

套管设计原理

大学(北京)

石油工业部科学技术情报研究所

新
子
知
船
学
PDG

1114

套管设计原理

李继康 译



200480292



石油工业部科学技术情报研究所

说 明

这份材料是美国Amoco公司Pattillo先生一九八一年十一月份应邀来北京进行讲学的讲稿。对油田进行套管设计及如何选用套管颇有参考价值，故将它译出供大家参考。

这份材料在美国尚未正式发表，应作者要求不以正式书刊发行，请读者不要在文章中以文献形式指名引用，并不得泄露给任何外宾，以免给作者带来困难。由于它有一定的实际使用价值，作者同意我们译出和使用。请读者在使用时严加注意。

原稿中没有第五章：连接强度。作者尚未脱稿。讲课中作了简单介绍。故这里也没有译出。

一九八二年四月

目 录

第一章 绪论	1
1.1 范围	1
1.2 套管分类	2
1.3 套管柱的组成	3
1.4 预计的负荷	3
1.5 失效方式	5
1.6 文章的组织	5
第二章 基本方程式	6
2.1 引言	6
2.2 应变—位移的关系	6
2.3 应力和平衡方程式	10
2.4 应力—应变的关系	13
2.5 厚壁筒的加载和变形	21
2.6 薄壁筒的近似解法	26
2.7 与环境变化有关的应力	30
2.8 弯曲应力	33
第三章 破裂	35
3.1 引言	35
3.2 基本方程式	36
3.3 抗破裂设计	38
3.4 例	43
第四章 挤毁	46
4.1 引言	46
4.2 基本方程式	47
4.3 挤毁设计	54
4.4 例	57
第五章 连接强度 (原文缺)	
第六章 柱状弯曲	59
6.1 引言	59
6.2 稳定性和中和点	60
6.3 后弯曲形状	69
6.4 例	78
第七章 设计举例	80
7.1 引言	80
7.2 设计 1——中间套管, 垂直井筒	81
7.3 设计 2——生产套管, 垂直井筒	94
7.4 设计 3——从设计 2 得到的生产套管, 计入发生于未固水泥段中的附加轴向力	100
7.5 设计 4——表层套管, 海上油井	115

第一章 绪 论

1.1. 范围

如同书名的含意那样, 本文的目的在于详细描述影响油井套管设计的那些工程上的原理。讨论的大部分内容将集中在给读者提供一个明确的固体力学的基本概念上。现代套管设计就是建立在这个基础上的。

把本书的范围限制在一些基本概念上, 从而忽略掉对大量的套管设计中一些专门的实践概念的讨论。有关这些问题的讨论在很多文献上已经有了。然而, 如果在套管设计的基础概念方面没有足够的经历, 而只是研究一些特别的应用, 也会得出不正确的和错误的结论。这里所提出的基本概念是对某个特定地区的特异性进行研究之前就应该掌握的问题。有很多专门定向的论文, 读者可以根据自己的积极性以及根据自己所感兴趣的特定油田的地理位置和油田环境去仔细阅读。

本书是为三种读者对象而写的。如表1.1所表示的那样, 推荐的涉及深度将是读者过去的工作经历和当前工作任务的直接函数。例如, 当这个材料用作大学或短期培训教材时, 建议读者应努力使自己完全了解套管设计所包括的每个概念。在文章的一些部分中有很长的公式推导运算, 只要已经掌握了最终数学表达式中各组成部分的来源和含义, 相对地说, 那些推导就是不重要的。在这样一些场合下, 即在给定了设计方程式的基础上, 可以忽略掉那些详细的理论分析, 以有利于对一些重要概念的重复讨论。然而, 一个被指派在日常工作条件下负责套管设计的工程师, 应当回避详细的公式推导运算, 而采用方案I所示的简略计算。最后, 有一些工程师, 或者由于他们有长期从事套管设计的经验, 或者另一种极端, 他们仅有套管设计的一些偶然知识, 他们应当选择这本书作为常用公式、表格和概念的备用参考。方

表 1.1 读者适用的方案说明

适 用 范 围	全文 教科书	方 案 I 详细参考	方案 II 手 册
工程师的经历和 当前的能动性	毕业一年和多年的 工科大学生	现在被分配做管材 设计的工科本科毕业 的工程师	有经验的钻井工程 师或钻井负责人
涉及范围	全部 —数学公式 —对材料性能的了解 —设计经历 —实例设计	中等的 —设计公式展开, 忽略 公式推导 —对材料性能的了解 —设计经历 —实例设计	少部分 —用设计公式做实例 设计 —对材料性能的简单 了解 —设计经历

案Ⅱ是供这一类读者用的。从这个表可以看到,供上述三类读者的材料都列出了,以便参考。

1.2 套管分类

这里所指的套管将包括那些下入一口井里的管子,其目的是加固井筒、隔绝和控制地层压力和液体。根据套管所下入井段的深度,还可能有一些附加的、专门的功能。在石油工业中通常根据套管的预期用途来区分它们的类型。在这个意义上,同一种尺寸的套管根据它们在专门的井里的不同用途可能被分成不同的类型。

图1.1是四种常见的套管分类示意图。从图1.1.a开始,在这个图中,套管柱最短,下入深度最浅,取名为表层套管。表层套管有两个主要功能:(1)支撑井口设备,并且从井口悬挂后续的套管(在一些情况下,这种功能可由最浅的导管柱承担,它通常用打桩法打入地表层或用喷射方法把它冲入地表层);(2)隔离浅层水,避免被井筒液体污染。表层套管的下入深度取决于目的层位的深度或者那些必须隔离的浅地层的深度。通常表层套管的长度不超过1000英尺。

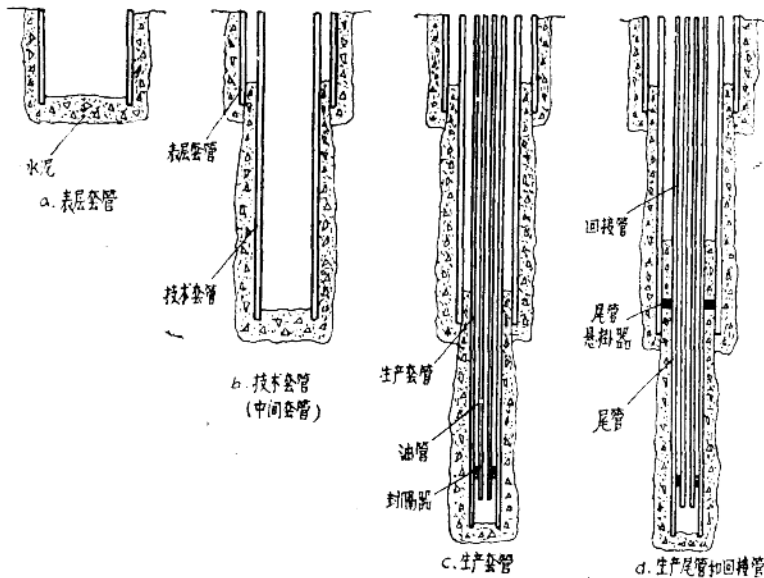


图 1.1 套管分类

随后继续下入井里的、在表层套管柱里面和在生产套管柱外面的那一层套管柱叫做中间套管或者防护套管(技术套管)。中间套管的一个特殊用途是允许用调节泥浆比重的方法来推算地下的孔隙压力梯度的异常现象。例如,当预计钻到某一深度时,钻井可能是在与比重为10磅/加仑的钻井泥浆相等的地层孔隙压力下进行的,但是,在这个深度以下的井段,地层压力有异常,可能要求增大泥浆比重。如果这时继续保持用10磅/加仑的低比重泥浆钻进,将会使地层流体进入井筒的数量增加,其结果可能导致气涌或井喷。另一方面,如果用重泥浆继续钻下去,钻过压力异常高的地层,其结果可能导致钻井泥浆漏入那些孔隙结构中静水压

力梯度较低的浅地层中去,从而会使泥浆循环发生问题。在这种情况下,解决的办法就是在异常压力地层的顶部停止钻进,并下入中间套管柱(图1.1. b)。然后就可以把继续钻进所必需的泥浆比重增大,以封堵异常压力地层,并避免这种重泥浆与浅地层的有害的接触。

中间套管的辅助作用在于隔离地层液体和在井钻达目的深度之前稳固井筒的中间段。最后,从上面一节中可知,假如地下发生井涌,预先下入的中间套管柱就会提供一个安全的空间,在那里伴随井涌产生的压力可能被控制住。

当已经钻达目的层深度时,下入井筒里的最后一层管柱叫做生产套管柱。根据完井类型,生产套管柱可能直接是储层液体的导管(在生产套管和油管之间的环形空间流动)。但储层液体通常通过油管生产。油管和生产套管之间的环形空间是用封隔器密封的。如图1.1. c所示。油管和生产套管柱之间的环形空间有多种用途,诸如用作注入抗腐蚀剂的导管或安装机械采油设备和地下安全阀等。

最后一种随着井深增加其重要性也增加的套管类型是尾管和回接管柱(图1.1. d)。随着井深增加,在中间套管和生产套管顶部碰到过大的拉力的可能性也增加。一种为减小这些过大的拉力的普通方法是下入两段互相分离的套管柱。这种组装起来的套管柱其下段叫做尾管。尾管是套管柱的一部分,它挂在前一层套管柱上,通常沿它的全长固井。这种组装套管柱的上面一段通常叫做回接管。根据特殊的用途,它可以装上,也可以不装。

除了减少套管柱中的最大拉力外,尾管还具有明显的经济效益。尾管的主要缺点是它会使整个系统增加漏失的可能性。其原因是与在尾管顶部获得持久的水泥密封的实际困难有关。

如图1.1所指出的,套管柱的永久伴侣是在套管与井筒环形空间里的水泥壳。水泥壳在封隔井下液体和地层压力上的重要性不能不强调一下。虽然,草率的处理固井设计和替泥浆的问题超出了这篇文章的范围,但只要说一下,如果一个最理想的套管柱设计与一个设置得不好的水泥柱联在一起的话,那它也将是无用的。

1.3 套管柱的组成

一根套管柱将由长度较短的几段套管组成。一段一段给定外径的套管可以用三个参数来识别:(1)每英尺的额定重量或壁厚;(2)组成这段套管的钢材级别;(3)这段管子两端连接螺纹的类型。附录1是全部现有的美国石油学会(API)所正式承认的套管重量、钢级、连接螺纹的综合汇编目录。套管的钢级通常用一个词的头一个字母和数字来表示。词头字母是历史沿用的并不是它的实际意义。出现在级别标识后的数字,通常表示套管钢材的最低屈服强度,以千磅/英寸²表示。

当不仅仅使用API所承认的套管,而且还涉及不同的有专利权的套管的重量、钢级和螺纹时,组合序号可能是交错的。在本文以后的讨论中,对于一个特定的设计,事先都要集中考虑套管的重量、级别和螺纹组合才能完成大量的选择。

1.4 预计的负荷

套管所承受的负荷是令人惊奇的。但它们最终都能归结为三大类:作用在横截面上的各种压力、作用在套管本体和接头上的轴向负荷以及弯曲负荷。这一部分的讨论主要是给实习工程师介绍套管负荷的来龙去脉,给他们以一般的概念。每一种负荷的详细讨论都能在本文

的各主要部分中找到。

作用在套管横截面上的负荷总是或者直接是由井下地层压力引起的，或者间接地在试图控制这些压力的过程中引起。正常的压力都是由地层孔隙液体（通常是盐水）的静液压力梯度引起的。这个压力由于地层孔隙之间有垂直通道而传递到各处。然而，有些时候，压力地层周围界面的渗透性非常低，这就会导致地下压力反常。就是这些不正常的地层压力给套管造成很多问题。这种不正常的压力层其所以会带来困难，不但是由于对着这个层位的套管承受从外部作用的压力，而且还由于地层液体、特别是气体可能逸出，并进入井筒，从而在先前已下入的浅层套管内产生很大的内部压力。暂且搁下异常压力层的问题，对套管来说，大部分压力负荷都会导致机械故障。例如，图1.1. c 中的生产套管示意图，假设油管在接近地面处有漏失，那就会在生产套管柱的靠地面附近造成相当于油层压力的负荷。这个地面压力与完井液在油管和套管之间的环形空间里的静液压力一起能构成一个相当大的内部压力。相反，假设在油井的后期，当油层压力已经下降，在油管下端的封隔器有漏失的时候，将会导致静液柱压力减小，对套管来说，是内部压力减小，或者说外部压力差增大。

关于压力负荷，还值得一提的是对于实在的油田状态来说，一切压力负荷都是已知的。在设计过程中把它看成是当然存在的，这很重要。例如，前面讲过关于水泥壳作为一种压力隔离“工具”的重要性。在进行用高压液体压裂地层时，如果水泥壳不妥当的话，外部压力可能会导致生产套管发生纵向失稳（即水泥串槽，套管没有很好地扶正），或者在压裂期间不当心而使套管破裂。虽然，这种情况似乎可能性很少，但是，一口井是非常重要的，考虑到一口井失效的后果，就不能不要求在设计时对这种现象预先加以考虑。

作用在套管上的轴向负荷是不可避免的。起码一段套管将要承受由于悬挂在它下面的套管的重量，加上作用在套管柱底部的其他负荷所产生的轴向负荷。然而，在一口井的寿命期间，在能够自由地纵向伸缩的那一部分套管柱里可能会发生附加的负荷。

全部水泥已经注入井里并初凝之后发生的逐渐增加的轴向负荷，根据它们的初值可以分成两种。第一种包括在完井过程中所产生的那些负荷，即在没有固水泥的套管段中由于上提或下放部分套管柱重量而产生的拉、压增量，可能还有由于悬挂一根较小的管柱而施加在套管柱的给定点上的离散负荷。这些所施加的负荷明显地影响拉力，一定要在设计计算中加以考虑。

第二种逐渐增加的轴向负荷（特别是那些由于环境条件变化而产生的负荷）的危险性非常大。它们的潜在能量会导致套管失效。主要是因为工程师在设计过程中常常忽视它的这种影响。无数的不必要的套管事故都是由于逐渐增加的拉张力的综合效应引起的。这些逐渐增加的拉张力来自：

（1）温度变化——温度增高或降低将试图使套管柱拉长或缩短。但是，由于套管的两端在井口和在水泥面以下是固定了的，在这段没有固水泥的套管中就会产生相应的轴向压缩或拉张力。

（2）压力变化——内部压力变化的影响有两个方面：

（a）作用在台肩上的力——作用在外露台肩上的静液压力与套管的内径或外径的变化有关。静液压力的变化将同时使这些作用在台肩上的力发生变化。

（b）鼓胀——这种叫做鼓胀的力是一种相似于与温度变化有关的力。由于压力的变化而发生的径向鼓胀和收缩将伴随着纵向的收缩和膨胀（即泊松效应）。然而由于套管柱未固

水泥段的两端都是固定的，这将再次促进发生纵向伸缩。

弯曲负荷已经讲到了一下，它是一个局部效应。由于弯曲总是存在的，如果它总是那么小，它的影响可以忽略不计。但是，当井筒的偏斜角足够大时，弯曲效应就要考虑。这时的分析尽管变得十分复杂，但是，必须对接头的状态进行分析。这是十分重要的，因为接头（螺纹连接）对弯曲效应十分敏感。

1.5 失效方式

套管的失效方式通常分为三种类型——破裂、挤毁和连接牢固性。破裂是指主要由于内部压力过大而造成的那些失效。相反地，挤毁是指主要是由于外压力过大而造成的套管本体的失效。由于过大的拉力而造成的套管本体的失效很少作为一种独立的失效类型来考虑。这种除外是从这样的事实出发：按照多维法则，套管钢材的失效要求同时考虑作用在某一给定点上的全部应力。在这个意义上讲，使套管本体失效的轴向负荷或者影响它的抗破裂能力，或者影响它的抗挤毁能力，或者两者都有。

套管连接的完好性可以再细分成两种状况——漏失完好性和强度完好性。一个接头的漏失完好性是指这个接头承受压力（主要是内压）的能力。漏失完好性主要与连接状态有关。这些接头内所包含的有势能的液体其通道没有被金属对金属的密封或它的等同结构（如尼龙环）所隔断。连接强度完好性是一种很明了的失效类型。在很多情况下，从经验得到的连接强度完好性的预测方法提供了很多关于连接特性的估价，大量没有解释清楚的套管失效可能是由于不适当的连接强度造成的。这些失效形式被认为是缺少与螺纹连接在非轴向负荷、非静负荷下的性能的有关知识所造成的。这些负荷与弯曲、井内压力波动和在下钻期间发生的动负荷有关。

非机械原因的其他失效形式，诸如腐蚀和抗硫强度等对设计工程师也都是很重要的。在本书中关于这些概念的范围将限制在直接影响管子对其工程环境的应力—应变响应方面。

1.6 文章的组织

本文可分成四部分：第二章，紧接着提出一个工程力学方程式，它是研究管状物体这种专门构件的基础。在第二章中建立了本文以后各章引深发展的基础。

在对一些基础概念和基本方程式进行复习之后，第三—六章是讲套管的四种基本失效形式，它们是破裂、挤毁、连接强度和管柱纵向弯曲。每一章的意图是给读者一个坚定的、总的关于失效形式的概念。每一章包括（1）一个绪言部分，介绍本章中要定量分析的一般概念；（2）一些基本方程的说明；（3）设计负荷和设计因素的定义和解释；（4）典型计算举例。

对不同的失效形式分别进行讨论之后，在第七章中用几个设计举例来进行综合分析。这一章是本文的焦点，在这里所有先前讲到的套管设计的概念都组合成一个有用的、有机的程序。

第七章的设计举例，包括了所讨论的一系列专门的题目。第八章是专门讲弯曲和它对前面提到的设计原则的影响这一题的。第九章包含一些其他的题目，诸如硫化氢应力、腐蚀破裂、地层流动和套管柱动力学等。最后，第十章给出了一般推荐的油田经验。这一章的主要目的是给工程师一些为应用已被证实了的油田实践经验的理论知识。

第二章 基本方程式

2.1 引言

这一章的目的是建立研究套管承受外界负荷的反应所必需的四个方程式。本章的大部分内容将集中讨论厚壁筒的对称变形。但是，由于在以后各章中的重要性，也将讨论用逼近法推导出薄壁筒的方程式。

这一章没有涉及稳定性失效的专门关系。这些关系将在讨论挤毁（第四章）和管柱的稳定性（第六章）的有关章节中涉及。弯曲的讨论将推迟到第八章。

在这一章中将尽力保证使每个方程式的推导都是完整的和独立的，它将假定读者具有应力和应变的基本知识和工作经历。本书范围以外的材料力学方面的概念将在涉及到它们的时候加以介绍。

由于油田用管子的几何形状的关系，全部分析都将以柱面座标 (r, θ, z) 系表示。

2.2 应变—位移的关系

在对任何一个固态物体进行分析时，应力、应变和材料的状态是三个很重要的概念。材料的状态与应力和应变有关系。应力和应变两者都取决于材料的状态，认清它们的关系是很重要的。不论所研究的材料是什么，应力都绝对地由所施加的负荷决定。同样，应变都绝对地与变形的几何形状有关。所研究的材料的特性只有通过应力（负荷）与应变（响应）关系的一些相应的基本方程式才能表现出来。

为了引入分析应变所必需的概念，引用了图2.1。它描述一段由点1和点2限定的无限小的线段的变形情况。因为变形，点1由原始位置移到变形后的位置点1'。点1变形后的位置的位矢 $\tilde{s}'$ 可以用下面的方程式来描述：

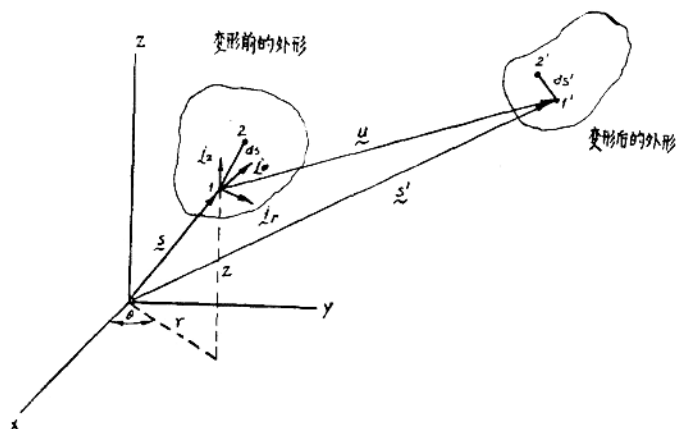


图 2.1 一段无限小的线段的变形

$$\begin{aligned}\tilde{s}' &= \tilde{s}_r \tilde{i}_r + \tilde{s}_\theta \tilde{i}_\theta + \tilde{s}_z \tilde{i}_z \\ &= (\tilde{s}_r + u_r) \tilde{i}_r + (\tilde{s}_\theta + u_\theta) \tilde{i}_\theta \\ &\quad + (\tilde{s}_z + u_z) \tilde{i}_z\end{aligned}\quad (2.1)$$

式中 $\tilde{S}$ 是点 1 的原始位置, $\tilde{U}$ 是位移矢量, $\tilde{i}_r$ 、 $\tilde{i}_\theta$ 、 $\tilde{i}_z$ 是矢量 分别在 r 、 θ 、 z 方向上的投影。

这一段无限小的线段变形前的长度为 ds , 由于变形, 它将移动、旋转和变形到变形后的一个无限小的长度 ds' 。例如, 在图 2.1 中, 长度 1—2 将变换成长度 1'—2'。定量地讲, 应变用变化 $(ds')^2 - (ds)^2$ 来表示。其中 ds' 是 ds' 的值, ds 是 ds 的值。从方程 (2.1) 可得:

$$\tilde{ds}' = d\tilde{s} + d\tilde{u} \quad (2.2)$$

从图 2.1 可得:

$$d\tilde{s} = d\tilde{r} \tilde{i}_r + d\tilde{\theta} \tilde{i}_\theta + d\tilde{z} \tilde{i}_z \quad (2.3)$$

直接微分可得:

$$\begin{aligned}d\tilde{u} &= \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} dr + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u_r}{\partial z} dz \right) \tilde{i}_r \\ &\quad + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} dz \right) \tilde{i}_\theta \\ &\quad + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} dr + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \right) \tilde{i}_z \\ &\quad + u_r \frac{\partial \tilde{i}_r}{\partial \theta} d\theta + u_\theta \frac{\partial \tilde{i}_\theta}{\partial \theta} d\theta\end{aligned}\quad (2.4)$$

矢量的导数由下式给出:

$$\frac{\partial \tilde{i}_r}{\partial \theta} = \tilde{i}_\theta, \quad \frac{\partial \tilde{i}_\theta}{\partial \theta} = -\tilde{i}_r \quad (2.5)$$

将方程 (2.3)、(2.4)、(2.5) 代入方程 (2.2), 则应变方程式可写成:

$$\begin{aligned}(ds')^2 - (ds)^2 &= (ds'_r)^2 + (ds'_\theta)^2 + (ds'_z)^2 \\ &\quad - [(ds_r)^2 + (ds_\theta)^2 + (ds_z)^2] \\ &= \left[\left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) d\theta + \frac{\partial u_r}{\partial z} dz \right]^2 \\ &\quad + \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr + \left(r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) d\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} dz \right]^2 \\ &\quad + \left[\frac{\partial u_z}{\partial r} dr + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} d\theta + \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dz \right]^2 \\ &\quad - [(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (dz)^2]\end{aligned}\quad (2.6)$$

将上式的各项展开并合并同类项, 可得到一个简单的、长的表达式。但是, 如果假定位移和位移梯度 $\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)$ 等项都很小, 那么这些数值的平方和高次方项可以忽略不计, 则上式可变成:

$$(ds')^2 - (ds)^2 = 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} (dr)^2 + 2 \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) (rd\theta)^2$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} (dz)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) r dr d\theta \\
& + 2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) dr dz \\
& + 2 \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) r dz d\theta
\end{aligned} \quad (2.7)$$

上式中的系数和微分的乘积有专门名称并代表应变张量的各组成部分。

按照常用的方法引入应变的组成部分，则表达式变成：

$$\begin{aligned}
(ds')^2 - (ds)^2 = & 2\varepsilon_r(dr)^2 + 2\varepsilon_\theta(rd\theta)^2 + 2\varepsilon_z(dz)^2 \\
& + 4\varepsilon_{r\theta}rdrd\theta + 4\varepsilon_{rz}rdrdz + 4\varepsilon_{\theta z}rdrd\theta
\end{aligned} \quad (2.8)$$

比较方程 (2.7) 和 (2.8)，就能得到下列定义：

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\
\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\
\varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{z\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)
\end{aligned} \quad (2.9)$$

2.2.1 特殊情况

下面如果对位移区 $\tilde{u}(r, \theta, z)$ 给以某些附加的限制，就会使方程 (2.9) 简化。特别是对下述情况。

2.2.1.1 轴向对称变形

如果变形对于 z 轴是对称的（取 z 轴与圆筒的轴线一致），那么，位移就简单地取决于 θ ：

$$\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = 0 \quad (2.10)$$

此外，如果对刚性物体的运动忽略不计， $u_\theta = 0$ ，则轴对称变形的应变表达式可简化成：

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\
\varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r}, & \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta z} &= 0
\end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2.1.2 平面应变

对于这种简化以及在管状构件中，位移场不取决于 z 座标：

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (2.12)$$

此外， $u_z = 0$ ，那么，应变组成部分的表达式可简化成：

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta},$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0 \quad (2.13)$$

2.2.2 应变组成部分的物理意义

在第2.2节中所给的应变组成部分的演算数学上是清楚和简明的。但是，由于采用这种一般的逼近方法，好象忽略了应变张量组成部分的物理意义。为了更深入地了解应变的概念，设计了图2.2。这个图表示的是平面应力状况 ($u_z = 0$)，这种二维变形足以表示一些必要的概念。

首先考虑一段很小的线段1-2，起初将它沿半径方向放置，由于某种外界负荷的作用，使它发生了移动、旋转和变形（在这里为伸长），变成线段1'-2'。让我们来计算这根线段的长度变化。把平移运动排除，因为它不影响变形。如图2.2的右边部分所示，把变形后的图形叠加到没有变形的图形上。变形期间，点1将在 r 方向上移动一个距离 u_r 和在 θ 方向上移动一个距离 u_θ 。点2将在 r 方向上移动一个距离 $u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} dr$ ，并在 θ 方向上移动一个距离 $u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr$ 。如图所示，点2在 r 方向上的一个附加位移是 $\frac{\partial u_r}{\partial r} dr$ 。同样，点2在 θ 方向上的一个

附加位移是 $\frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr$ 。现在，线段1'-2'的长度可以计算出来：

$$\begin{aligned} \overline{1'-2'}^2 &= \left(dr + \frac{\partial u_r}{\partial r} dr \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr \right)^2 \\ &= \left[1 + 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^2 \right] (dr)^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

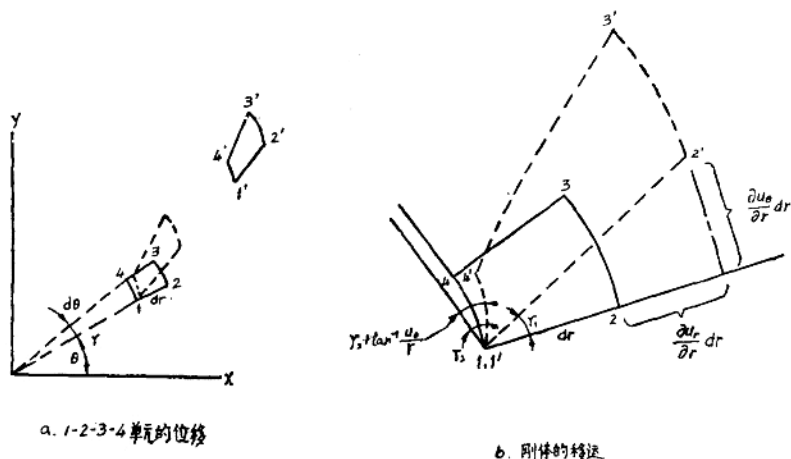


图 2.2 应变成分的物理意义

舍掉位移梯度中的高次方项可得：

$$\overline{1'-2'}^2 = \left(1 + 2 \frac{\partial u_r}{\partial r}\right) (dr)^2 \quad (2.15)$$

因为 $\frac{\partial u_r}{\partial r} \ll 1$, 这个二项式的近似解为:

$$\sqrt{1+2a} \cong 1+a, \quad a \ll 1, \quad (2.16)$$

从而可以用它来求出 $1'-2'$ 的长度:

$$\overline{1'-2'} = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial r}} dr \cong \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) dr \quad (2.17)$$

按照拉伸应变的惯用定义: 长度的变化除以原始长度, 可得:

$$\varepsilon_r = \frac{\overline{1'-2'} - \overline{1-2}}{\overline{1-2}} = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) dr - dr}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.18)$$

现在可以看到, ε_r 是一根最初沿 r 方向放置的线段的长度变化除以其原长度。用相似的方法, ε_θ 是一根最初沿 θ 或圆周方向放置的线段的长度变化除以其原长度。

其次, 分析以弧线 $1-4$ 和直线 $1-2$ 的交点为顶点的直角。变形后, 这个直角变化成 $r_1 + r_2$ 。从图 2.2 可得:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr}{\left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r}\right) dr} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial u_r}{\partial \theta} d\theta}{\left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} r d\theta\right)} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \\ &\cong \tan^{-1} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right] + \tan^{-1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] - \tan^{-1} \left[\frac{u_\theta}{r} \right] \\ &\cong \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \end{aligned} \quad (2.19)$$

式中的最后一步利用了很小的角度的近似值代入 $\tan \theta \cong \theta$ 。最后一项 $\tan^{-1} \left(\frac{u_\theta}{r} \right)$ 考虑了这种

因素, 如果 u_θ 是常数, 微分元素的曲率将变化一个角度 r_2 。这一项的由来与式 (2.5) 中的单位矢量 $\tilde{i}_\theta$ 的变化有关。把式 (2.19) 与式 (2.9) 相比较, $\varepsilon_{r,\theta} (= \varepsilon_{\theta,r})$ 似乎是最初沿 r 和 θ 座标方向放置的两根垂直线段之间夹角变化的一半。

2.3 应力和平衡方程式

应力是和应变相对应的概念, 它是检验材料变形的尺度, 也是所施加的引起变形的负荷的尺度。

按本文的目的, 将考虑两种类型的负荷或力——表面力 (或拉力) 和体积力。对这两种负荷来说, 负荷强度可分别地定义为应力矢量 $\tilde{\sigma}$, 和体积力矢量 $\tilde{x}$ 。应力矢量为:

$$\tilde{\sigma} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Sigma F_i}{\Delta A} \quad (2.20)$$

体积力矢量为:

$$\tilde{x} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum x_i}{\Delta V} \quad (2.21)$$

应力矢量 σ 是作用在物体表面接触力的局部强度的尺度，并且由对作用在一个小面积 ΔA 上的接触力的合力，在这个面积的尺寸变得无限小时取极限来确定 $\tilde{F} = \sum F_i$ 。同样，体积力矢量 $\tilde{x}$ 是作用在一个无限小的体积单元上的外力的体积强度的尺度。这里考虑体积力仅仅是因为有地球引力场的缘故。

处理应力矢量是不方便的。一般的做法是把应力分解为九个与应变相对应的组成部分（即一个 σ_{rs} 应力将导致一个 ε_{rs} 的应变）。为了从形式上介绍应力的组成部分，设计了图 2.3。

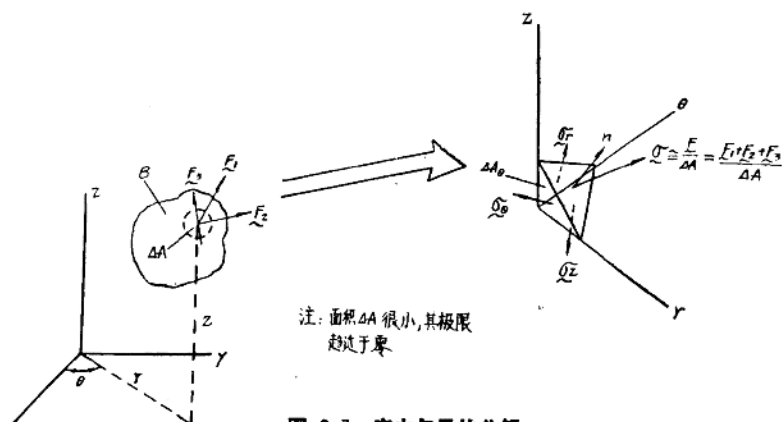


图 2.3 应力矢量的分解

这个图的左边表示一个承受接触力的物体 B，相当于把物体置于静平衡状态下。在单元表面 ΔA 上只有表面拉力作用，以避免把图形搞乱。图 2.3 的右边是面积 ΔA 的放大图，它是物体表面 ΔA 的一部分。作用在各个坐标平面上的内部应力矢量为 σ_r 、 σ_θ 、 σ_z ，当与作用在外表面的拉力 σ 合并时，这一小块物体处于平衡状态（体积力矢量 $\tilde{x}$ 没有表示）。所有矢量力的平衡条件要求在三个独立的坐标方向上作用在每一个坐标上的力都处于平衡状态。在坐标表面上的应力矢量很容易分解成：

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_r &= \sigma_r \tilde{i}_r + \sigma_{r\theta} \tilde{i}_\theta + \sigma_{rz} \tilde{i}_z \\ \tilde{\sigma}_\theta &= \sigma_{\theta r} \tilde{i}_r + \sigma_\theta \tilde{i}_\theta + \sigma_{\theta z} \tilde{i}_z \\ \tilde{\sigma}_z &= \sigma_{zr} \tilde{i}_r + \sigma_{z\theta} \tilde{i}_\theta + \sigma_z \tilde{i}_z \end{aligned} \quad (2.22)$$

利用方程 (2.21)，并注意：

$$\begin{aligned} \Delta A_r &= \Delta A n_r & \Delta A_\theta &= \Delta A n_\theta \\ \Delta A_z &= \Delta A n_z \end{aligned} \quad (2.23)$$

式中 n 是垂直于面积 ΔA 的单位矢量。使所有作用在 r 方向上的力的组成部分等于零，得到：

$$-\sigma_r \Delta A n_r - \sigma_{\theta r} \Delta A n_\theta - \sigma_{zr} \Delta A n_z + x_r \Delta V + (\sigma)_r \Delta A = 0 \quad (2.24)$$

相类似的表达式可用于 θ 和 z 座标上。提出公因子 ΔA 并注意，体积力以高次方进入表达式，则上式可写成：

$$(\sigma)_r = \sigma_r n_r + \sigma_{\theta r} n_\theta + \sigma_{zr} n_z \quad (2.25)$$

式中 $(\tilde{\sigma})_r$ 是外表面拉力 $\tilde{\sigma}$ 的 r 组成部分。相类似地沿主坐标方向展开得到:

$$(\tilde{\sigma})_\theta = \sigma_{r\theta} n_r + \sigma_{\theta\theta} n_\theta + \sigma_{z\theta} n_z \quad (2.26)$$

$$(\tilde{\sigma})_z = \sigma_{rz} n_r + \sigma_{\theta z} n_\theta + \sigma_{zz} n_z \quad (2.27)$$

在介绍应力的组成部分时,对靠近主体表面的那一小部分作了简化,平衡方程式由于只考虑内部的一块小单元而很容易分解。图2.4表示一个内部的积分单元B,它的侧面选择成沿坐标方向。按一般确定应力组成部分的符号的习惯,图中所示的全部应力组成部分的符号都取正号。由于物块B处于静平衡状态,物块中每个积分单元在三个坐标方向上的力和力矩都是平衡的。例如,在 r 方向上力的平衡方程式为:

$$\begin{aligned} & -\sigma_r \left(r - \frac{dr}{2} \right) d\theta dz + \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\theta dz \\ & - \sigma_\theta \left(\sigma_\theta + \sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) (dr dz) \sin \left(\frac{d\theta}{2} \right) + \left(-\sigma_{\theta r} + \sigma_{r\theta} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) (dr dz) \cos \left(\frac{d\theta}{2} \right) + \left(-\sigma_{zr} + \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} dz \right) r dr d\theta \\ & + x_r r dr d\theta dz = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

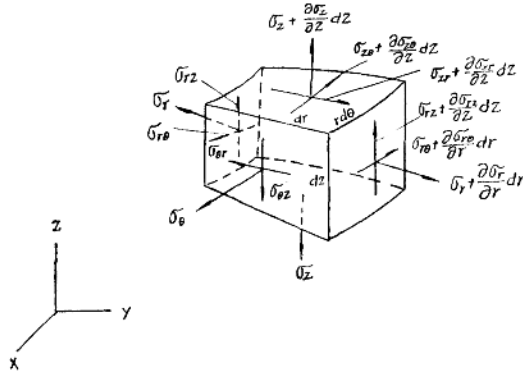


图 2.4 积分单元的平衡单元的中心 (r, θ, z)

在 z 方向上相对于这个小单元中心的力矩平衡方程式为:

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_{r\theta} \left(r - \frac{dr}{2} \right) d\theta dz \right] \frac{dr}{2} + \left[\left(\sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} dr \right) \cdot \right. \\ & \left. \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\theta dz \right] \frac{dr}{2} - \left[\sigma_{\theta r} \left(dr dz \right) \cos \left(\frac{d\theta}{2} \right) \right] r \frac{d\theta}{2} \\ & - \left[\left(\sigma_{\theta r} + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) (dr dz) \cos \left(\frac{d\theta}{2} \right) \right] r \frac{d\theta}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

重新整理方程 (2.28) 和 (2.29) 得到:

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr - \sigma_\theta - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta$$

$$+ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + r \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + r x_r = 0 \quad (2.30)$$

$$r \sigma_{r\theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} r dr + \frac{1}{4} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} (dr)^2 - r \sigma_{\theta r} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} r d\theta = 0 \quad (2.31)$$

在式 (2.30) 和 (2.31) 中, 公因子 $(dr d\theta dz)$ 已除去, 并且取小角的近似值 ($\sin \alpha \cong \alpha$, $\cos \alpha \cong 1$, 因为 $\alpha \ll 1$)。此外, 由于这个体积单元的尺寸无限小, 式 (2.30) 和 (2.31) 中下面划横线的各项可以忽略不计, 从而这两个方程可写成:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r + \sigma_{\theta}}{r} + x_r = 0 \quad (2.32)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} \quad (2.33)$$

从这里可以看出, 力矩平衡方程是剪切应力组成部分的对称项。按在 θ 和 z 方向上的力的平衡要求, 读者可以自己校验, 它们分别为:

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + x_{\theta} = 0 \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + x_z = 0 \quad (2.35)$$

在 r 和 θ 方向上的力矩平衡方程式为:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z} &= \sigma_{z\theta} \\ \sigma_{rz} &= \sigma_{zr} \end{aligned} \quad (2.36)$$

2.3.1 特殊情况

分析了应变一位移的关系之后, 现在来对方程 (2.32)、(2.34)、(2.35) 考虑某些有用的简化就方便了。然而, 由于应力和应变之间的关系取决于材料的性能, 这就需要把这些特殊情况的讨论推迟到介绍了具体的套管钢材的基本方程以后才能进行。

2.4 应力和应变的关系

如前面提到的, 应力和应变两个概念都与所考虑的材料有关。为了把反应 (应变) 与负荷 (应力) 联系起来, 需要引入一些辅助的用以表示所研究的特殊材料的特征的参数。因为应力和应变依从关系的确切形式取决于材料的结构, 其最终表达式就叫做基本关系式。

给定的某些基本方程式只适用于某些条件范围。例如, 在大气压力下的水的应力和应变的关系式只有在低于 212°F 时才是有效的。高于这个温度就会发生相变 (水变成蒸汽), 就要用一组新的应力和应变关系式来表示。下面将要展示钢材所发生的相似的现象。低于某个应力状态时, 钢材可按弹性材料分类, 用相应的弹性应力和应变关系式表示; 高于某个应力状态时, 钢材的物理性能就会发生变化, 钢材就具有塑性材料的特性。高于这个临界状态, 导致屈服, 就需要建立一套新的方程式来描述钢材对外加负荷的反应。

2.4.1 一维负荷

研究钢材的基本特性的一个最简单的方法就是研究它的一维负荷状态。在这种状态下, 应力的各组成部分除了一项以外其他全都等于零。图2.5描述了一块典型的套管钢材试样作