

透平机械长叶片级中的三元流动 (设计和计算)

译 文 集
(一)

《舰船透平锅炉》编辑室

1974年2月

前 言

随着透平机械中级负荷的增加,以及透平的径高比或压气机轮毂比的减小,长叶片气动设计中的三元流动问题日益为人们所重视。由于在50年代及60年代里计算技术的飞速发展,目前三元流动的计算不仅是科研单位的研究分析课题,而且已经在工程设计中获得了广泛的实际应用。

应当指出,透平机械中三元流动的通用计算模型(S_1 及 S_2 流面)及其基本方程早在1952年已由我国吴仲华教授详尽给出。建国以来,中国科学院力学研究所以及有关工厂、院校、研究部门都对长叶片三元流动计算技术十分重视,不但在理论研究和试验分析方面做了不少工作,而且在实际设计工作中也积累了丰富的经验。

根据毛主席“中国人民有志气,有能力,一定要在不远的将来赶上和超过世界先进水平”及“古为今用,洋为中用”的指示,为了适应广大科研技术人员学习、掌握先进技术知识的需要,促进社会主义建设事业的发展,我们翻译出版了这本“透平机械长叶片级中的三元流动(设计和计算)”译文集。

在这本译文集里,我们收集了十四篇国外有关文章。我们的目的是想通过它们对三元流动的两种最常用的方法,即流线曲率法及矩阵通流法的基本理论及其一些初步的实用结果作一较完整的报导。这两种方法基于同一计算模型,但数学处理方法不同,因此各有其优缺点。至于用哪一种方法比较合适,现在尚不宜作一般性的最后结论。从国外有关长叶片工程计算及产品设计的情况来看,流线曲率法的应用比较普遍些。看来其中重要原因之一是:流线曲率法对于跨音速区域的计算较易适应些,而在三元流动计算最为需要的地方,即蒸汽透平后几级及轴流压气机的前几级中,往往都有跨音速区域的存在(在不少例子中, $M=1.6$ 或以上)。

在应用上述二种方法的具体计算程序中,计算站的合理分布、迭代时衰减或松弛系数的取定,对计算的收敛性均密切有关。不同的流线斜率、曲率计算方法及边界条件的选择和规定,对计算结果也有相当影响。在这一方面尚需进一步积累具体的经验。

这本译文集还报导了一些实际应用结果，特别是大家都较感兴趣的控制旋涡流型设计问题。但这些主要还都是有关透平（涡轮）方面的，至于对轴流压气机设计应用方面的文章，因限于篇幅，只能在以后再作专题报导。

我们在自己的一些初步实践中感觉到，三元流动理论及计算技术的发展和改进不是可以减少或代替这一方面的试验研究工作，而是恰恰相反，需要大力加强它（当然应在理论分析指导下有目的地进行）。否则，没有试验依据和试验验证，这些计算模型（它总是被简化了的）是否反映了某种特定过程的本质，是否符合实际情况，总是很难确切知道。理论方法也难以进一步成功发展。其次，即使三元流动计算技术有了重大改进，亦不能说平面叶栅的试验研究已经完全没有必要了。相反，蒸汽透平末级导叶根部及动叶顶部较特殊叶型的试验研究，以及对跨音速压气机叶型的系统性研究，对我们来说，还是具有十分现实的意义。在用三元流动方法进行叶片设计时，目前还普遍感到可靠的系统的试验数据十分缺乏。因此，在以上两个方面，看来都需要我们给予更大的重视，取得更快的进展。

我们不但需要迅速了解国外的水平动态，掌握最新的有用资料，还需要加强国内各兄弟单位之间的联系和交流。希望这本译文集的出版对此也能起到一定的作用。

由于我们的经验和水平都很有限，在这方面的的工作也只处在刚开始摸索的阶段，所以这本译文集中的缺点错误在所难免，希望有关兄弟单位批评指正。此外，不少兄弟单位对本译文集的选题、编译及印刷出版工作提供了很宝贵的帮助，谨在此表示衷心的感谢。

《舰船透平锅炉》编辑室

1974年2月

透平机械长叶片级中的三元流动(设计和计算)

译 文 集

目 录

(一)

1. 透平机械的径向平衡方程——L·H·史密斯……………(1)
2. 求解流体流动问题的流线曲率计算方法——R·A·诺瓦克……(24)
3. 利用矩阵通流方法计算任意透平机械中流体流动的数字计算机
程序——H·马什……………(47)
4. 透平机械中绝热流动时熵的产生——J·H·霍洛克……………(69)
5. 轴对称流动理论在轴流式透平机械中的应用——C·S·穆尔蒂
……………(82)

透平机械的径向平衡方程

(美) L. H. 史密斯

摘 要

本文导出了表示透平机械叶列中间周向平均气流参数沿径向变化的方程式。对方程中的每一项作了物理解释, 它们的数量大小也有例题说明。发现, 环形通道斜角是相当重要的。示出, 用通常的轴对称(无限多叶片数)方法所导致的误差虽与叶片数目有关, 但更大程度上是与负荷水平, 例如升力系数的大小有关, 对所选的例子来说, 此误差是小的。

符 号

- a 声速, 呎/秒
A 流管截面积, 呎²
 c_v 等容比热, 呎²/秒²呎
 c_p 等压比热, 呎²/秒²呎
C 绝对速度, $C = U + W$, 呎/秒
 G, G', G'' 式(39)那种型式的函数, 呎/秒²
h 静焓, 呎²/秒²
i 单位矢
I 滞止转焓, 见式(53), 呎²/秒²
l 沿一流线的轴向弦长, $l = z_{TB} - z_{LB}$, 呎
m 子午方向上的距离, 见式(6), 呎
M 相对马赫数, $M = W/a$
N 叶片数
p 静压, 磅/呎²
P 相对滞止压力, 磅/呎²
 q, u, v, w , 附录 II 中定义的数学变量
Q 单位时间内加给单位质量的热量, 呎²/秒²
r 径向座标, 呎
 r_m 子午面迹线的曲率半径, 式(11), 呎
R 气体常数, 呎²/秒²°R
S 熵, 呎²/秒²°R
t 时间, 秒
T 静温, °R
u 圆周方向上的距离, 呎

U	叶片速度, $U = \omega \times r$, 呎/秒
W	相对速度, 呎/秒
x	瞬时气流方向上的距离, 呎
z	轴向座标, 呎
α	绝对涡旋角, $\tan \alpha = C_u/C_s$, 度
β	相对涡旋角, $\tan \beta = W_u/W_z$, 度
β'	叶片表面和 $r = \text{常数}$ 圆柱面的交线与轴向方向的夹角, 图 2, 度
ϵ	叶片表面斜角, 图 1, 度
θ	周向座标, 度
κ	$\kappa = D^2 r / Dz^2$, 式(37), $1/\text{呎}$
λ	有效面积系数, 式(33)
$\bar{w}_s$	损失率系数, 式(56),
ρ	质量密度, 磅秒 ² /呎 ⁴
σ	见式(41)
φ	子午面倾角, $\tan \varphi = W_r/W_s$, 度
ω	转子角速度, 度/秒

脚注:

h	轮毂
L E	前缘
m	子午面分量, 式(6)
m	平均叶片表面, 图 1
0	相对滞止状态
p	叶片的前表面
r	径向分量
s	叶片后表面
T E	后缘
u	周向分量
x	瞬时流动方向分量
z	轴向分量

算子

d	总微量变化
D	跟踪质点的微量变化
$\bar{D}$	平均流动方向的微量变化, 式(47)
∂	在所指方向或与 t 一起用的座标系中固定点上的梯度
δ	与平均值之差
Δ	相邻叶片表面之差, $\Delta(\) \equiv (\)_s - (\)_p$

前 言

在近代的高速轴流式压气机、燃气涡轮和蒸汽透平中, 环形通道界壁常设计得有大的斜角。由于通道斜度的比较突然的变化以及由于叶片厚度的堵塞梯度、周向旋涡分量及非径向叶片元件, 会造成一定数量级的子午面流线曲率。径向平衡方程的任务即是以令人满意的方式考虑这些现象来描述气流参数的径向变化。

不同的作者对径向平衡方程这个名词赋与了不同的涵义。对某些人(主要是英国人), 它是指径向动量平衡方程的简化形式, 其中除 Cu^2/r 以外, 所有加速度项都被忽略掉了。对另一些人(主要是美国人), 它是指完全径向动量方程, 并整理成适于确定透平机械中流场的形式。本文中采用美国的概念。

本文打算讨论的总的计算程序可以概括如下: 在几个轴向位置($z = \text{常数}$ 的平面)上来分析流动, 并对每一个位置运用径向平衡方程、能量方程和连续方程以确定气流参数从轮毂到外壳的分布。但是, 必须使在各个位置上分别得出的参数分布互相一致, 并使流体质点经某一位置到另一位置时所具有的径向加速度在径向平衡方程中计算进去。这是通过假定子午面流线的形状要在每一位置符合连续方程以及用流线的斜率和曲率表示径向加速度而实现的。这显然意味着要用逐次逼近解法。

这种总的程序最先是由特劳佩尔[1]建议并由吴仲华[2]独立地想出的, 也许还有其他人也提出过。它已被广泛应用。本文的一个目的是给出轴对称径向平衡方程的精确形式(文中所谓的精确系指在下一节所作的假定的范围之内而言), 此方程能用于位于叶列外的轴向位置上并只包括对 r 的导数, 虽然也需要用到 r_m , 它在某种意义上说来也是导数。这一精确方程首先由通用电气公司的H. N. 坎特雷尔在1952年前后推得, 并由本文作者在1954年独立地导出。就作者所知, 此精确形式从前从未发表过。第二个目的则是通过补加几个项来扩充方程使能用到叶列中间去。通用电气公司自1959年以来就应用了这一形式的方程。

从本文的推导中可以看出流动的三元性质。径向平衡方程首先变换成只包含对 r 和 ϑ 的偏导数(虽然也用到 r_m)的形式, 然后通过从一个叶片的压力面到邻近叶片的负压面对 ϑ 积分求取周向平均。除当叶片负荷减少时消失的某些附加项外, 最终方程与用体积力来表示叶片的作用的轴对称分析所求得的结果具有同样的形式, 这实质上与鲁登[3]所用的消去 ϑ 变数的方法一样。因此, 设计人员广泛采用的轴对称方法由本文至少得到了部份验证。没有对流动的进一步的了解, 那些附加项是推导不出来的, 但是为了便于作近似计算, 假定某些量随 ϑ 作线性变化。文中举了一个例子来说明中等叶片负荷的压气机中那些附加项的大小。

三元方程的推导

在推导中作了以下假定:

- (1) 流体是无摩擦(无粘性)的;
- (2) 转子为刚体并以等角速度 ω 旋转;
- (3) 有热量可逆地加给流体;
- (4) 流体是半理想气体, 即状态方程为

$$p = \rho RT \quad (1)$$

其中, R 为常数, 比热只与温度有关, 此假定直到式(24)才用到, 而且若无热量加入也不必作此假定;

(5) 流体相对于转子是稳定的, 此假定直到式(30)才用。

因此在流体中可以有旋量、熵的梯度和滞止焓的梯度。

相对于以等角速度 ω 绕 z 轴转动的参考坐标系, 对非粘性流体而言, 牛顿第二运动定理为:

$$-\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{DW}{Dt} - \omega^2 r + 2\omega \times W \quad (2)$$

运用相对圆柱坐标系 r 、 ϑ 和 z 要来得方便些, 其中 ϑ 是相对于转动坐标系测量的并且沿着转动方向增加。用座标方向的单位矢量取式(2)中的标量积就可以得出三个分方程。也要用到下列单位矢量的导数:

$$\frac{Di_r}{Dt} = \frac{W_\vartheta}{r} i_\vartheta \quad \text{及} \quad \frac{Di_\vartheta}{Dt} = -\frac{W_r}{r} i_r$$

以及运动学关系:

$$\frac{D(\quad)}{Dt} = W \frac{D(\quad)}{Dx} \quad (3)$$

在这些式子中, 大写 D 算子表示流体质点在微分时仍在跟踪着。于是便可得出。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = W \frac{DW_r}{Dx} - \frac{(W_\vartheta + \omega r)^2}{r} \quad (2a)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \vartheta} = W \frac{DW_\vartheta}{Dx} + \frac{W_r W_\vartheta}{r} + 2\omega W_r \quad (2b)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = W \frac{DW_z}{Dx} \quad (2c)$$

利用替代式:

$$C_\vartheta = W_\vartheta + \omega r \quad (4)$$

也可把式(2a)和(2b)写成

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = W \frac{DW_r}{Dx} - \frac{C_\vartheta^2}{r} \quad (2d)$$

及

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \vartheta} = \frac{W}{r} \frac{D}{Dx} (r C_\vartheta) \quad (2e)$$

现在我们也写出, 例如:

$$W \frac{D(\quad)}{Dx} = W_z \frac{D(\quad)}{Dz} \quad (5)$$

它可理解为 Dz 代表当质点在气流方向移动距离 Dx 时质点在 z 座标上具有的增量。可以对所需要的任何方向写出像式(5)那样的式子。这里特别感兴趣的一个方向乃是用下式表示的子午面方向:

$$i_m Dm = i_z Dz + i_r Dr \quad (6)$$

这样便可写出:

$$W \frac{D(\quad)}{Dx} = W_m \frac{D(\quad)}{Dm} \quad (7)$$

把这个关系式用到式(2d)中, 可得

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = W_m \frac{DW_r}{Dm} - \frac{C_u^2}{r} \quad (8)$$

此外, 因为

$$W_r = W_m \sin \varphi \quad (9)$$

式(8)可写成

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{C_u^2}{r} - W_m^2 \frac{D \sin \varphi}{Dm} - W_m \sin \varphi \frac{DW_m}{Dm} \quad (10)$$

而

$$\frac{D \sin \varphi}{Dm} = \cos \varphi \frac{D\varphi}{Dm}$$

又因 φ 是轴向与子午面迹线方向(它是由把质点轨迹投影到 $\vartheta = \text{常数}$ 的子午面上得出的)的夹角, 量 $D\varphi/Dm$ 乃是子午面迹线的曲率, 于是

$$\frac{D\varphi}{Dm} = -\frac{1}{r_m} \quad (11)$$

这个负号是在定义 r_m 时任意选的, 由此定义, 再利用式(9), 式(10)就变成

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{C_u^2}{r} + \cos \varphi \frac{W_m^2}{r_m} - W_r \frac{DW_m}{Dm} \quad (12)$$

在这里我们提一下当最后一项略去不计时, 式(12)作为近似径向平衡方程常被用来分析轴流式透平机械, 这种近似常是相当精确的, 因为 W_r 通常不大, 且 W_m 在 m 方向往往并不剧烈变化。另一方面, 也有它并不是如此的情况(见后面“说明各项大小的实例”一节), 并且我们将看到, 把末项正式包括进去并不会额外复杂多少, 至少对任一叶列外面的位置(截面)是如此, 见式(31)。

本节剩下的任务是用子午面迹线的斜率和曲率来表示 DW_m/Dm 。因为在引言中提到过的计算程序中, 当利用径向平衡方程时, 这些量是假定已知的。对 ϑ 和 t 的偏导数也可能出现, 因为流动的三元和非稳定性至少是暂时被保留着。在实现这个任务时, 我们必须要用连续方程、状态方程和热力学定律, 也需要再次运用动量方程。

为此目的, 连续方程最有用的形式是:

$$\frac{W}{\rho} \frac{D\rho}{Dx} + \Delta \cdot W = 0 \quad (13)$$

在圆柱坐标系中

$$\Delta \cdot W = \frac{1}{r} \frac{\partial(rW_r)}{\partial r} + \frac{\partial W_u}{r \partial \vartheta} + \frac{\partial W_s}{\partial z} \quad (14)$$

在某一瞬时, 一个量在流动方向(x 方向)的导数可以表示为

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial x} = \frac{W_r}{W} \frac{\partial(\quad)}{\partial r} + \frac{W_u}{W} \frac{\partial(\quad)}{r \partial \vartheta} + \frac{W_s}{W} \frac{\partial(\quad)}{\partial z} \quad (15)$$

或者改写成

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial z} = \frac{W}{W_s} \frac{\partial(\quad)}{\partial x} - \frac{W_r}{W_s} \frac{\partial(\quad)}{\partial r} - \frac{W_u}{W_s} \frac{\partial(\quad)}{r \partial \vartheta} \quad (15a)$$

把式(15a)与式(14)连用以消去对 z 的导数。结果可表示为

$$\Delta \cdot W = W_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r W_r}{W_z} \right) + \frac{\partial}{r \partial \vartheta} \left(\frac{W_u}{W_z} \right) \right] + \frac{W}{W_z} \frac{\partial W_z}{\partial x}$$

因为

$$\frac{W_r}{W_z} = \tan \varphi, \quad \frac{W_u}{W_z} = \tan \beta$$

故又可写成

$$\Delta \cdot W = W_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r \tan \varphi)}{\partial r} + \frac{\partial \tan \beta}{r \partial \vartheta} \right] + \frac{W}{W_z} \frac{\partial W_z}{\partial x} \quad (16)$$

由于

$$\frac{D(\quad)}{Dt} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + W \frac{\partial(\quad)}{\partial x} \quad (17)$$

利用式(3), 它的写成

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial x} = \frac{D(\quad)}{Dx} - \frac{1}{W} \frac{\partial(\quad)}{\partial t} \quad (18)$$

它将用于式(16)中之末项。同样, 因为

$$W_z = W_m \cos \varphi \quad (19)$$

可得

$$\frac{\partial W_z}{\partial x} = \frac{D}{Dx} (W_m \cos \varphi) - \frac{1}{W} \frac{\partial W_z}{\partial t}$$

再利用式(7)进一步分析可给出

$$\frac{\partial W_z}{\partial x} = \frac{W_m^2}{W} \frac{D \cos \varphi}{Dm} + \cos \varphi \frac{W_m}{W} \frac{DW_m}{Dm} - \frac{1}{W} \frac{\partial W_z}{\partial t}$$

把它代入式(16), 再利用式(9)、(11)和(19), 可得

$$\begin{aligned} \Delta \cdot W = & W_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r \tan \varphi)}{\partial r} + \frac{\partial \tan \beta}{r \partial \vartheta} \right] + W_r \frac{\sec \varphi}{r_m} \\ & + \frac{DW_m}{Dm} - \frac{1}{W_z} \frac{\partial W_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (20)$$

这就是所希望的 $\Delta \cdot W$ 的形式。

我们再应用流动方向上的动量方程, 取 W 和式(2)的标量积可得:

$$-\frac{W}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{W^2}{2} \right) - \omega^2 r W r \quad (21)$$

利用式(18)、(7)和(3)以及

$$W^2 = W_m^2 + W_u^2$$

便可写成

$$-\frac{W}{\rho} \frac{Dp}{Dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = W_m^2 \frac{DW_m}{Dm} + W_u W \frac{DW_u}{Dx} - \omega^2 r W r \quad (22)$$

另外, DW_u/Dx 项可用式(2b)加以消除, 在并项及利用式(4)后, 式(22)变成

$$-\frac{W}{\rho} \frac{D\rho}{Dx} = W_m^2 \frac{DW_m}{Dm} - W_r \frac{C_u^2}{r} - \frac{W_u}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \vartheta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (23)$$

这就是所需要的形式。

如果没有热量加入，当质点单独运动时熵将为常值，而我们将能利用

$$\frac{Dp/Dx}{D\rho/Dx} = a^2$$

的关系，其中 a 为声速。然后这个关系又能与式(13)、(20)和(23)同时求解以得出不包含 $\Delta \cdot W$ 、 Dp/Dx 或 $D\rho/Dx$ 的 DW_m/Dm 表示式而且将用不着状态方程，然而因为想要把热添加包括进去，我们就得求助于假定(4)，它使我们能够写出

$$TdS = \frac{C_v}{R} \frac{dp}{\rho} - C_p T \frac{d\rho}{\rho} \quad (24)$$

及

$$a^2 = \frac{C_p}{C_v} RT \quad (25)$$

把式(24)用于单独运动的质点并利用式(25)，可写出

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dx} = \frac{1}{\rho a^2} \frac{Dp}{Dx} - \frac{1}{C_p} \frac{DS}{Dx} \quad (26)$$

当单位时间单位质量加入的可逆热量为 Q' 时，热力学第二定律给出

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{Q'}{T} \quad (27)$$

用式(27)和(3)，便可把式(26)变成

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dx} = \frac{1}{\rho a^2} \frac{Dp}{Dx} - \frac{Q'}{W c_p T} \quad (28)$$

现在把式(13)、(20)、(23)和(28)联立起来，消除 $\Delta \cdot W$ 、 $D\rho/Dx$ 和 Dp/Dx 以求解 DW_m/Dm ，再把它代入式(12)，在把某些项合并及引入马赫数之后，便得出

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = & \left(\frac{1 - M_s^2}{1 - M_m^2} \right) \left(\frac{C_u^2}{r} + \sec \varphi \frac{W_m^2}{r_m} \right) + \frac{W_r}{1 - M_m^2} \\ & \left\{ W_s \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r \tan \varphi)}{\partial r} + \frac{\partial \tan \beta}{r \partial \vartheta} \right] - \frac{Q'}{c_p T} \right. \\ & \left. + \frac{W_u}{\rho a^2} \frac{\partial p}{r \partial \vartheta} + \frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{W_s} \frac{\partial W_s}{\partial t} \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

这就是三元非稳定径向平衡方程的一般形式。

下一步是假定流动相对于转子是稳定的，所以式(29)括弧中末两项可以略去，当我们如此做时，进行下述观察常是颇有意思的：假定我们在开始时便决定不用转动座标而用固定座标来求导。重温一下式(2)到式(29)便发现这样做后的结果是，新的方程式(29)，我们称之为式(29a)，看起来将与式(29)一样，只是 W 将被 C 代替， β 将被 α 代替而已。如果流动相对于转子是稳定的，则它在绝对座标中便将是非常不稳的，至少在动叶列内部是如此。事实上，当相对流动为稳定时我们可写出：

$$\left. \frac{\partial(\quad)}{\partial t} \right|_{\text{绝对坐标系}} = -\omega \frac{\partial(\quad)}{\partial \vartheta} \quad (30)$$

把它用于式(29 a)中,在大括弧中便出现下列项的组合:

$$\frac{(C_u - \omega r)}{\rho a^2} \frac{\partial p}{r \partial \vartheta} + C_z \frac{\partial}{r \partial \vartheta} \left(\frac{C_u}{C_z} \right) + \frac{\omega r}{C_z} \frac{\partial C_z}{r \partial \vartheta}$$

因为 $C_u = W_u + \omega r$ 及 $C_z = W_z$, 它又可写成

$$\frac{W_u}{\rho a^2} \frac{\partial p}{r \partial \vartheta} + W_z \frac{\partial}{r \partial \vartheta} \left(\frac{W_u}{W_z} \right)$$

它们与式(29)中对 ϑ 的导数项相对应,并从实质上为式(29)中的非稳定项提供了证明。

引言中叙述的总的计算程序时常被应用于计算截面只是处于叶列之外的场合。对这些截面,有理由忽略式(29)中对 ϑ 的导数项,至少在用圆周方向平均值时可以如此。热添加项在这里也可忽略。在这些条件下,式(29)或(29 a)可写成:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = & \left(\frac{1 - M_z^2}{1 - M_m^2} \right) \left(\frac{C_u^2}{r} + \sec^2 \varphi \frac{C_z^2}{r_m} \right) + \\ & + \frac{C_z^2 \tan \varphi}{(1 - M_m^2) r} \frac{\partial(r \tan \varphi)}{\partial r} \end{aligned} \quad (31)$$

这就是引言中援引的轴对称径向平衡方程的精确形式。从式(29)的导数中可以清楚看出,如果我们开始时假定稳定轴对称无摩擦绝热流动,那就无须作进一步近似就可以得出式(31)。

周向平均方程

在很多工程应用中,由于极大的复杂性,严格地处理问题是行不通的。在透平机械叶列中,因为在所有三个分方向上都有大的速度和热力参数梯度存在,流动完全是三元的。大多数设计方法处理问题是由二个或更多的二元组合体构成三元结构。对透平机械设计来说,最重要的组合体是相邻叶片间通道流动模型(叶栅流动),后者直接处理叶片对流体的转折作用。我们这里考虑的径向平衡分析把沿叶高的不同位置彼此联系起来,所以在这些位置上建立起来的叶间通道流动能妥善共存。

现在有可能利用先前的近似分析结果由式(29)计算流场中任意点的压力梯度,并且通过逐次逼近过程这些压力变化可能与叶间通道解的压力变化相符合。正确地这样做将是一项工作量惊人的工作。从实用观点来看,仅在圆周方向平均的基础上来满足径向平衡方程将常常是足够了。在本文后面的部份中将遵循这种方法。对式(29)在圆周方向从一个叶片的压力面到邻近叶片的负压面积分以求出平均值。任何量的平均值的定义为(见图1)

$$\overline{(\quad)} = \frac{1}{\vartheta_s - \vartheta_p} \int_{\vartheta_p}^{\vartheta_s} (\quad) d\vartheta \quad (32)$$

此积分应始终是从一个叶片的前表面(p 表面)到其前的叶片的后表面(s 表面)进行。图1示有压气机或泵的转子,对透平转子来讲, p 表面实际上将是负压面而 s 表面将是压力面。

在进行平均之前,引入数量 λ 将是有益的。它是开放圆周与总圆周之比,于是(见图1)

$$\lambda = \frac{N}{2\pi} (\vartheta_s - \vartheta_p) \quad (33)$$

图1也规定了平均叶片表面 它也将是有益的。压力面和负压面通过下列方程与之发生关系。

$$\vartheta_p = \vartheta_m + \frac{\pi}{N}(1 - \lambda) \quad (34)$$

$$\text{及} \quad \vartheta_s = \vartheta_m - \frac{\pi}{N}(1 - \lambda) + \frac{2\pi}{N} \quad (35)$$

斜角由下式给出:

$$\tan \epsilon_m = -r \frac{\partial \vartheta_m}{\partial r} \quad (36)$$

负号是必要的,因为如图1所示, ϵ 对后弯式叶片来说取成正的。

现在我们要进行平均。在对式(29)积分之前,把它乘以 $(1 - M_m^2)$,再用 $\sec^2 \varphi W_s^2$ 代替 W_m^2 ,并利用曲率半径与二次导数的关系可得出

$$\sec \varphi \frac{W_m^2}{r_m} = - \frac{D^2 r}{D z^2} W_s^2 \quad (37)$$

同样,非稳定流动项是忽略了。于是,利用式(32)得出了式(29)的积分,

$$F_0 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 \quad (38)$$

其中,

$$F_0 \equiv \overline{\left[(1 - M_m^2) \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right]} \quad (38a)$$

$$F_1 \equiv \frac{1}{r} \overline{\left[(1 - M_s^2) C_u^2 \right]} \quad (38b)$$

$$F_2 \equiv - \overline{\left[(1 - M_s^2) \frac{D^2 r}{D z^2} W_s^2 \right]} \quad (38c)$$

$$F_3 \equiv \frac{1}{r} \overline{\left\{ W_r W_s \left[\frac{\partial (r \tan \varphi)}{\partial r} + \frac{\partial \tan \beta}{\partial \theta} \right] \right\}} \quad (38d)$$

$$F_4 \equiv - \overline{\left(W_r \frac{1}{C_p} \frac{Q'}{T} \right)} \quad (38e)$$

$$F_5 \equiv \frac{1}{r} \overline{\left(M_r M_u \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \right)} \quad (38f)$$

F 函数乃是乘积的平均值。它们也可以如附录I所示用平均值的乘积来表示,例如,对变数 q, u, v 可以写出:

$$F \equiv \overline{\left[(1 - q^2) uv \right]} = (1 - \overline{q^2}) \overline{u} \overline{v} + G(q, u, v) \quad (39)$$

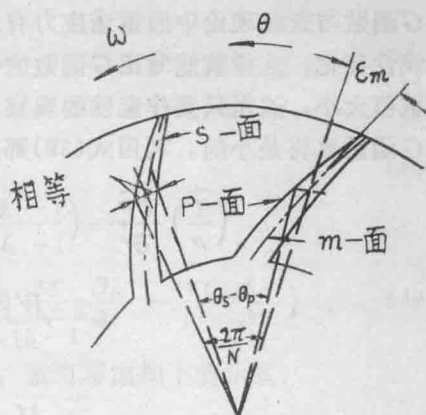


图1 由 $z = \text{常数}$ 平面切出的截面

G 函数与紊流理论中的雷诺应力有点相象。在附录 I 中, 假定了 q 、 u 、 v 那样的变数随 ϑ 作线性变化, 这样就能写出 G 函数的特定公式。它们将在第五节中介绍, 而数字实例将说明其数值大小。这里只要作定性的观察就足够了。那就是当 q 、 u 和 v 沿叶间通道的变化小时, G 函数也将是小的。利用式(39)那样的方程与式(38)可得出:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = & \left(\frac{1 - \overline{M_z^2}}{1 - \overline{M_m^2}}\right) \left(\frac{\overline{C_u^2}}{r} - \frac{\overline{D_z^2 r}}{D_z^2} \overline{W_z^2}\right) \\ & + \frac{\overline{W_r}}{1 - \overline{M_m^2}} \left[\frac{\overline{W_z \sigma}}{r} - \left(\frac{1}{C_p}\right) \left(\frac{\overline{Q'}}{T}\right) \right] \\ & + \frac{\overline{M_r M_u}}{r(1 - \overline{M_m^2})} \left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \vartheta} \\ & + \frac{-G_0 + G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5}{1 - \overline{M_m^2}} \end{aligned} \quad (40)$$

其中,

$$\sigma = \frac{\partial(r \tan \varphi)}{\partial r} + \frac{\partial \tan \beta}{\partial \vartheta} \quad (41)$$

现在再把式(40)中包含偏导数平均值的项变换成更有用的形式。径向压力梯度的平均值可写成:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = & \frac{1}{\vartheta_s - \vartheta_p} \int_{\vartheta_p}^{\vartheta_s} \frac{\partial p}{\partial r} d\vartheta \\ = & \frac{1}{\vartheta_s - \vartheta_p} \left(\frac{\partial}{\partial r} \int_{\vartheta_p}^{\vartheta_s} p d\vartheta - p_s \frac{\partial \vartheta_s}{\partial r} + p_p \frac{\partial \vartheta_p}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

利用式(32)到(36)。它就变成

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{p_s - p_p}{\vartheta_s - \vartheta_p} \right) \frac{\tan \epsilon_m}{r} + \left(\frac{p}{p} - \frac{p_p + p_s}{2} \right) \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \quad (42)$$

式(42)右端第一项是所需要的平均压力的径向梯度。第二项与作用在流体上的叶片力的径向分量有关。最后一项当压力随 ϑ 线性变化时消失, 故它可以忽略掉。

对 σ 也用类似方法处理, 可以写出

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = & \frac{\vartheta_s - \vartheta_p}{1} \left(\frac{\partial}{\partial r} \int_{\vartheta_p}^{\vartheta_s} r \tan \varphi d\vartheta - r \tan \varphi_s \frac{\partial \vartheta_s}{\partial r} \right. \\ & \left. + r \tan \varphi_p \frac{\partial \vartheta_p}{\partial r} + \tan \beta_s - \tan \beta_p \right) \end{aligned}$$

利用式(32)及式(36)那样的方程, 它就变成

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = & \frac{1}{\vartheta_s - \vartheta_p} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[(\vartheta_s - \vartheta_p) r \tan \varphi \right] + \tan \beta_s + \tan \varphi_s \tan \epsilon_s \right. \\ & \left. - \tan \beta_p - \tan \varphi_p \tan \epsilon_p \right\} \end{aligned} \quad (43)$$

再用图2中示出的关系引入 β' 角。因为

$$\tan \beta_s' = r \frac{\partial \vartheta_s}{\partial z} \quad (44)$$

及

$$\tan \beta_p' = r \frac{\partial \vartheta_p}{\partial z} \quad (45)$$

借助式(33)可写出

$$\overline{\sigma} = \frac{\partial(r \overline{\tan \varphi})}{\partial r} + \frac{1}{\vartheta_s - \vartheta_p} \left(r \overline{\tan \varphi} \frac{2\pi}{N} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{2\pi r}{N} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) \quad (46)$$

如果我们规定一个在子午面上与 $\tan \varphi$ 有关的方向,就可写出如下表示式:

$$\frac{\overline{D}(\quad)}{Dz} = \frac{\partial(\quad)}{\partial z} + \overline{\tan \varphi} \frac{\partial(\quad)}{\partial r} \quad (47)$$

此处 $\overline{D}$ 表示一个量在 $\overline{\tan \varphi}$ 方向上的变化。把式(47)应用于(46)中的 λ ,再利用式(33),可得

$$\overline{\sigma} = \frac{\partial(r \overline{\tan \varphi})}{\partial r} + \frac{r}{\lambda} \frac{\overline{D}\lambda}{Dz} \quad (48)$$

当叶片厚度分布及平均子午面流动方向为已知时,式(48)就能方便地算出。

最后,

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\vartheta_s - \vartheta_p} \int_{\theta_p}^{\theta_s} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} d\vartheta = \frac{p_s - p_p}{\vartheta_s - \vartheta_p} \quad (49)$$

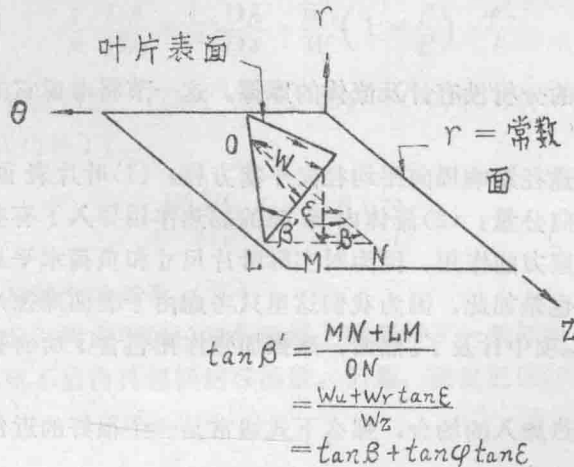


图2 气流角、 β 和叶片与 $r = \text{常数}$ 平面交角 β' 之关系

现把式(42)、(48)和(49)代入式(40):

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial \overline{p}}{\partial r} = & \left(\frac{1 - M_\infty^2}{1 - M_m^2} \right) \left(\frac{C_u}{r} - \frac{\overline{D}^2 r}{D z^2} \overline{W}_z^2 \right) \\ & + \frac{\overline{W}_r}{1 - M_m^2} \left\{ \overline{W}_z \left[\frac{\partial(r \overline{\tan \varphi})}{r \partial r} + \frac{1}{\lambda} \frac{\overline{D}\lambda}{Dz} \right] - \left(\frac{1}{C_p} \right) \left(\frac{\overline{Q}'}{T} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{p_s - p_p}{\vartheta_s - \vartheta_p} \right) \frac{1}{r} \left(\frac{\overline{M}_r \overline{M}_u}{1 - M_m^2} - \tan \epsilon_m \right) \\ + \frac{-G_0 + G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5}{1 - \overline{M}_m^2} \quad (50)$$

除了式(42)的末项是忽略掉了以外,这就是径向平衡方程的精确形式。若把它与一开始就假定流动是轴对称时得出的方程相比较,那是很有意思的。为此,就需要用分布的体积力场来表示叶片的作用,并用分布的阻塞度来表示叶片厚度。这里不加推导而给出其结果:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \left(\frac{1 - M_s^2}{1 - M_m^2} \right) \left(\frac{C_u^2}{r} - \frac{D^2 r}{D z^2} W_z^2 \right) \\ + \frac{W_r}{1 - M_m^2} \left\{ W_z \left[\frac{\partial(r \tan \varphi)}{r \partial r} + \frac{1}{\lambda} \frac{D \lambda}{D z} \right] - \frac{Q'}{C_p T} \right\} \\ - F_u \frac{M_r M_u}{1 - M_m^2} + F_r \quad (51)$$

其中, F_u 和 F_r 是单位质量的体积力的切向和径向分量。可见当沿叶片的压力差实际上就是子午面上单位面积的力时,式(50)和(51)是一致的。距离 $r(\vartheta_s - \vartheta_p)$ 是流体体积的第三尺寸,此力就是实际作用于此体积上的,而密度的出现便使此力成为作用于单位质量流体上。式(50)和(51)的吻合意味着,如果导出的数量被解释为圆周方向的平均,以及如果式(50)中的 G 函数可以被忽略的话,对流动的轴对称处理将是正确的(基于第二节中的假定)。在第五节中我们要研究这些函数的数值大小。

摩擦的影响

为简单起见,迄今的分析没有计及流体的摩擦。这一节将考虑它的影响,但从实用出发将作一定的近似。

摩擦主要通过两条途径影响周向平均径向平衡方程:(1)叶片表面上的剪应力矢量通常有一作用于流体上的径向分量;(2)流体内摩擦的加热作用导入了有些象由于逆加热而产生的项。这里建议忽略剪应力的作用,因为对实际叶片尺寸和负荷水平来说它是很小的。即使阻力系数可能相当高时也是如此,因为我们这里只考虑由于表面摩擦产生的那部份阻力。压力阻力已在式(50)中 ϵ_m 项中计及了。然而,摩擦加热作用包含了所有损失,包括冲激波损失。此处将作近似的处理。

让我们考虑没有外热加入的场合,那么下式通常是一个很好的近似:

$$\frac{DI}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (52)$$

其中 I 为滞止转焓(这个恰当但不太出名的名词是由吴仲华[4]引入的),其定义为:

$$I \equiv \frac{W^2}{2} + h - \frac{U^2}{2} \quad (53)$$

如果在第二章的分析中用式(52)代替式(21),并且采用式(26)(即使有摩擦的话也用),那么式(23)就变成:

$$-W \frac{Dh}{Dx} = W_m^2 \frac{DW_m}{Dm} - W_r \frac{C_u^2}{r} - \frac{W_u}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (54)$$

相当于式(26)的类似的方程为

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dx} = \frac{1}{a^2} \frac{Dh}{Dx} - \frac{1}{R} \frac{Ds}{Dx} \quad (55)$$

这里熵的变化是由摩擦造成的, 因此用当地损失率系数来表示它是合适的。所选择的损失率系数定义为

$$\bar{\omega}_s = \frac{-l}{P-p} \left[\frac{Dp}{Dz} - \frac{DP_{ideal}}{Dz} \right] \quad (56)$$

其中, l 为从前缘到后缘 z 座标上的总变化, DP_{ideal} 是当等熵过程时在转动坐标系中由于半径的微量变化所引起的相对滞止压力的微量变化。利用

$$T_0 Ds = c_p DT_0 - \frac{1}{\rho_0} DP \quad (57)$$

$$\frac{DP_{ideal}}{p} = \frac{c_p}{R} \frac{DT_0}{T_0} \quad (58)$$

及状态方程, 我们可以得出

$$\frac{1}{R} \frac{Ds}{Dx} = \frac{W_s}{W} \left(1 - \frac{p}{P} \right) \frac{\bar{\omega}_s}{l} \quad (59)$$

把它与式(55)联立, 可得

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dx} = \frac{1}{a^2} \frac{Dh}{Dx} - \frac{W_s}{W} \left(1 - \frac{p}{P} \right) \frac{\bar{\omega}_s}{l} \quad (60)$$

它与式(28)类似。把式(12)、(13)、(20)、(54)及(60)联立就可导致象式(29)那样的方程, 只是 Q' 项是被下式代替了:

$$-\frac{W_r W_s}{1 - M_m^2} \left(1 - \frac{p}{P} \right) \frac{\bar{\omega}_s}{l} \quad (61)$$

括弧中的数量只是马赫数的函数。

当取了周向平均之后, 构成项(61)的各数量上就都带了一条杠而 G 函数也产生了。由于分析反正是近似的, 也就不值得再包括这 G 函数。但是, 建议把项(61)加到式(50)和(51)的右项去。

各项的物理解释

在本节中, 我们要把式(50)应用于从物理概念上容易理解的流型中去。每一种流型将如此选择, 即除了正被研究的项以外所有其它项都将为零值。目的不在于提供逐项的推导或计算校核, 而是为了表示各项的合理性及其必要性。这里就不考虑 G 项了。

在把每项单独取出讨论之前, 我们注意到除了一项以外, 所有项在分母中都含有量 $(1 - M_m^2)$, 当子午面马赫数接近于 1 时, 便发生奇特的性质。因为当我们规定了 φ 的径向和