

# 用一个示力副法作单闭合空间机构的受力分析

张启先

(北京航空学院)

## 摘 要

与传统的分析法不同,本文对单闭合空间机构的受力分析采用了先求出一个运动副中约束反力的方法。这个示力副中的约束反力在无过约束的空间机构中是静定的,文中详细讨论了用矩阵法确定的过程并举四杆RCCC及五杆RRSRR机构为例进行分析。对RCCC机构还进一步讨论了其他运动副中约束反力和原动件上平衡力的确定。本文所提示力副法可推广于作任意复杂空间机构的受力分析。

## (一)引言

与平面机构相同,空间机构的受力分析也在于确定原动件上的平衡力和各运动副中的约束反力。平衡力既可在求约束反力之前,先用虚位移原理求出;也可利用原动件的力平衡方程式,随约束反力同时求出。如所周知,作机构受力分析的主要工作是确定各运动副中的约束反力。

从现有文献看<sup>[1-4]</sup>用分析法求空间机构各运动副中的约束反力时,大都先对各个构件,逐个列出六个标量形式的力和力矩平衡方程式或一个对偶力平衡方程式,然后联立求解数十个线性方程而把所有约束反力同时解出。所谓用一个示力副法作单闭合空间机构的受力分析,这不是同时求出所有约束反力,而是“一点突破”先求出一个运动副中的约束反力,接着再按逐个构件的平衡方程式而求出其余约束反力。这个方法在文<sup>[5]</sup>中已有初步反映,而在新编机械原理教材<sup>[6]</sup>中还配合图解法用于作平面机构的受力分析。

## (二)用一个示力副法的分析要点

### (1) 构件惯性力的确定

用动态静力学作空间机构的受力分析时,除作用有已知的外力外,还引入构件的惯性力。按理论力学可把某构件*i*的惯性力简化为作用于构件质量中心*S<sub>i</sub>*的惯性力主向量*F<sub>i</sub>*及主矩*M<sub>i</sub>*。在固定座标系*x<sub>0</sub>(y<sub>0</sub>)z<sub>0</sub>*中,惯性力主向量*F<sub>i</sub><sup>(0)</sup>*按下式计算:

$$F_{i1}^{(0)} = -m_i a_{S_i}^{(0)} \quad (1)$$

式中*a<sub>S<sub>i</sub></sub><sup>(0)</sup>*为质量中心*S<sub>i</sub>*在固定座标系中的绝对加速度,*m<sub>i</sub>*为构件*i*的质量。

在作受力分析时,常将惯性力主向量变换到与构件*i*相连的动座标系*x<sub>i</sub>(y<sub>i</sub>)z<sub>i</sub>*中,即

$$F_{i1}^{(i)} = C_{i0} F_{i1}^{(0)} = -m_i C_{i0} a_{3i}^{(0)} \quad (2)$$

式中  $C_{i0}$  为由坐标系  $x_0(y_0)z_0$  变换至  $x_i(y_i)z_i$  的方向余弦矩阵。

在动坐标系  $x_i(y_i)z_i$  中表示的惯性力主矩可按式计算：

$$\begin{aligned} M_{ix_i}^{(i)} &= -I_x \varepsilon_x + (I_y - I_z) \omega_y \omega_x + I_{xy} (\varepsilon_y - \omega_x \omega_z) + I_{xz} (\varepsilon_x + \omega_x \omega_y) + I_{yz} (\omega_y^2 - \omega_z^2) \\ M_{iy_i}^{(i)} &= -I_y \varepsilon_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z + I_{yz} (\varepsilon_x - \omega_y \omega_x) + I_{xy} (\varepsilon_x + \omega_y \omega_z) + I_{xz} (\omega_z^2 - \omega_x^2) \\ M_{iz_i}^{(i)} &= -I_z \varepsilon_z + (I_x - I_y) \omega_x \omega_y + I_{xz} (\varepsilon_x - \omega_z \omega_y) + I_{yz} (\varepsilon_y + \omega_z \omega_x) + I_{xy} (\omega_z^2 - \omega_y^2) \end{aligned} \quad (3)$$

式中： $I_x$ 、 $I_y$ 、 $I_z$ 、 $I_{xy}$ 、 $I_{yz}$ 、 $I_{xz}$  分别为构件  $i$  对座标轴的转动惯量和离心转动惯量，这些座标轴通过构件  $i$  的质量中心  $S_i$  并与动坐标系  $x_i(y_i)z_i$  的座标轴平行。

$\omega_x$ 、 $\omega_y$ 、 $\omega_z$  和  $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$ 、 $\varepsilon_z$  分别为构件  $i$  的绝对角速度和绝对角加速度在动坐标系  $x_i(y_i)z_i$  中的分量。

### (2) 约束反力的分量

设取构件  $i$  为研究对象。由构件  $i+1$  作用在构件  $i$  上的约束反力可简化为一个过座标系  $x_i(y_i)z_i$  原点的反力主向量  $R_{i+1,i}$  和一个反力主矩  $M_{i+1,i}$ ，它们在该坐标系中的分量分别以  $r_{i+1,i}^{(i)}$ 、 $s_{i+1,i}^{(i)}$ 、 $t_{i+1,i}^{(i)}$  和  $u_{i+1,i}^{(i)}$ 、 $v_{i+1,i}^{(i)}$ 、 $w_{i+1,i}^{(i)}$  来表示。由构件  $i-1$  作用在构件  $i$  上的约束反力系与由构件  $i$  作用在构件  $i-1$  上的约束反力，大小相等而方向相反， $R_{i-1,i} = -R_{i,i-1}$ ， $M_{i-1,i} = -M_{i,i-1}$ 。因此，为了简便起见，可将构件  $i-1$  作用在构件  $i$  上的约束反力用一个过座标系  $x_{i-1}(y_{i-1})z_{i-1}$  (与构件  $i-1$  相连) 原点的反力主向量  $-R_{i,i-1}$  和一个反力主矩  $-M_{i,i-1}$  表示，它们在座标系  $x_{i-1}(y_{i-1})z_{i-1}$  中的分量分别为： $-r_{i,i-1}^{(i-1)}$ 、 $-s_{i,i-1}^{(i-1)}$ 、 $-t_{i,i-1}^{(i-1)}$  和  $-u_{i,i-1}^{(i-1)}$ 、 $-v_{i,i-1}^{(i-1)}$ 、 $-w_{i,i-1}^{(i-1)}$ 。

由于运动副中存在相对运动的自由度，所以运动副中的约束反力总是缺少某些分量，例如对沿某轴线有相对移动自由度的移动副就缺少沿该轴线的约束反力分量，对绕某轴线有相对转动自由度的转动副则缺少沿该轴线的约束反力矩分量，因此，对具有  $f$  个自由度的运动副来说，约束反力的分量总数一般为  $6-f$  个。

### (3) 示力副中约束反力的静定条件

在单闭合空间机构中，如果求出某一运动副中约束反力的所有分量，则其余运动副中的约束反力即可由每一构件的平衡方程式依次求出。因此，单闭合机构中，如所取示力副中的约束反力是静定的，则整个机构的约束反力也是静定的。下面讨论示力副中约束反力的静定条件。

由所取有  $f$  个自由度的示力副把机构拆分为两部分，这两部分所含运动副的自由度总和为  $(F + \lambda - f)$ ，这里  $F$  为机构的自由度而  $\lambda$  为设想将机构断开机架后末杆的自由度。

由于沿移动自由度的轴线方向不能传递力和绕转动自由度的轴线方向不能传递力矩，所以对每一个自由度均可列出一个力或力矩的标量平衡方程式。这样，在机构中拆开一个示力副后，共可列出  $(F + \lambda - f)$  个标量平衡方程式，其中  $F$  个标量方程式系用于求解  $F$  个平衡力而  $\lambda - f$  个标量方程式则用于确定示力副中约束反力的各个分量。因此，示力副中约束反力的静定条件为

$$6 - f = \lambda - f \text{ 或 } \lambda = 6$$

此即表示：对一般  $\lambda = 6$  的空间机构，示力副中的约束反力具有静定性。对其他  $\lambda < 6$  的过约束机构<sup>[7]</sup>，示力副中的约束反力均为静不定，而须考虑构件的弹性变形和运动副中的间

隙影响才能补够所缺的平衡方程式。在个别特殊情况下,有些过约束机构也可能具有静定性。例如对  $\lambda = 3$  有三个过约束的平面机构来说,如所有外力(包括构件的惯性力)均作用在垂直于转动轴线的同一平面内,则由于示力副中约束反力的分量个数从  $6 - f$  变为  $3 - f$ ,因而获得静定性。

(4) 示力副的选择

对机构中要首先确定约束反力的示力副,在选择时应该本着简便易求的原则。在单闭合空间机构中,位于机构中部而且约束反力分量个数较少的运动副,宜选作示力副。

(5) 示力副中约束反力的确定

机构沿示力副拆成两部分后,每一部分都具有沿其中所含运动副轴线移动或转动的自由度。

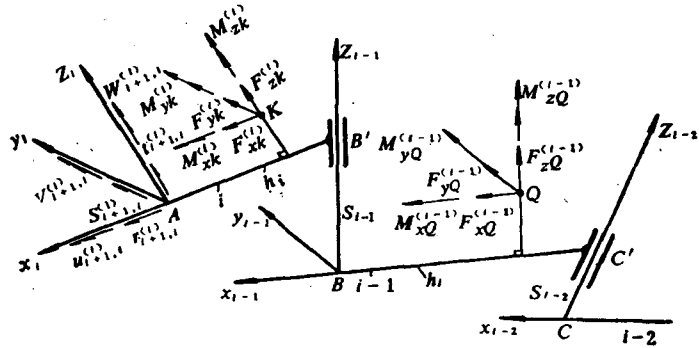


图 1-1

图 1-1 所示为将构件  $i + 1$  与  $i$  间的运动副作为示力副拆开后的部分。在没有确定该示力副为何种运动副时,可假定构件  $i + 1$  作用在构件  $i$  上的约束反力有六个分量  $r_{i+1,i}^{(i)}$ 、 $s_{i+1,i}^{(i)}$ 、 $t_{i+1,i}^{(i)}$ 、 $u_{i+1,i}^{(i)}$ 、 $v_{i+1,i}^{(i)}$ 、 $w_{i+1,i}^{(i)}$ 。在图 1-1 中示出作用在构件  $i$  的外力  $F_{xk}^{(i)}$ 、 $F_{yk}^{(i)}$ 、 $F_{zk}^{(i)}$  及外力矩  $M_{xk}^{(i)}$ 、 $M_{yk}^{(i)}$ 、 $M_{zk}^{(i)}$ , 外力的作用点  $K$  在坐标系  $Ax_i(y_i)z_i$  中的座标为  $a_k$ 、 $b_k$ 、 $c_k$ , 这里  $K = 1, 2, \dots, m$ , 其中包括虚加的惯性力。同样,在构件  $i - 1$  上的外力及外力矩为  $F_{x0}^{(i-1)}$ 、 $F_{y0}^{(i-1)}$ 、 $F_{z0}^{(i-1)}$ 、 $M_{x0}^{(i-1)}$ 、 $M_{y0}^{(i-1)}$ 、 $M_{z0}^{(i-1)}$ , 外力的作用点  $Q$  在坐标系  $Bx_{i-1}(y_{i-1})z_{i-1}$  中的座标为  $a_0$ 、 $b_0$ 、 $c_0$ , 这里  $Q = 1, 2, \dots, n$ , 其中包括虚加的惯性力。为了讨论一般情况,在图 1-1 中构件  $i$  与  $i - 1$  间及  $i - 1$  与  $i - 2$  间的运动副均假定为圆柱副,又  $h_i = l_{B'A}$ 、 $s_{i-1} = l_{BB'}$ 、 $h_{i-1} = l_{C'B}$ 、 $s_{i-2} = l_{CC'}$ 。

根据构件  $i$  有沿圆柱副轴线  $Z_{i-1}$  移动的自由度,作用在构件  $i$  上所有沿  $Z_{i-1}$  轴向力之和必为零。这一关系可用矩阵形式表示如下:

$$[0, 0, 1]C_{i-1,i} \left[ \begin{matrix} r_{i+1,i}^{(i)} \\ s_{i+1,i}^{(i)} \\ t_{i+1,i}^{(i)} \end{matrix} + \sum_{k=1}^m \begin{bmatrix} F_{xk}^{(i)} \\ F_{yk}^{(i)} \\ F_{zk}^{(i)} \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (4)$$

式中  $C_{i-1,i}$  为由坐标系  $x_i(y_i)z_i$  变换至  $x_{i-1}(y_{i-1})z_{i-1}$  的方向余弦矩阵。

根据构件  $i$  和  $i - 1$  一起有沿圆柱副轴线  $z_{i-2}$  移动的自由度,作用在该两构件上所有沿  $z_{i-2}$  轴向力之和必为零。这一关系用矩阵表示为:

$$[0, 0, 1]C_{i-2,i-1} \left[ C_{i-1,i} \left[ \begin{matrix} r_{i+1,i}^{(i)} \\ s_{i+1,i}^{(i)} \\ t_{i+1,i}^{(i)} \end{matrix} + \sum_{k=1}^m \begin{bmatrix} F_{xk}^{(i)} \\ F_{yk}^{(i)} \\ F_{zk}^{(i)} \end{bmatrix} \right] + \sum_{Q=1}^n \begin{bmatrix} F_{x0}^{(i-1)} \\ F_{y0}^{(i-1)} \\ F_{z0}^{(i-1)} \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (5)$$

式中  $C_{i-2,i-1}$  为由坐标系  $x_{i-1}(y_{i-1})z_{i-1}$  变换至  $x_{i-2}(y_{i-2})z_{i-2}$  的方向余弦矩阵。

根据构件  $i$  有绕圆柱副轴线  $z_{i-1}$  转动的自由度,作用在构件  $i$  上所有对  $z_{i-1}$  轴的力矩和必为零。这一关系可用矩阵形式表示如下:

$$[0, 0, 1] C_{i-1,i} \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} u_{i+1,i}^{(i)} \\ v_{i+1,i}^{(i)} \\ w_{i+1,i}^{(i)} \end{array} \right] + \sum_{k=1}^m \left[ \begin{array}{c} M_{xk}^{(i)} \\ M_{yk}^{(i)} \\ M_{zk}^{(i)} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_i \\ 0 & h_i & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} r_{i+1,i}^{(i)} \\ s_{i+1,i}^{(i)} \\ t_{i+1,i}^{(i)} \end{array} \right] \\ + \sum_{k=1}^m \left[ \begin{array}{c} 0 & -c_k & b_k \\ c_k & 0 & -(a_k+h_i) \\ -b_k & (a_k+h_i) & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} F_{xk}^{(i)} \\ F_{yk}^{(i)} \\ F_{zk}^{(i)} \end{array} \right] \end{array} \right] = 0 \quad (6)$$

根据构件  $i$  和  $i-1$  一起有绕圆柱副轴线  $Z_{i-2}$  转动的自由度, 作用在该两构件上所有对  $Z_{i-2}$  轴的力矩和必为零。这一关系用矩阵表示为:

$$[0, 0, 1] C_{i-2,i-1} \left[ \begin{array}{c} C_{i-1,i} \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} u_{i+1,i}^{(i)} \\ v_{i+1,i}^{(i)} \\ w_{i+1,i}^{(i)} \end{array} \right] + \sum_{k=1}^m \left[ \begin{array}{c} M_{xk}^{(i)} \\ M_{yk}^{(i)} \\ M_{zk}^{(i)} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_i \\ 0 & h_i & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} r_{i+1,i}^{(i)} \\ s_{i+1,i}^{(i)} \\ t_{i+1,i}^{(i)} \end{array} \right] \\ + \sum_{k=1}^m \left[ \begin{array}{c} 0 & -c_k & b_k \\ c_k & 0 & -(a_k+h_i) \\ -b_k & (a_k+h_i) & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} F_{xk}^{(i)} \\ F_{yk}^{(i)} \\ F_{zk}^{(i)} \end{array} \right] + \sum_{Q=1}^n \left[ \begin{array}{c} M_{x0}^{(i-1)} \\ M_{y0}^{(i-1)} \\ M_{z0}^{(i-1)} \end{array} \right] \\ + \sum_{Q=1}^n \left[ \begin{array}{c} 0 & -c_0 & b_0 \\ c_0 & 0 & -(a_0+h_{i-1}) \\ -b_0 & (a_0+h_{i-1}) & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} F_{x0}^{(i-1)} \\ F_{y0}^{(i-1)} \\ F_{z0}^{(i-1)} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 0 & -s_{i-1} & 0 \\ s_{i-1} & 0 & -h_{i-1} \\ 0 & h_{i-1} & 0 \end{array} \right] \\ C_{i-1,i} \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} r_{i+1,i}^{(i)} \\ s_{i+1,i}^{(i)} \\ t_{i+1,i}^{(i)} \end{array} \right] + \sum_{k=1}^m \left[ \begin{array}{c} F_{xk}^{(i)} \\ F_{yk}^{(i)} \\ F_{zk}^{(i)} \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \right] = 0 \quad (7)$$

如果图 1-1 中含有更多的构件和运动副, 则仍可仿上建立待求约束反力分量与已知外力及外力矩的其他关系式。

如果将机构中构件  $i+1$  与  $i$  之间的示力副拆开, 要研究构件  $i+1$  和  $i+2$  等后一部分, 如图 1-2 所示, 则仍可仿上列出求示力副中约束反力分量的某些关系式。假设在构件  $i+1$  作用有外力  $F_{x0}^{(i+1)}$ 、 $F_{y0}^{(i+1)}$ 、 $F_{z0}^{(i+1)}$  及外力矩  $M_{x0}^{(i+1)}$ 、 $M_{y0}^{(i+1)}$ 、 $M_{z0}^{(i+1)}$ , 外力的作用点  $G$  在坐标系  $I x_{i+1} y_{i+1} z_{i+1}$  中的坐标为  $a_0$ 、 $b_0$ 、 $c_0$ , 这里  $G = 1, 2, \dots, l$ , 其中也包括虚加的惯性力。沿圆柱副移动轴线  $Z_{i+1}$ , 可列出轴向力之和为零的关系式:

$$[0, 0, 1] \left[ -C_{i+1,i} \left[ \begin{array}{c} r_{i+1,i}^{(i)} \\ s_{i+1,i}^{(i)} \\ t_{i+1,i}^{(i)} \end{array} \right] + \sum_{G=1}^l \left[ \begin{array}{c} F_{x0}^{(i+1)} \\ F_{y0}^{(i+1)} \\ F_{z0}^{(i+1)} \end{array} \right] \right] = 0 \quad (8)$$

式中  $C_{i+1,i}$  为由坐标系  $x_i y_i z_i$  变换至  $x_{i+1} y_{i+1} z_{i+1}$  的方向余弦矩阵。

对圆柱副转动轴线  $z_{i+1}$ , 可列出所有力矩之和为零的关系式:

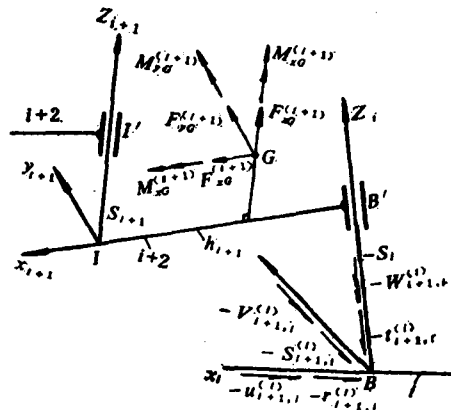


图 1-2

$$\begin{aligned}
 & (0, 0, 1) \left[ -C_{i+1,i} \begin{bmatrix} u_{i+1,i}^{(i)} \\ v_{i+1,i}^{(i)} \\ w_{i+1,i}^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & s_i & 0 \\ -s_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{i+1,i}^{(i)} \\ s_{i+1,i}^{(i)} \\ t_{i+1,i}^{(i)} \end{bmatrix} \right] \\
 & - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{i+1} \\ 0 & -h_{i+1} & 0 \end{bmatrix} C_{i+1} \begin{bmatrix} r_{i+1,i}^{(i)} \\ s_{i+1,i}^{(i)} \\ t_{i+1,i}^{(i)} \end{bmatrix} + \sum_{G=1}^I \begin{bmatrix} M_{xG}^{(i+1)} \\ M_{yG}^{(i+1)} \\ M_{zG}^{(i+1)} \end{bmatrix} \\
 & + \sum_{G=1}^I \begin{bmatrix} 0 & -c_G & b_G \\ c_G & 0 & -a_G \\ -b_G & a_G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xG}^{(i+1)} \\ F_{yG}^{(i+1)} \\ F_{zG}^{(i+1)} \end{bmatrix} = 0 \tag{9}
 \end{aligned}$$

如果图 1-2 中含有更多的运动副, 则依此类推可列出一些更为复杂的关系式, 现从略。

(6) 其余运动副中约束反力的确定

示力副中约束反力的各个分量已经确定后, 相邻运动副中的约束反力即不准利用构件的平衡关系式求出。现以构件  $i$  与  $i-1$  间的运动副为例, 假定构件  $i-1$  作用在构件  $i$  上的约束反力有六个分量  $-r_{i,i-1}^{(i-1)}$ 、 $-s_{i,i-1}^{(i-1)}$ 、 $-t_{i,i-1}^{(i-1)}$ 、 $-u_{i,i-1}^{(i-1)}$ 、 $-v_{i,i-1}^{(i-1)}$ 、 $-w_{i,i-1}^{(i-1)}$  如图 1-3 所示。

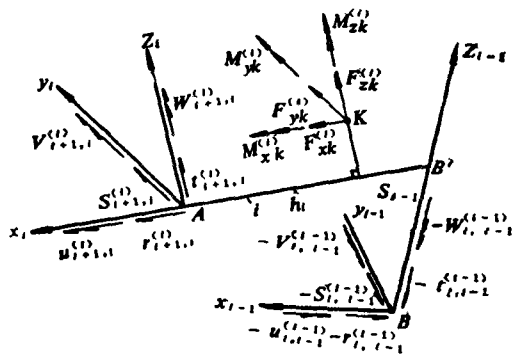


图 1-3

构件  $i$  的力平衡方程式可写成下列形式:

$$C_{i-1,i} \begin{bmatrix} r_{i+1,i}^{(i)} \\ s_{i+1,i}^{(i)} \\ t_{i+1,i}^{(i)} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^m \begin{bmatrix} F_{xk}^{(i)} \\ F_{yk}^{(i)} \\ F_{zk}^{(i)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{i,i-1}^{(i-1)} \\ s_{i,i-1}^{(i-1)} \\ t_{i,i-1}^{(i-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

构件  $i$  的力矩平衡方程式取下列形式:

$$\begin{aligned}
 & C_{i-1,i} \begin{bmatrix} u_{i+1,i}^{(i)} \\ v_{i+1,i}^{(i)} \\ w_{i+1,i}^{(i)} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^m \begin{bmatrix} M_{xk}^{(i)} \\ M_{yk}^{(i)} \\ M_{zk}^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_i \\ 0 & h_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{i+1,i}^{(i)} \\ s_{i+1,i}^{(i)} \\ t_{i+1,i}^{(i)} \end{bmatrix} \\
 & + \sum_{k=1}^m \begin{bmatrix} 0 & c_k & b_k \\ c_k & 0 & -(a_k + h_i) \\ -b_k & (a_k + h_i) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xk}^{(i)} \\ F_{yk}^{(i)} \\ F_{zk}^{(i)} \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} u_{i,i-1}^{(i-1)} \\ v_{i,i-1}^{(i-1)} \\ w_{i,i-1}^{(i-1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & s_{i-1} & 0 \\ -s_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{i,i-1}^{(i-1)} \\ s_{i,i-1}^{(i-1)} \\ t_{i,i-1}^{(i-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}
 \end{aligned}$$

(三) 单闭合空间机构的受力分析示例

为了简单起见, 在下面的示例中各构件的质量及各运动副中的摩擦均忽略不计。

(1) RCCC 机构

这是含有一个转动副  $R$  和三个圆柱副  $C$  的空间四杆机构, 如图 1-4 a) 所示。设已知加

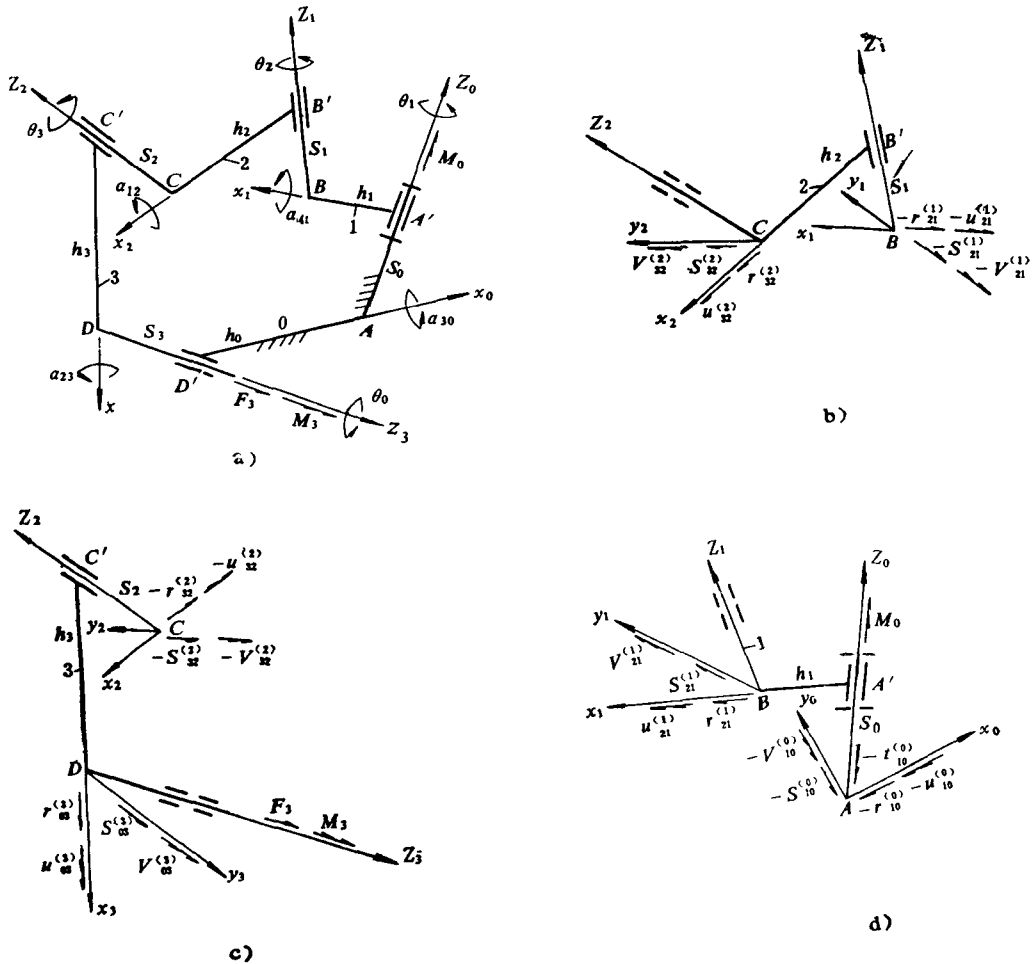


图 1-4

在构件 3 上沿  $Z_3$  轴的工作阻力  $F_3$  和工作阻力矩  $M_3$ ，要求确定各运动副中的约束反力以及加在原动件 1 上对  $Z_0$  轴的平衡力矩  $M_0$ 。(忽略各构件的质量)。

按图 1-4 进行坐标变换用的方向余弦矩阵为<sup>[8]</sup>：

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \cos\alpha_{ij} & \sin\theta_j \sin\alpha_{ij} \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j \cos\alpha_{ij} & -\cos\theta_j \sin\alpha_{ij} \\ 0 & \sin\alpha_{ij} & \cos\alpha_{ij} \end{bmatrix} \quad (12)$$

( $ij = 12, 23, 30, 01$ )

取构件 2 与 3 所组成的圆柱副作为示力副，其中待求的四个约束反分量为  $r_{32}^{(2)}$ 、 $s_{32}^{(2)}$ 、 $u_{32}^{(2)}$  及  $v_{32}^{(2)}$ 。

由于构件 2 上除约束反力外无其他外力作用(图 1-4, b) 所以按照式(4)及(6)或用直观法考察构件 2 沿  $Z_1$  轴的力及力矩平衡，可知  $s_{32}^{(2)} = 0$  及  $v_{32}^{(2)} = 0$ 。

利用式(8)写出构件 3 沿圆柱副轴线  $Z_3$ (图 1-4, c) 的受力平衡式：

$$[0, 0, 1] \left[ -C_{32} \begin{bmatrix} r_{32}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix} \right] = 0$$

即

$$r_{32}^{(2)} = F_3 / (\sin\theta_3 \sin\alpha_{23}) \quad (13)$$

利用式 (9) 写出构件 3 对圆柱副轴线  $Z_3$  的力矩平衡式:

$$[0, 0, 1] \left[ -C_{32} \begin{bmatrix} u_{32}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & s_2 & 0 \\ -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{32}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \\ 0 & -h_3 & 0 \end{bmatrix} C_{32} \begin{bmatrix} r_{32}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \end{bmatrix} \right] = 0$$

即

$$-u_{32}^{(2)} \sin\theta_3 \sin\alpha_{23} - r_{32}^{(2)} s_2 \cos\theta_3 \sin\alpha_{23} - r_{32}^{(2)} h_3 \sin\theta_3 \cos\alpha_{23} + M_3 = 0$$

或

$$u_{32}^{(2)} = \frac{M_3}{\sin\theta_3 \sin\alpha_{23}} - F_3 (s_2 \cos\theta_3 \sin\alpha_{23} + h_3 \sin\theta_3 \cos\alpha_{23}) \quad (14)$$

构件 2 与 1 所组成圆柱副中的四个约束反力分量, 可利用式(10)、(11) 对构件 2 的平衡式来确定, 即

$$C_{12} \begin{bmatrix} r_{32}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{21}^{(1)} \\ s_{21}^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{12} \begin{bmatrix} u_{32}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_2 \\ 0 & h_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{32}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{21}^{(1)} \\ v_{21}^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & s_1 & 0 \\ -s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{21}^{(1)} \\ s_{21}^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此可得

$$\begin{aligned} r_{21}^{(1)} &= r_{32}^{(2)} \cos\theta_2 & s_{21}^{(1)} &= r_{32}^{(2)} \sin\theta_2 \\ u_{21}^{(1)} &= u_{32}^{(2)} \cos\theta_2 - s_{21}^{(1)} s_1 & v_{21}^{(1)} &= u_{32}^{(2)} \sin\theta_2 + r_{21}^{(1)} s_1 \end{aligned} \quad (15)$$

构件 0 与 3 所组成圆柱副中的四个约束反力分量, 可根据构件 3 (图 1-4, c) 的下列平衡式来求, 即

$$-C_{32} \begin{bmatrix} r_{32}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{03}^{(3)} \\ s_{03}^{(3)} \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-C_{32} \begin{bmatrix} u_{32}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & s_2 & 0 \\ -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{32}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \\ 0 & -h_3 & 0 \end{bmatrix} C_{32} \begin{bmatrix} r_{32}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{03}^{(3)} \\ v_{03}^{(3)} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此可得

$$\begin{aligned} r_{03}^{(3)} &= r_{32}^{(2)} \cos\theta_3, & s_{03}^{(3)} &= -r_{32}^{(2)} \sin\theta_3 \cos\alpha_{23} \\ u_{03}^{(3)} &= u_{32}^{(2)} \cos\theta_3 - r_{32}^{(2)} s_2 \sin\theta_3, \\ v_{03}^{(3)} &= -(u_{32}^{(2)} \sin\theta_3 + r_{32}^{(2)} s_2 \cos\theta_3) \cos\alpha_{23} + r_{32}^{(2)} h_3 \sin\theta_3 \sin\alpha_{23} \end{aligned} \quad (16)$$

构件 1 与 0 所组成转动副中的五个约束反力分量及加在原动件 1 上的平衡力矩, 可根据构件 1 (图 1-4, d) 的下列平衡式来求, 即

$$C_{01} \begin{bmatrix} r_{21}^{(1)} \\ s_{21}^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{10}^{(0)} \\ s_{10}^{(0)} \\ t_{10}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{01} \begin{bmatrix} u_{21}^{(1)} \\ v_{21}^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_1 \\ 0 & h_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{21}^{(1)} \\ s_{21}^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{10}^{(0)} \\ -v_{10}^{(0)} \\ M_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & s_0 & 0 \\ -s_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{10}^{(0)} \\ s_{10}^{(0)} \\ t_{10}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此可得

$$\begin{aligned} r_{10}^{(0)} &= r_{21}^{(1)} \cos \theta_1 - s_{21}^{(1)} \sin \theta_1 \cos \alpha_{01} \\ s_{10}^{(0)} &= r_{21}^{(1)} \sin \theta_1 + s_{21}^{(1)} \cos \theta_1 \cos \alpha_{01} \\ t_{10}^{(0)} &= s_{21}^{(1)} \sin \alpha_{01} \\ u_{10}^{(0)} &= u_{21}^{(1)} \cos \theta_1 + (s_{21}^{(1)} h_1 \sin \alpha_{01} - v_{21}^{(1)} \cos \alpha_{01}) \sin \theta_1 - s_{10}^{(0)} \\ v_{10}^{(0)} &= u_{21}^{(1)} \sin \theta_1 + (v_{21}^{(1)} \cos \alpha_{01} - s_{21}^{(1)} h_1 \sin \alpha_{01}) \cos \theta_1 + r_{10}^{(0)} s_0 \\ M_0 &= -(v_{21}^{(1)} \sin \alpha_{01} + s_{21}^{(1)} h_1 \cos \alpha_{01}) \end{aligned} \quad (17)$$

由于平衡力矩  $M_0$  起主动作用, 所以原动件角速度  $\omega_1$  的符号系和  $M_0$  一致。

(2) RRSRR 机构

在图 1-5, a 所示含有四个转动副  $R$  和一个球面副  $S$  的空间五杆机构中, 设已知加在构

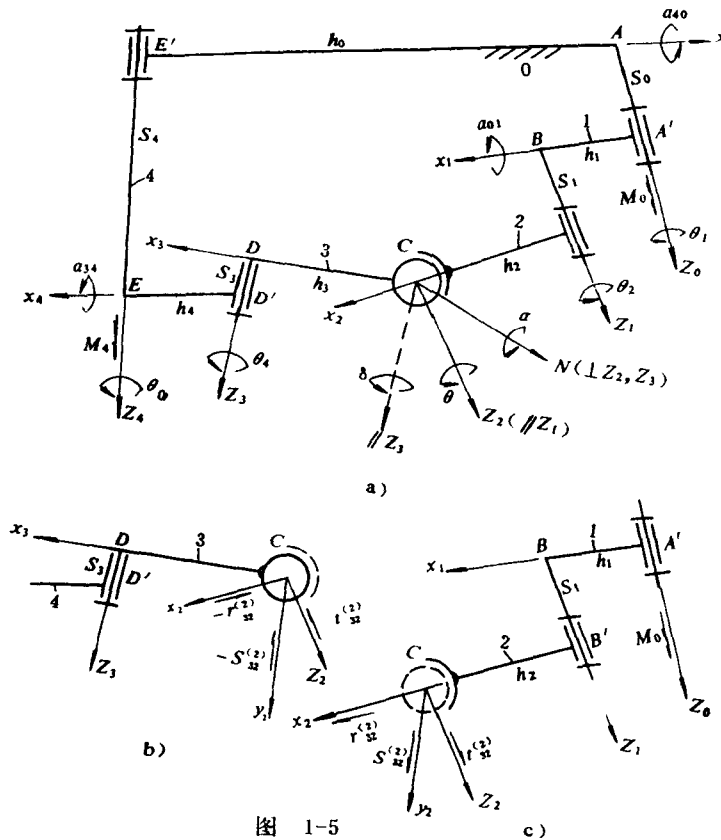


图 1-5



件1上的驱动力矩  $M_0$ ，但忽略各构件的质量。作该机构的受力分析时，将位于中间部位的球面副作为示力副是合适的。如果球面副中约束反力的三个分量一经求出，则其他各转动副中的约束反力以及作用在构件4上的平衡力矩  $M_4$  即不难确定。因此下面为简单起见，仅讨论示力副中约束反力的确定。

对图1-5来说，进行坐标变换用的方向余弦矩阵  $C_{01}$ 、 $C_{12}$ 、 $C_{40}$  均可按式(12)应用下标数字轮换办法直接写出。至于由座标统  $x_2(y_2)z_2$  变换至  $x_3(y_3)z_3$  的方向余弦矩阵则可引用三个欧拉角  $\theta$ 、 $\alpha$ 、 $\delta$  写出如下：

$$C_{32} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \delta - \sin \theta \cos \alpha \sin \delta & \sin \theta \cos \delta + \cos \theta \cos \alpha \sin \delta & \sin \alpha \sin \delta \\ -\cos \theta \sin \delta - \sin \theta \cos \alpha \cos \delta & -\sin \theta \sin \delta + \cos \theta \cos \alpha \cos \delta & \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \theta \sin \alpha & -\cos \theta \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (18)$$

为了确定示力副中的约束反力分量  $r_{32}^{(2)}$ 、 $s_{32}^{(2)}$ 、 $t_{32}^{(2)}$ ，可先考察构件2对转动副轴线  $Z_1$  (图1-5, c) 的力矩和应等于零的关系。显然， $s_{32}^{(2)} = 0$ 。

根据构件2和1一起对转动副轴线  $Z_0$  (图1-5, c) 的力矩和也应为零，可写出：

$$[0, 0, 1] C_{01} \left[ C_{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_2 \\ 0 & h_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{32}^{(2)} \\ 0 \\ t_{32}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -h_1 \\ 0 & h_1 & 0 \end{bmatrix} C_{12} \begin{bmatrix} r_{32}^{(2)} \\ 0 \\ t_{32}^{(2)} \end{bmatrix} \right] + M_0 = 0$$

$$\text{即} \quad r_{32}^{(2)}(s_1 \cos \theta_2 \sin \alpha_{01} + h_1 \sin \theta_2 \cos \alpha_{01}) - t_{32}^{(2)}(h_1 + h_2 \cos \theta_2) \sin \alpha_{01} + M_0 = 0 \quad (19)$$

约束反力分量  $r_{32}^{(2)}$  及  $t_{32}^{(2)}$  的另一关系式可由构件3有绕转动副轴线  $Z_3$  转动的自由度得出(图2-5, b)。利用式(9)，构件3对轴线  $Z_3$  的力矩和为零关系式可写成

$$[0, 0, 1] \left[ - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \\ 0 & -h_3 & 0 \end{bmatrix} C_{32} \begin{bmatrix} r_{32}^{(2)} \\ 0 \\ t_{32}^{(2)} \end{bmatrix} \right] = 0$$

由此可得

$$-r_{32}^{(2)}(\cos \theta \sin \delta + \sin \theta \cos \alpha \cos \delta) + t_{32}^{(2)} \sin \alpha \cos \delta = 0 \quad (20)$$

将式(19)与(20)联立求解可得示力副中约束反力分量  $r_{32}^{(2)}$  及  $t_{32}^{(2)}$ 。由上可知，球面副中的约束反力，既作用在  $x_2 z_2$  平面内，也作用在  $x_3 z_3$  平面内。

#### (四) 结 束 语

对单闭合空间机构各运动副中的约束反力，利用本文所介绍的一个示力副法可较简便地推导出分析计算公式，从而可进一步研究某些参数对约束反力大小的影响。如果空间机构不是单闭合机构而含有多个封闭形，则作受力分析的方法和步骤亦相类似，但是对每个封闭形都要选取一个示力副，这些示力副中的约束反力，有时可依次求出，有时需配合联解。

#### 参 考 文 献

- [1] Yang A. T., Freudenstein F. Application of Dual-Number Quaternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms. Trans. ASME, Series E, Vol. 31, No. 2, 1964.
- [2] Bagci C. Dynamic Force and Torque Analysis of Mechanisms Using Dual Vectors and 3×3 Screw Matrix. Trans. ASME, series B, Vol. 94, No. 2, 1972.

- [3] Aref M. N., Ibrahim S. R. Motion and Static Force Analyses of Spatial Linkages. Journal of Mechanisms Vol. 4, №. 3, 1969.
- [4] Полухин В. П. Определение реакций в пространственном четырехзвезднике Механика Машин 29-30, 1971.
- [5] 张启先 用解析法作空间机构的研究和设计 (学位论文), 1962.
- [6] 天津大学主编, 机械原理, 人民教育出版社, 1979.
- [7] 张启先 机构中过约束的判定, 机械原理资料汇编, 全国机械原理师资进修班资料, 西北电讯工程学院代印, 1979.
- [8] 张启先 用方向余弦矩阵法作空间机构的位移分析, 北京航空学院科学研究报告 BH-B352, 1978.

## FORCE ANALYSIS OF SINGLE-LOOP SPATIAL MECHANISMS BY MEANS OF ONE FREE PAIR-ELEMENT

*Zhang Qixian*

### Abstract

Differed from the traditional method of force analysis of spatial mechanisms, this Paper suggests a method of force analysis by means of first determination of the reaction acting at one kinematic pair. This reaction is always statically determined for ordinally constrained mechanisms. In this paper the process of determination via matrices is given in detail. The four-link RCCC and five-link RRSRR mechanisms are analysed as examples. For RCCC mechanism the determination of other reactions acting at the remaining pairs and the determination of balancing force acting on the input or output link are given as well. This method of force analysis can be applied to any arbitrary complex spatial mechanisms.