北京市研究生招生

命题研究题集

下册

北京市高等学校招生委员会办公室

说　明

研究生入学考试的命题工作，是整个招生工作中的一个重要环节。为进一步提高命题质量，我们组织北京地区研究生招生单位开展了对命题工作的研究和讨论，为了配合命题的研究工作，我们选集了北京高等学校、科研单位几年来研究生入学考试的试题，即这套《命题研究题集》。本题集分上、下两册，上册包括文科及医学、农学、林学各专业，下册包括理、工科各专业。

这套题集，是按照招生的学科、专业进行编排的，可以比较方便地对同一招生专业所要求的各种不同考试科目的试题，进行分析；对同一考试科目不同招生单位的试题，进行比较；同时，这套题集也为今后研究改革命题工作，提供了必要的资料。为此，我们希望这套题集对今后进一步做好命题工作能起到积极的作用。选集的这些试题，从整体上说反映了近几年来北京研究生入学考试业务课命题的基本情况，在一定程度上也反映了大部分招生专业对考生在学业方面的基本要求，以及录取研究生的学业水平。我们也想，该题集还可供考生、高等学校学生和有关人员用以检查自已的学业情况以及平常学习时使用的一个重要参考材料。

由于时间比较仓促，加之编者水平所限，在编写工作中难免有疏漏和不妥之处，请读者批评指正。

——编者

一九八五年九月

目　　录

下　　册

一 数 学

（一） 基础数学、计算数学

数 学 分 析（10）

一、（20分）试证：若$\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)$ 关于x在区间(a,b)一致成立，即任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对于一切满足$0<|y-y_0|<\delta$的y及一切$x\in(a,b)$，有$|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon$成立，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\psi(y)$对每个$y\in(c,p)$成立，则

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

二、（20分）设函数g在闭区间$[0,1]$连续，$fn(x)=x^n g(x)$，$x\in[0,1]$，$n=1,2,\cdots\cdots$，求证：函数序列$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$一致收敛的充要条件是 $g(1)=0$。

三、（20分）设函数f,g在区间$(-\infty,+\infty)$连续，并对一切$x\in(-\infty,+\infty)$有$g(x+1)=g(x)$，求证：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)dx=\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 g(x)dx\right).$$

四、（20分）1．设$\begin{cases} x=\varphi(u,v)\\ y=\psi(u,v)\end{cases}$，二元实值函数$\varphi$，$\psi$的偏导数在全平面$R^2$上连续且满足方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}=1,\qquad (u,v)\in R^2$$

试证：若$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0,v_0)\neq 0$，记$x_0=\varphi(u_0,v_0)$，则存在点$(x_0,v_0)$的邻域$V_0$及定义在$V_0$上的函数$\begin{cases}y=f(x,v)\\u=g(x,v)\end{cases}$且满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial x},\qquad (x,v)\in V_0.$$

2．设 $I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{xy} f(x,y,z)dz$，其中$f$是连续函数，试写出上述积分按$x$，$y$，$z$的先后次序的累次积分．

五、（20分）1．设数列$\{a_n\}$，满足条件：$0<a_n<1,(1-a_n)a_{n+1}>\frac{1}{4}$（$n=1$，2，……），求证：数列$\{a_n\}$收敛，并求它的极限．

2．设f的导函数f'在闭区间$[0,1]$黎曼常义可积，
求证：

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant\int_0^1|f(x)|dx+\frac{1}{2}\int_0^1|f'(x)|dx,$$

数学分析与高等代数（01）

1．设$f(x)$在（0，∞）可微，且满足不等式

$$0\leqslant f(x)\leqslant ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}},\triangle x\in(0,\ \infty)\ .$$

试证明存在一个点号$\xi\in$（0，∞）使得

$$f'(\xi\in)=\frac{2}{2\xi+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}.\qquad (10分)$$

2．设$a>0$是常数，计算下列积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax} xy^2dxdy. \qquad (13分)$$

3.设$F(x,y,z)$在R^3中有连续的一阶偏导数$\frac{\partial F}{\partial x}$，$\frac{\partial F}{\partial y}$，$\frac{\partial F}{\partial z}$，并且满足下列不等式

$$y\frac{\partial F}{\partial x}-x\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\geqslant\alpha>0,\ \forall(x,y,z)\in R^3,$$ 其中α为常数，试证明当点(x,y,z)沿着曲线

Γ: $x=-\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, $t\geqslant 0$，趋向无穷远时$F(x,y,z)\to+\infty$.　　　　(13分)

4.设$fn(x)$ $(n=1,2\cdots\cdots)$ 在$[0,1]$上连续，并且

$fn(x)\geqslant fn_{+1}(x)$, $\forall x\in[0,1]$, $n=1,2\cdots\cdots$.

假定$fn(x)$在$[0,1]$收敛于$f(x)$，试证明$f(x)$在$[0,1]$上达到最大值.　　　　(14分)

5.设向量组α_1，$\alpha_2\cdots$，αn线性无关，问向量组$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_3$，$\cdots$，$\alpha n_{-1}+\alpha n$，$\alpha n+\alpha_1$
是否线性无关？试证明你的结论.　　　　(12分)

6.试证明：不可能找到三个不同的复数，使其中的任意一个的平方等于其它两数之和.　　　　(13分)

7.设A，B是两个可交换的实数方阵，已知有正整数k使得$A^k=0$. 试证明

$$|A+B|=|B|. \qquad (12分)$$

8.设A是一个矩阵.试证明

秩(A)=秩$(A'A)$=秩$(A'AA')$.　　　　(13分)

高　等　代　数（10）

1．设$f(x)$，$g(x)$都是某一数域F上的多项式，且$g(x)$的次数为$n>0$．证明，$f(x)$可以唯一地表示成

$$f(x)=a_0(x)+a_1(x)g(x)+\cdots+a_r(x)g(x)^r$$

的形式，这里$a_i(x)$或者是0，或者是F上一个次数小于n的多项式．　　　　（16分）

2．设U，V，W都是一个向量空间的子空间，且$W\leqslant U+V$．

（a）$W=U\wedge W+V\wedge W$是否永远成立？如果是，证明；如果不是举一反例．

（b）如果$U\leqslant W$，那么（a）中的等式是否成立？（16分）

3．设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个n阶行列式，a_{ij}都是实数，且

$(n-1)|a_{ij}|<|a_{ij}|$，若$i\neq j$．证明$D\neq 0$　（16分）

4．设　$f(x,y,z)=2x^2+2y^2+2z^2-2yz-2zx-2xy$是一个实二次型，试求一正交变换将$f(x,y,z)$化为一个只含有变量的平方项的二次型．　　　　（16分）

5．设V是数域F上一个n维向量空间，V的一个线性变换σ叫做V到一个子空间W上的射影，如果$\sigma(V)=W$，并且σ保持W的每一个向量不动．

(a) 证明，V的线性变换σ是V到某一子空间上的射影的充要条件是$\sigma^2=\sigma$；

(b) 设σ是一个射影而τ是任意一个线性变换，证明$\sigma\tau$与$\tau\sigma$有相同的特征多项式.　　　　(18分)

6.设σ是欧氏空间E的一个非零向量.a_1，…，$a_n\in E$，满足以下条件：

(1) $\langle a_i, a\rangle>0$，$i=1,2,\cdots,n$；

(2) $\langle a_i, a_j\rangle\leqslant 0$，$i,j=1,\cdots,n$，且$i\neq j$.

证明a_1，a_2，…，a_n线性无关：　　　　(18分)

实变函数论（10）

1.函数$f(x)$在$[a,b]$的几乎每点都连续.

求证f在$[a,b]$可测.

2.证明下述定理：若f是可测集E上的可积函数，且$0\leqslant f(x)\leqslant A<\infty$，则

$$\int_E f(x)dx=\int_0^A |\{x\in E \mid f(x)>\lambda\}| d\lambda.$$

($|\cdot|$表示集合的Lebesgue测度)

3. 求证函数$f(x)=\sum\limits_{n-1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{[n\log(n+1)]^2}$在$[0,1]$绝对连续.

4.设$f\in L(R)$且f在R上连续，求证

$$\lim_{e\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\frac{e}{e^2+y^2}dy=\pi f(x)\ (x\in \mathrm{R}).$$

5.对于R上的可测函数f，定义

$mf(\lambda)=|\{x\in \mathrm{R}\mid f(x)>\lambda\}|$ （$|\cdot|$表示Lebesgue测度），设$f_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 依测度收敛到$f(x)$．求证：若$mf(\lambda)$在点λ_0处连续，则

$$\lim_{n\to\infty} mf_n(\lambda_0)=mf(\lambda_0)$$

复变函数（10）

一、是否存在整函数$f(z)=u(x,y)+\alpha v(x,y)$，使得

$u(x,y)-v(x,y)=2(x^2-y^2)$ ．若存在试求此函数．

二、计算以下积分：

（1） $\displaystyle\int_{|z|=2} ln\frac{z+1}{z-1}dz$，其中$ln\dfrac{z+1}{z-1}$在$|z|=2$上单值连续，积分路径为逆时针方向．

（2） $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{dz}{z(\cos z-1)}$，其中积分路径为逆时针方

三、试确定满足不等式

$$1<\left|\frac{z-i}{z+i}\right|<2$$

的z所构成的平面点集，（要求写明计算过程及推导根据，并作草图表明所得结果）。

四、$f(z)$是区域$0<|z|<\infty$内不恒为常数的解析函数，且满

足关系式

$$f(z) = -zf(az)$$

及条件$f(1)=0$，其中a是复常数，$0<|a|<1$.

试证明$z=0$及$z=\infty$都是$f(z)$的本性奇异点.

五、设L为一条简单光滑曲线，$\varphi(t)$是定义于L上的连续函数，试证明

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2}dt$$

在沿L割开的复平面（即除去L的复平面）上解析，

且$F(\infty)=0$，再求出

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{t}{(t-z)^2}dt$$

其中积分路径逆时针方向。

（以上五题每题20分）.

复变函数（05）

1.（20分）

设$f(z)$在区域D内解析且不是常数；C是D内一条闭若当曲线，其内部也包含于D。若在C上$f(z)$的模为常数，则C的内部至少包含$f(z)$的一个零点。

2.（20分）

设C为光滑有向曲线，$\varphi(\zeta)$在C上连续，试证在不包含C的任何区域D内函数

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$ 解析。

3．(20分)

利用留数理论计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx\ .$$

4．(20分)

复球面旋转是一种特殊的分式线性变换。试写出这类分式线性变换的一般形式，并用以验证球面度量

$$ds=\frac{|dz|}{1+|z|^2}$$

在球面旋变换下保持不变。

5．(20分)

闭单位圆盘与线段〔$-2i$，$2i$〕和〔-2，2〕三者的并集之余集是一个单连通区域记为G。试求G到单位圆盘的单叶共形映照函数$f(z)$，使$f(\infty)=0$，$f'(\infty)>0$。

一般拓扑（29）

一、（16分）设R是实数集，带有通常拓扑，举出分别满足以下条件的R中点集A（或A_1，A_2）各一个例子：

1．A的导集$A^d\neq\varnothing$，但是A^d的导集$A^{dd}=\varnothing$．

2．A是开集，并且A的闭包的内部$\overline{A}^0\neq A$．

3. A的闭包的内部$\overline{A}^{0}=A$，并且A不是连通集。

4. A_1与A_2是不相交的闭集，并且A_1与A_2的距离$d(A_1,A_2)=0$。

二、（20分）设(x,d)是度量空间，对于$a\in X$与实数$r>0$，命　$S(a,r)=\{x\in X \mid d(a,x)<r\}$。

证明以下各命题：

1. 若A是X中稠密集，则$B=\{S(a,\frac{1}{n}) \mid \quad n=1,2\cdots;$

$\in A\}$是X的拓扑基。

2. 若对于每一点$x\in X$与每一实数$r>0$，$\overline{S(x,r)}$是紧集，则(X,d)是完备度量空间。

3. 若度量空间(X,d)是完备的，映射f：$X\to X$是连续的，并且存在$0\leqslant\lambda<1$使得对于任意点$x,y\in X$都有

$d(f(x),f(y))\leqslant\lambda d(x,y)$，则存在唯一点$x_0\in X$使得$f(x_0)=x_0$

三、（16分）举出分别满足以下条件的拓扑空间X各一个例子：

1. X是T_1空间，它的任意两个非空的开集必相交。

2. X是T_2空间，它的任意开集的边界是空集。

3. X是T_0空间，它使自对于任意的函数f：$X\to R$（实数空间）都是连续的。

4. X与积空间$X\times X$是同胚的。

四、（20分）设τ_1与τ_2是非空集X上的两个拓扑，并且$\tau_1\supset\tau_2$。

1. 若(X,τ_2)是T_2空间，证明(X,τ_1)也是T_2空间。

2. 若(X,τ_1)是紧空间，证明$(X,\tau_2$也是紧空间。

3. 若(X,τ_1)是紧空间，(X,τ_2)是T_2空间，证明τ_1与τ_2

是一致的.

4.若(X,τ_2)是正则空间，那末(X,τ_1)是否一定是正则空间?

5.(28分)

1.设X与Y都是拓扑空间，$A\subset X$，$B\subset Y$.证明

$$\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}.$$

2.设f：$X\to Y$是满映射.若X是可分空间，Y不是可分空间，证明f必不连续.

3.在欧氏平面R^2上作出一个连续函数

$$f:\ R^2\to[0,1]$$

使得$f(a)=0$，$f(b)=1$，其中$a=(0,0)$，$b=(1,1)\in R^2$（不必证明）.

4.设X是拓扑空间.若X上任意的实值函数都是连续的，证明X必是离散拓扑空间.

综合考试（数学）（01）

一、在以下七个小题中任选五题，请不要多做，答卷超过五题者，一律以前五题评分。（每小题10分）

1.设$f\in L(R^n)$，g是R^n上非负连续函数.

令$h(x)=min(f(x),g(x))$，$x\in R^n$.试证明$h\in L(R^n)$.

2.试用留数定理计算下列积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}.$$

3.设a与b是给定的实数． 证明方程式

$$y'''+ay''+by'+e^{a+b}y=0$$

至少存在一个解$y_*(x)$满足：$\lim\limits_{x\to+\infty} y_*(x)=0$。

4.设$u(t,x,y)$是波动方程

$$u_{tt}-4(u_{xx}+u_{yy}=0$$

的解，并且在$t=0$上满足初值条件：

$$\begin{cases} u(0,x,y)=\varphi(x,y); \\ u_t(0,x,y)=0, \end{cases}$$

其中

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} 0, & 当x^2+y^2\leqslant 1; \\ 正值, & 当x^2+y^2>1. \end{cases}$$

试指出当$t>0$时$u(t,x,y)\equiv 0$的区域。

5.设C[0,1]表示区间[0,1]上的全体连续函数所组成的Banach空间，其范数定义为

$$\|f\|_C=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

又设C′[0,1]表示[0,1]上的全体具有一阶连续导数的函数所组成的Banach空间（函数在端点0与1的导数理解为右导数与左导数），其范数定义为

$$\|f\|_{C'}=\|f\|_C+\|f'\|_C.$$

又设$C_0^1[0,1]$表示$C^1[0,1]$的子空间：

$$C_0^1[0,1]=\{f \mid f\in C'[0,1];\ f(0)=0\}.$$

我们在$C^1[0,1]$上定义算子Tf：

$$(Tf)(x)=\frac{1}{K(x)}\frac{d}{dx}f(x),\quad \forall x\in[0,1],$$

其中$K(x)\in C[0,1]$是给定的函数，且$K(x)>0\quad \forall x\in[0,1]$.

试证明：1）T作为$C_0^1[0,1]\to C[0,1]$的线性算子，具有连续的逆算子；2）T是有界算子；3）T^{-1}作为$C[0,1]$上的线性算子，它的谱$\sigma(T^{-1})=\{0\}$.

6.1）给出群G在在集合S上的作用的定义.

2）证明一个素数方幂p^r（$r\geqslant$）阶群的中心$\neq\{1\}$

7.1）如果曲面M含有一条直线L，问曲面M沿L各点的主曲率是否可能同时为正或同时为负？为什么？

2）如果曲面M与平面P沿曲线C相切、问曲面M沿C各点的主曲率是否可能同时为正或同时为负？为什么？

二、在以下七个小题中任选四题，请不要多做，答卷超过四个题目者，一律以前四题评分.（每小题13分）

1.考虑常微分方程组

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y; \\ \dfrac{dy}{dt}=3y+x(x-1). \end{cases}$$

1）在相平面(x,y)上求出方程组（$*$）的奇点，并画出在奇点附近的轨线分布图.

2）证明存在一条连结两个奇点的轨线.

2.设$f(x)$是$[a,b]$上单调上升函数，且有