \beta_6): \rho_5,$

不难看出: 这四个相容序列是彼此互不重叠的; 因为它们分别相应于“总的尺度变换”(3*) 中的 $\lambda_2, \beta_6, \beta_3 + \beta_4, \beta_2$ 未参与后面的尺度变换. 因此它们给出的贡献应当相加:

$$\begin{aligned} I_a + I_b + I_c + I_d &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{(q^2)^3} \cdot \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^6 \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{(q^2)^3} \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^6 = I'_1 + I''_1. \end{aligned} \quad (34)$$

这就是相应于 $E_1 = (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3)$ 的区域 $D(E_1)$ 的总贡献.

III. 我们没有找到一种系统的方法, 保证分离领头区域时毫无遗漏. 因而我们强调: 在计算中必须十分小心, 尽可能仔细检查, 不要漏掉了一个红外组. 但这还不够, 我们还需要有一些对计算结果进行核验的方法, 才便于判断有无遗漏, 以保证计算结果的可靠性.

为此我们设计了一种与非线性规范下的量子电动力学对比的检验方法, 即对于每个六阶图, 用非线性规范下的量子电动力学的 Feynman 规则, 用同样的办法重算一遍, 然后将其结果与量子电动力学的已知结果相比较. 这种检验方法有效性的根据在于: 第一, 非线性规范下的量子电动力学与非 Abel 规范理论极为相似, 不仅二者的有领头贡献的微扰论图是一样的, 而且每个图中领头的积分区域也是完全一样的, 最多是其贡献可能差一个符号; 第二, 如前所述, 把到某阶为止的有关微扰论图都取全, 非线性规范(14)式的量子电动力学的结果与普通 Feynman 规范下的结果完全一样. 由于这两点原因, 我们可以用这种办法来检验我们的计算结果是否正确, 特别是判断有无遗漏领头的积分区域(具体的比较方法详见第五节).

四、

我们再用两个典型例子来说明计算方法。

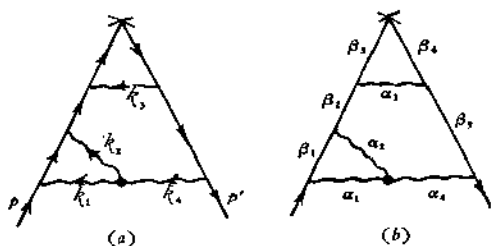


图2 例2附图

(——费米子线, ~~~规范介子线, X外光子顶点) 其中

例2. 考虑单三顶点图(见图2)。

忽略费米子传播子分子中的 $\hat{k}_i$ 项, 只考虑分子上与 $(p \cdot p')^3$ 成正比的项, 可把图2的振幅化为

$$\Gamma_\mu = i \frac{2g^6}{(-16\pi^2)^3} f_{abd} T_d T_c Q T_c T_b T_a \cdot 32(p \cdot p')^3 \bar{u}_{p'} \gamma_\mu u_p \cdot I, \quad (35)$$

$$I = \int_0^1 \Pi d\alpha_i \Pi d\beta_i \delta(1 - \sum \alpha_i - \sum \beta_i) \frac{UY_2^{(p')} - UY_1^{(p')}}{U^3 E_0^3}, \quad (36)$$

$Y_1^{(p')}$, $Y_2^{(p')}$ 分别对应于规范介子内线 α_1 , α_2 的动量。由求 W^q , UY_i 的规则^(5,6)得

$$\begin{aligned} W^q &= \beta_1 \beta_2 \beta_3 (\beta_4 + \beta_5) + \beta_1 (\beta_2 + \beta_3) \beta_4 \beta_5 + \alpha_2 (\beta_1 + \beta_2) \beta_3 (\beta_4 + \beta_5) \\ &+ \alpha_2 (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \beta_4 \beta_5 + \alpha_3 \beta_1 (\beta_2 + \beta_3) (\beta_4 + \beta_5) + \alpha_2 \alpha_3 (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) (\beta_4 + \beta_5) \\ &+ \alpha_1 [\beta_2 \beta_3 (\beta_4 + \beta_5) + (\beta_2 + \beta_3) \beta_4 \beta_5 + \alpha_3 (\beta_2 + \beta_3) (\beta_4 + \beta_5)] \\ &+ [\alpha_1 (\alpha_2 + \alpha_4) + \alpha_4 (\alpha_2 + \beta_1)] \beta_3 \beta_4, \end{aligned}$$

$$UY_1^{(p')} = -\alpha_2 [\alpha_3 (\beta_4 + \beta_5) + (\beta_3 + \beta_4) \beta_5],$$

$$UY_2^{(p')} = -(\alpha_1 + \beta_1) [\alpha_3 (\beta_4 + \beta_5) + (\beta_3 + \beta_4) \beta_5].$$

这里我们给出相应于 $E_1 = (\alpha_4, \alpha_3, \alpha_1)$ 的区域中的计算。

注意到拆去 α_4 线之后两个圈无公共线, 按照(24')式进行变换后得

$$I_1 = \int d\lambda_1 d\lambda_2 d\alpha_2 \prod_{i=1}^5 d\beta_i \frac{\tilde{U}Y_2^{(p')} - \tilde{U}Y_1^{(p')}}{[q^2 \tilde{W}^q - m^2 \tilde{W}^{pp'} + \mu^2 (1 + O(\lambda_i, \beta_i, \alpha_2))]^3},$$

其中

$$\tilde{W}^{pp'} = W^{pp'}/\lambda^4 \lambda_1 \lambda_2 = O(\lambda_i, \beta_i, \alpha_2),$$

$$\tilde{U}Y_1^{(p')} = UY_1^{(p')}/\lambda^3 \lambda_1 \lambda_2 = -(\lambda_2 \beta_4 + \beta_5) + O(\beta_i \beta_j),$$

$$\tilde{U}Y_2^{(p')} = UY_2^{(p')}/\lambda^3 \lambda_1 \lambda_2 = -\alpha_2 (\lambda_2 \beta_4 + \beta_5) + O(\beta_i \beta_j),$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}^q &= W^q/\lambda^4 \lambda_1 \lambda_2 = \alpha_2 (\lambda_1 \beta_1 + \beta_2 + \lambda_2 \beta_3) (\lambda_2 \beta_4 + \beta_5) + (\beta_2 + \lambda_2 \beta_3) (\lambda_2 \beta_4 + \beta_5) \\ &+ \lambda_2 (1 + \alpha_2 + \lambda_1 \alpha_2) \beta_2 \beta_4 + \alpha_2 [(\lambda_1 \beta_1 + \beta_2) (\lambda_2 \beta_3 \beta_4 + \beta_3 \beta_5 + \beta_4 \beta_5) + \lambda_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5] \\ &+ (\lambda_2 \beta_4 + \beta_5) \beta_1 (\beta_2 + \lambda_2 \beta_3) + (\beta_2 + \lambda_2 \beta_3) \beta_4 \beta_5 + \beta_2 \beta_3 (\lambda_2 \beta_4 + \beta_5) + \lambda_2 \beta_1 \beta_3 \beta_4 \\ &+ \beta_1 \beta_2 \beta_3 (\lambda_2 \beta_4 + \beta_5) + \beta_1 (\beta_2 + \lambda_2 \beta_3) \beta_4 \beta_5. \end{aligned}$$

由上式可以看出: 除了 (β_4, β_5) 和 (λ_2, β_5) 外¹⁾, 还可以从 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \lambda_2)$, $(\alpha_2, \beta_2, \beta_3)$, $(\alpha_2, \beta_2, \lambda_2)$, $(\lambda_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\lambda_1, \beta_2, \lambda_2)$ 六个红外组中选出四个来。可组成的相容序列显然是相当多的。我们首先指出: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 各自都必须后面的尺度变换中至少出现一次;

1) 由于积分 I_1 中因子 $(\tilde{U}Y_1^{(p')} - \tilde{U}Y_2^{(p')})$ 对参数组 (β_4, β_5) 或 (λ_2, β_5) 的有效长度也有贡献 (=1), 这两个参数组的有效长度实际上是3, 而不是2。

这意味着, 有领头贡献的积分区域必定是在 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的零点的邻域. 因此, 我们不妨先对红外组 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 做尺度变换:

$$(1) (\beta_1, \beta_2, \beta_3): \rho_1, \quad (2) (\beta_1, \beta_3): \rho_2, \quad (3) (\lambda_2, \beta_3): \rho_3.$$

下面需要从剩下的五个红外组中选出三个来. 注意到在 ρ_1 变换后有 $\delta(1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3)$ 因子的约束, $\beta_1 \approx 1$ (不再参加尺度变换) 与 $\beta_3 \approx 1$ (不再参加尺度变换) 的区域是彼此互排的. 这两个区域可以分开讨论.

对 $\beta_3 \approx 1$ 的区域, 只有三个红外组:

$$(4) (\beta_1, \beta_2, \lambda_2): \rho_4, \quad (5) (\lambda_1, \beta_2, \lambda_2): \rho_5, \quad (6) (\alpha_2, \beta_2, \lambda_2): \rho_6.$$

最后取 $\rho_i \ll 1 (i = 1-6)$, 则得

$$\tilde{W}^{q^2} \approx \prod_{i=1}^6 \rho_i, \quad \tilde{W}^{p'} \approx 0,$$

$$\tilde{U}Y_{1^{(p')}} = -\rho_2 \rho_3 \rho_6 \alpha_2, \quad \tilde{U}Y_{3^{(p')}} \approx -\rho_2 \rho_3,$$

$$\int d\lambda_1 d\lambda_2 d\alpha_2 \prod_{i=1}^5 d\beta_i \approx \int d\lambda_2 d\alpha_2 d\beta_2 \delta(1 - \lambda_2 - \alpha_2 - \beta_2) (\rho_2 \rho_3)^{-1} \prod_{i=1}^6 \rho_i^2 d\rho_i.$$

我们看到: $\tilde{U}Y_{1^{(p')}}$ 比 $\tilde{U}Y_{3^{(p')}}$ 多一个因子 $\rho_6 \alpha_2$, 所以它对领头项无贡献. 故得

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_0^1 d\lambda_2 d\alpha_2 d\beta_2 \delta(1 - \lambda_2 - \alpha_2 - \beta_2) \cdot \int_0^1 \prod_{i=1}^6 \rho_i^2 d\rho_i / \left(q^2 \prod_{i=1}^6 \rho_i + \mu^2 \right)^3 \\ &= - \frac{1}{2} \frac{1}{6!} \frac{1}{(q^2)^3} \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^6. \end{aligned}$$

对 $\beta_1 \approx 1$ 的区域, 需从四个红外组中选出三个来. 为避免重选, 可使用“总的尺度变换”法:

$$(4^*) (\lambda_1, \lambda_2, \beta_2, \beta_3, \alpha_2): \lambda_3, \quad (5^*) (\lambda_3, \beta_2): \rho_1^{1/2}.$$

现在 λ_3 不是红外组尺度参数, ρ_1 是红外组尺度参数. 以下只需要从四个红外组中选出两个来. 在 (4^*) 和 (5^*) 后有 $\delta(1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 - \beta_3)$ 约束, 只能有四种选法:

$$\begin{aligned} \text{a)} & (\beta_2, \beta_3, \alpha_2): \rho_5; (\lambda_1, \beta_2, \beta_3): \rho_6, & \text{b)} & (\beta_2, \beta_3, \alpha_2): \rho_5; (\alpha_2, \beta_2, \lambda_2): \rho_6, \\ \text{c)} & (\lambda_1, \beta_2, \lambda_2): \rho_5; (\alpha_2, \beta_2, \lambda_2): \rho_6, & \text{d)} & (\lambda_1, \beta_2, \lambda_2): \rho_5; (\lambda_1, \beta_2, \beta_3): \rho_6. \end{aligned}$$

这四个序列彼此互排, 因为它们分别使 $\delta(1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 - \beta_3)$ 的约束中取 $\lambda_1 \approx 1, \lambda_2 \approx 1, \beta_1 \approx 1, \alpha_2 \approx 1$ (不参与后面的尺度变换). 因此这四个区域的贡献相加:

$$\begin{aligned} I_1' &= I_a + I_b + I_c + I_d \\ &= - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{6!} \frac{1}{(q^2)^3} \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^6 = - \frac{1}{6!} \frac{1}{(q^2)^3} \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^6 \end{aligned}$$

(在 I_a, I_b, I_c, I_d 中, 仍然是只有 $\tilde{U}Y_{1^{(p')}}$ 对领头项有贡献, 而 $\tilde{U}Y_{3^{(p')}}$ 可忽略). 这样我们便得到 $E_1 = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1)$ 区域的领头贡献为

$$I_1 = I_1' + I_1'' = - \frac{3}{2} \frac{1}{6!} \frac{1}{(q^2)^3} \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^6. \quad (37)$$

在非线性规范下的量子电动力学中, 图 2 振幅可化为

$$\tilde{F}_\mu = i \frac{2\alpha e^5}{(16\pi^2)^3} \cdot 32(p \cdot p')^3 \bar{u}_{p'} \gamma_\mu u_p \cdot \tilde{I}, \quad (38)$$

其中

$$\tilde{I} = \int_0^1 \Pi d\alpha_i \Pi d\beta_i \delta(1 - \sum \alpha_i - \sum \beta_i) \frac{UY_3^{(p')} + UY_4^{(p')}}{U^3 E_0^3}. \quad (39)$$

比较(36), (39)二式可见: $\tilde{I}$ 与 I 的差别仅在于 $UY_3^{(p')}$ 项前的符号. 由于 $UY_3^{(p')}$ 对领头项无贡献, 可略去, 所以实际上 $\tilde{I}$ 和 I 二者的领头项完全一样. 可以证明: 对有领头贡献的任一单

三顶点图, 对它的任一领头积分区域, 都是如此. 再比较(38)和(35)式, 则得对于单三顶点图的领头项, 从非 Abel 规范理论过渡到非线性规范下的量子电动力学的规则是:

$$g^6 \rightarrow -\alpha e^5, \quad f_{abc} \rightarrow 1, \quad T_a \rightarrow 1. \quad (40)$$

例 3. 考虑双三顶点图(见图 3).

图 3 与所有其它六阶图不同的特点是, 它的单 X_{ik} 项 M_1 也对领头项有贡献; 原因在于: 图 3 有六个红外组, 其有效长度对 M_1 而言是 2. 忽略

费米子传播子分子中的 $\hat{k}_i$ 项, 对“纯 Y_i 项” M_0 取分子上正比于 $(p \cdot p')^3$ 的项, 对单 X_{ik} 项 M_1 取分子上正比于 $(p \cdot p')^2$ 的项, 得

$$\Gamma_\mu = \frac{32g^6}{(-16\pi^2)^3} f_{abc} f_{cde} T_d T_c Q T_b T_a [(p \cdot p')^3 I_Y + (p \cdot p')^2 I_X] u_{p'} \gamma_\mu u_p, \quad (41)$$

其中

$$I_Y = \int_0^1 \Pi d\alpha_i \Pi d\beta_i \delta(1 - \sum \alpha_i - \sum \beta_i) \frac{U(Y_3^{(p)} - Y_4^{(p)})U(Y_1^{(p')} - Y_2^{(p')})}{U^4 E_0^3}, \quad (42)$$

$$I_X = \int_0^1 \Pi d\alpha_i \Pi d\beta_i \delta(1 - \sum \alpha_i - \sum \beta_i) \frac{U(X_{13} + X_{24} - X_{14} - X_{23})}{4U^3 E_0^3}. \quad (43)$$

由求 W^{q^i} , UY_i , UX_i 的规则^[5,6], 我们有

$$\begin{aligned} W^{q^i} &= \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 + \beta_1 \beta_2 (\beta_3 + \beta_4) \alpha_3 + \alpha_2 (\beta_1 + \beta_2) \beta_3 \beta_4 + \alpha_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 + \alpha_4 \beta_1 \beta_2 \beta_4 \\ &+ \alpha_3 \alpha_4 (\beta_1 + \beta_2) (\beta_3 + \beta_4) + \alpha_2 \alpha_4 (\beta_1 + \beta_2) \beta_3 + \alpha_1 \alpha_3 \beta_2 (\beta_3 + \beta_4) + \alpha_1 \alpha_4 \beta_2 \beta_3, \\ UY_3^{(p)} &= (\alpha_4 + \beta_4) [(\alpha_1 + \beta_1) \beta_2 + \alpha_2 (\beta_1 + \beta_2)], \\ UY_4^{(p)} &= \alpha_3 [(\alpha_1 + \beta_1) \beta_2 + \alpha_2 (\beta_1 + \beta_2)], \\ UY_1^{(p')} &= -\alpha_2 [(\alpha_4 + \beta_4) \beta_3 + \alpha_3 (\beta_3 + \beta_4)], \\ UY_2^{(p')} &= -(\alpha_1 + \beta_1) [(\alpha_4 + \beta_4) \beta_3 + \alpha_3 (\beta_3 + \beta_4)], \\ UX_{13} &= -\alpha_2 (\alpha_4 + \beta_4), \quad UX_{14} = -\alpha_2 \alpha_3, \\ UX_{23} &= -(\alpha_1 + \beta_1) (\alpha_4 + \beta_4), \quad UX_{24} = -\alpha_3 (\alpha_1 + \beta_1). \end{aligned}$$

我们来计算, 例如, 相应于奇性族 $E_1 = (\alpha_4, \alpha_3, \alpha_1)$ 的区域中的领头贡献. 按(24)式作变换后得

$$\begin{aligned} I_{Y1} &= \int \lambda_1^2 d\lambda_1 d\lambda_2 d\alpha_2 d\alpha_3 \prod_{i=1}^4 d\beta_i \frac{(\tilde{U}Y_3^{(p)} - \tilde{U}Y_4^{(p)})(\tilde{U}Y_1^{(p')} - \tilde{U}Y_2^{(p')})}{\tilde{U}[q^2 \tilde{W}^{q^i} - m^2 \tilde{W}^{pp'} + \mu^2(1 + O(\lambda_i, \beta_i, \alpha_2, \alpha_3))]^3}, \\ I_{X1} &= \frac{1}{4} \int \lambda_1 d\lambda_1 d\lambda_2 d\alpha_2 d\alpha_3 \prod_{i=1}^4 d\beta_i \frac{\tilde{U}X_{13} + \tilde{U}X_{24} - \tilde{U}X_{23} - \tilde{U}X_{14}}{\tilde{U}[q^2 \tilde{W}^{q^i} - m^2 \tilde{W}^{pp'} + \mu^2(1 + O(\lambda_i, \beta_i, \alpha_2, \alpha_3))]^3}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{W}^{q'} &= W^{q'}/\lambda^4 \lambda_1^2 \lambda_2, & \tilde{W}^{pp'} &= W^{pp'}/\lambda^4 \lambda_1^2 \lambda_2, \\ \tilde{U}Y_i &= UY_i/\lambda^3 \lambda_1^2 \lambda_2, & \tilde{U}X_{ij} &= UX_{ij}/\lambda^2 \lambda_1 \lambda_2.\end{aligned}$$

做如下的尺度变换 (λ_i 本身是红外组):

$$\begin{aligned}(1) (\beta_1, \beta_2): \rho_1, & \quad (2) (\beta_3, \beta_4): \rho_2, & (3) (\lambda_2, \beta_2): \rho_3, \\ (4) (\alpha_2, \beta_2): \rho_4, & \quad (5) (\alpha_3, \beta_3): \rho_5.\end{aligned}$$

最后取 $\lambda_i, \rho_i \ll 1 (i=1-5)$, 则有

$$\tilde{W}^{q'} \approx \lambda_1 \prod_{i=1}^5 \rho_i, \quad \tilde{W}^{pp'} \approx 0,$$

$$\tilde{U}Y_3^{(p)} \approx \rho_1 \rho_3 \rho_4, \quad \tilde{U}Y_4^{(p')} \approx -\rho_2 \rho_5, \quad \tilde{U}X_{23} = -1.$$

其余的 $\tilde{U}Y_4^{(p)}, \tilde{U}Y_1^{(p')}, \tilde{U}X_{13}, \tilde{U}X_{14}, \tilde{U}X_{24}$ 均导致非领头项, 故略去. 这样我们便得到

$$\begin{aligned}I_{Y1} &= \int_0^1 d\alpha_2 d\alpha_3 d\beta_2 d\beta_3 \delta(1-\alpha_2-\beta_2) \delta(1-\alpha_3-\beta_3) \int_0^1 d\lambda_1 \prod_{i=1}^5 d\rho_i \frac{\lambda_1^2 \prod_{i=1}^5 \rho_i^i}{\left(q^2 \lambda_1^2 \prod_{i=1}^5 \rho_i + \mu^2\right)^3} \\ &= \frac{1}{6!} \frac{1}{(q^2)^3} \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2}\right)^6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{X1} &= \frac{1}{4} \int_0^1 d\alpha_2 d\alpha_3 d\beta_2 d\beta_3 \delta(1-\alpha_2-\beta_2) \delta(1-\alpha_3-\beta_3) \int_0^1 d\lambda_1 \prod_{i=1}^5 d\rho_i \frac{\lambda_1 \prod_{i=1}^5 \rho_i}{\left(q^2 \lambda_1 \prod_{i=1}^5 \rho_i + \mu^2\right)^2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{(q^2)^2} \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2}\right)^6.\end{aligned}$$

注意: 红外组 $\lambda_i, \rho_i (i=1-5)$ 对积分 I_Y 有效长度都是 3, 对积分 I_X 有效长度都是 2. 故图 3 振幅的单 X 项也有领头贡献. 除图 3 之外的六阶图, 没有一个能找到六个对积分 I_X 有效长度为 2 的红外组; 因此其它六阶图的单 X 项均无领头贡献.

在非线性规范下的量子电动力学中, 相应于(41)–(43)三式, 我们有

$$\hat{T}_\mu = \frac{32\alpha^2 e^4}{(-16\pi^2)^3} \bar{u}_{p'} \gamma_\mu u_p [(p \cdot p')^3 \hat{T}_Y + (p \cdot p')^2 \hat{T}_X], \quad (44)$$

其中

$$\hat{T}_Y = \int_0^1 \Pi d\alpha_i \Pi d\beta_j \delta(1 - \sum \alpha_i - \sum \beta_j) \frac{U(Y_3^{(p)} + Y_4^{(p')}) U(Y_1^{(p'')} + Y_2^{(p'')})}{U^4 E_0^3}, \quad (45)$$

$$\hat{T}_X = \int_0^1 \Pi d\alpha_i \Pi d\beta_j \delta(1 - \sum \alpha_i - \sum \beta_j) \frac{U(X_{13} + X_{14} + X_{23} + X_{24})}{4U^3 E_0^2}. \quad (46)$$

将(45), (46)二式与(42), (43)二式比较, 可见: 由于只有 $Y_3^{(p)}, Y_4^{(p')}, X_{23}$ 对领头项有贡献, 故 $\hat{T}_Y, \hat{T}_X$ 的领头项和 I_Y, I_X 的一样. 对图 3 其它的领头积分区域, 也是如此. 因而, 对图 3 而言, 只要做代换

$$g^6 \rightarrow \alpha^2 e^4, \quad f_{abc} \rightarrow 1, \quad T_a \rightarrow 1, \quad (47)$$

就可从非 Abel 规范理论过渡到非线性规范下量子电动力学的相应结果.

五、

用上述计算方法,我们算出有领头贡献的六阶图,如图4—6所示。它们的领头贡献是

$$\Gamma_{\mu}^{(1)} = \frac{1}{15} T_a T_b T_c Q T_c T_b T_a F, \quad (48)$$

$$\Gamma_{\mu}^{(2)} = \frac{2}{15} T_b T_a T_c Q T_c T_b T_a F, \quad (49)$$

$$\Gamma_{\mu}^{(3)} = \frac{3}{15} T_b T_c T_a Q T_c T_b T_a F^*, \quad (50)$$

$$\Gamma_{\mu}^{(4)} = \frac{5}{15} T_c T_b T_a Q T_c T_b T_a F, \quad (51)$$

$$\Gamma_{\mu}^{(5)} = \frac{1}{15} T_a T_c T_b Q T_c T_b T_a F, \quad (52)$$

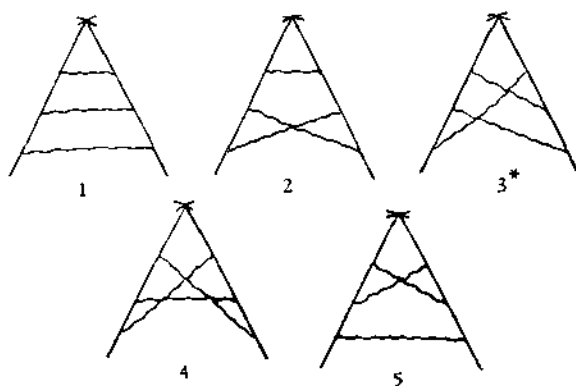


图4 广义梯形图(1)——(5)

(——费米子线, ~~~规范介子线, ×外光子顶点, 有*的每个图还有一个相应与之对称的图)

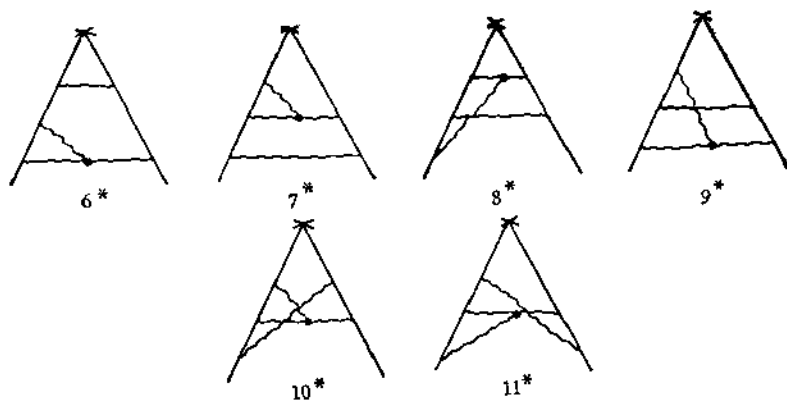


图5 对领头项有贡献的单三顶点图(6)——(11)

(——费米子线, ~~~规范介子线, ×外光子顶点, 有*的每个图还有一个相应与之对称的图)

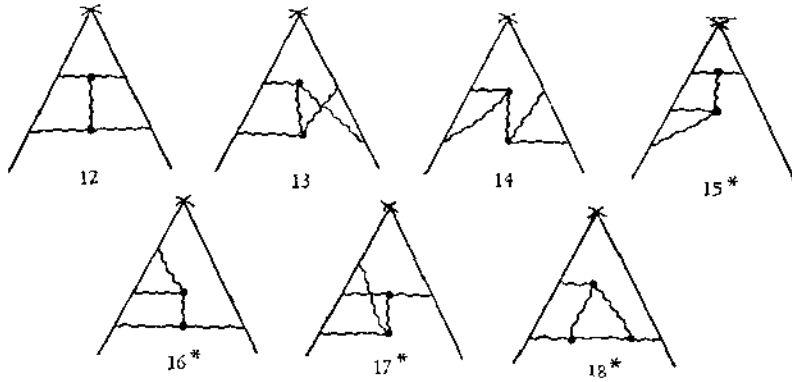


图 6 对领头项有贡献的双三顶点图(12)—(17)以及叁三顶点图(18)
(——费米子线, ~~~~规范介子线, ×外光子顶点, 有*的每个图还有一个相应与之对称的图)

$$\Gamma_{\mu}^{(6)} = i \frac{5}{30} f_{abd} T_d T_c Q T_c T_b T_a F^*, \quad (53)$$

$$\Gamma_{\mu}^{(7)} = i \frac{1}{30} f_{bcd} T_a T_d Q T_c T_b T_a F^*, \quad (54)$$

$$\Gamma_{\mu}^{(8)} = i \frac{3}{30} f_{acd} T_b T_d Q T_c T_b T_a F^*, \quad (55)$$

$$\Gamma_{\mu}^{(9)} = i \frac{8}{30} f_{acd} T_d T_b Q T_c T_b T_a F^*, \quad (56)$$

$$\Gamma_{\mu}^{(10)} = i \frac{8}{30} f_{bcd} T_d T_a Q T_c T_b T_a F^*, \quad (57)$$

$$\Gamma_{\mu}^{(11)} = i \frac{5}{30} f_{abd} T_c T_d Q T_c T_b T_a F^*, \quad (58)$$

$$\Gamma_{\mu}^{(12)} = \frac{6}{60} f_{ade} f_{bce} T_d T_c Q T_b T_a F, \quad (59)$$

$$\Gamma_{\mu}^{(13)} = \frac{5}{60} f_{ace} f_{bde} T_d T_c Q T_b T_a F, \quad (60)$$

$$\Gamma_{\mu}^{(14)} = -\frac{5}{60} f_{abe} f_{cde} T_d T_c Q T_b T_a F, \quad (61)$$

$$\Gamma_{\mu}^{(15)} = -\frac{5}{60} f_{abe} f_{cde} T_d Q T_c T_b T_a F^*, \quad (62)$$

$$\Gamma_{\mu}^{(16)} = \frac{3}{60} f_{ade} f_{bce} T_d Q T_c T_b T_a F^*, \quad (63)$$

$$\Gamma_{\mu}^{(17)} = \frac{5}{60} f_{ace} f_{bde} T_d Q T_c T_b T_a F^*, \quad (64)$$

$$\Gamma_{\mu}^{(18)} = -i \frac{5}{120} f_{ade} f_{bde} f_{cef} T_c Q T_b T_a F^*, \quad (65)$$

其中

$$F = \frac{1}{3!} \left(-\frac{g^2}{16\pi^2} \right)^3 \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^6 \bar{u}_p \gamma_{\mu} u_p. \quad (66)$$

以上诸式中凡带*者还有一个与之对称的图的贡献,后者记为 $\tilde{\Gamma}_\mu^{(i)*}$,它可由 $\tilde{\Gamma}_\mu^{(i)}$ 依如下规则而得到:把所有 T_s 因子(包括 Q)全部颠倒顺序,且把每个 f_{abc} 换为 $f_{cba} = -f_{abc}$.

这些有领头贡献的图的特点是:外光子顶点在费米子线上;没有自能插入;规范介子内线的两端不同在费米子线的入射腿或出射腿上(入射腿和出射腿以外光子顶点为分界);没有规范介子的四线顶点;没有 Higgs 标量粒子;没有虚构标量粒子圈;没有费米子圈.

为了检验我们的结果(48)–(65)式是否正确,我们写出用同样办法算得的非线性规范下的量子电动力学中的相应结果,然后与量子电动力学已知的结果进行比较.三类图形分别讨论.

1. 广义梯形图(见图4):

只要在(48)–(52)式中去掉 T_s 因子,并把 g^6 改为 e^6 ,我们就得到量子电动力学的相应结果:

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}_\mu^{(1)} = \frac{1}{15} F_0, & \tilde{\Gamma}_\mu^{(2)} = \frac{2}{15} F_0, & \tilde{\Gamma}_\mu^{(3)} = \frac{3}{15} F_0, \\ \tilde{\Gamma}_\mu^{(3)*} = \frac{3}{15} F_0, & \tilde{\Gamma}_\mu^{(4)} = \frac{5}{15} F_0, & \tilde{\Gamma}_\mu^{(5)} = \frac{1}{15} F_0, \end{cases} \quad (67)$$

其中

$$F_0 = \left(\frac{e}{g}\right)^6 F = \frac{1}{3!} \left(-\frac{e^2}{16\pi^2}\right)^3 \left(\ln \frac{Q^2}{\mu^2}\right)^6 \bar{u}_{p'} \gamma_\mu u_p. \quad (68)$$

我们的第一个检验是:按照量子电动力学熟知的结果^[2,11],所有六阶广义梯形图的领头项之和,应符合指数化形式;即

$$\tilde{\Gamma}_\mu^{(1)} + \tilde{\Gamma}_\mu^{(2)} + \tilde{\Gamma}_\mu^{(3)} + \tilde{\Gamma}_\mu^{(3)*} + \tilde{\Gamma}_\mu^{(4)} + \tilde{\Gamma}_\mu^{(5)} = F_0, \quad (69)$$

我们见到:(67)式满足这检验,因而(48)–(52)式也满足这一检验.

在量子电动力学中有这样一个定理^[3]:如果在某一低阶顶角图中添加一条光子线,它的两端接在费米子线的出射腿和入射腿上,那么如此得到的所有图形的红外领头项之和,将是该低阶图的领头项乘以 $\left(-\frac{e^2}{16\pi^2}\right) \left(\ln \frac{Q^2}{\mu^2}\right)^2$. 由于这个定理的证明仅涉及光子的传播子和光子-费米子顶点,所以这个定理对于普通的 Feynman 规范和非线性规范(14)式都同样成立.据此定理,在四阶梯形图及交叉梯形图中添加光子线,我们应有:

$$3\tilde{\Gamma}_\mu^{(1)} + 2\tilde{\Gamma}_\mu^{(2)} + \tilde{\Gamma}_\mu^{(3)} + \tilde{\Gamma}_\mu^{(3)*} + 2\tilde{\Gamma}_\mu^{(5)} = F_0, \quad (70)$$

$$\Gamma_\mu^{(2)} + 2\tilde{\Gamma}_\mu^{(3)} + 2\tilde{\Gamma}_\mu^{(3)*} + 3\tilde{\Gamma}_\mu^{(4)} + \tilde{\Gamma}_\mu^{(5)} = 2F_0. \quad (71)$$

这就是我们的第二个检验:(67)式显然满足它,因而(48)–(52)式也通过了这个检验.

2. 单三顶点图(见图5):

在(53)–(58)式中做代换(40)式,则得非线性规范下量子电动力学中的相应结果:

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}_\mu^{(6)} = \frac{5}{30} iF_1, & \tilde{\Gamma}_\mu^{(7)} = \frac{1}{30} iF_1, & \tilde{\Gamma}_\mu^{(8)} = \frac{3}{30} iF_1, \\ \tilde{\Gamma}_\mu^{(9)} = \frac{8}{30} iF_1, & \tilde{\Gamma}_\mu^{(10)} = \frac{8}{30} iF_1, & \tilde{\Gamma}_\mu^{(11)} = \frac{5}{30} iF_1, \end{cases} \quad (72)$$

其中

$$F_1 = -\frac{\alpha}{e} F_0 = \alpha e^5 \frac{1}{3!} \left(-\frac{1}{16\pi^2}\right)^3 \left(\ln \frac{Q^2}{\mu^2}\right)^6 \bar{u}_{p'} \gamma_\mu u_p. \quad (73)$$

据上述定理, 在四阶的单三顶点图中添加光子线, 我们应有

$$\tilde{\Gamma}_{\mu}^{(6)} + \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(7)} + \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(8)} + \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(9)} + \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(10)} + \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(11)} = iF_1. \quad (74)$$

(72) 式满足这检验, 因而 (53) — (58) 诸式, 满足这一检验. 在这类图形中, 所有领头区域的贡献全都是同号的, 因此这一检验获得通过, 使我们有把握说: 在这类图形中我们没有漏掉有领头贡献的积分区域.

3. 双三顶点图 (见图 6):

在这类图形中, 有的领头区域对非 Abel 规范理论和对非线性规范下的量子电动力学的领头项的贡献可以差一个符号. 所以除了做代换 (47) 式外, 还需要仔细考察一下各领头区域内那个 $Y^{(p)}$ 或 $Y^{(p')}$ 的贡献是主要的, 以便确定该区域的贡献在两个理论中是否差一个符号. 经过这样的考察后, 我们得到非线性规范下量子电动力学中相应于 (59) — (64) 诸式的结果如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(12)} = \frac{6}{60} F_2, \quad \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(13)} = \frac{15}{60} F_2, \quad \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(14)} = \frac{5}{60} F_2, \\ \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(15)} = -\frac{5}{60} F_2, \quad \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(16)} = -\frac{3}{60} F_2, \quad \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(17)} = -\frac{5}{60} F_2, \\ \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(15)*} = -\frac{5}{60} F_2, \quad \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(16)*} = -\frac{3}{60} F_2, \quad \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(17)*} = -\frac{5}{60} F_2, \end{array} \right. \quad (75)$$

其中

$$F_2 = \left(\frac{\alpha}{e} \right)^2 F_0 = \alpha^2 e^4 \frac{1}{3!} \left(-\frac{1}{16\pi^2} \right)^3 \left(\ln \frac{q^2}{\mu^2} \right)^6 \bar{u}_p \gamma_{\mu} u_p. \quad (76)$$

注: $\tilde{\Gamma}_{\mu}^{(13)}$ 的系数与 $\Gamma_{\mu}^{(13)}$ 不同, 这是因为 $\Gamma_{\mu}^{(13)}$ 中各领头区域的贡献有正有负, 而在 $\tilde{\Gamma}_{\mu}^{(13)}$ 中那些领头区域的贡献全是同符号的.

在通常的量子电动力学中, 六阶图的领头项仅由广义梯形图给出^[2,11]. 在非线性规范下, 这个结果仍然成立. 因此, 所有单三顶点图之和以及所有双三顶点图之和应当分别等于 0, 因为它们的贡献分别正比于 αe^5 和 $\alpha^2 e^4$. 前一条件是自动满足的 (对单三顶点图, $\tilde{\Gamma}_{\mu}^{(i)*} = -\tilde{\Gamma}_{\mu}^{(i)}$). 后一条件给出

$$\tilde{\Gamma}_{\mu}^{(12)} + \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(13)} + \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(14)} + \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(15)} + \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(15)*} + \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(16)} + \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(16)*} + \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(17)} + \tilde{\Gamma}_{\mu}^{(17)*} = 0. \quad (77)$$

显然, (75) 式是满足 (77) 式的, 因而 (59) — (64) 式也通过了这个颇为曲折的检验. 如果漏掉了 $\Gamma_{\mu}^{(14)}$ 中单 X 项的领头贡献, 那么这一检验绝不能通过.

在检验了这些结果的正确性后, 我们现在对 (48) — (65) 式进行求和. 利用群的对易关系

$$[T_a, T_b] = if_{abc} T_c \quad (f_{abc} \text{ 全反对称}),$$

和 Jacobi 恒等式

$$f_{adc} f_{bce} + f_{bde} f_{cae} + f_{cde} f_{abe} = 0,$$

不难证明 (对于图 4—6 中本身是对称的图 i , 定义 $\Gamma_{\mu}^{(i)*} = 0$):

$$\sum_{i=1}^{11} [\Gamma_{\mu}^{(i)} + \Gamma_{\mu}^{(i)*}] = T_a T_b T_c Q T_c T_b T_a F - \frac{16}{3} [\Gamma_{\mu}^{(16)} + \Gamma_{\mu}^{(16)*}], \quad (78)$$

$$\sum_{i=14}^{18} [\Gamma_{\mu}^{(i)} + \Gamma_{\mu}^{(i)*}] = \frac{26}{6} [\Gamma_{\mu}^{(16)} + \Gamma_{\mu}^{(16)*}], \quad (79)$$