

原子核的轉动慣量和 g_R 因子^{*†}

曾謹言 張庆营 楊立銘

(北京大学物理系)

提 要

基于 Inglis 的推轉模型(cranking model), 我們利用 Nilsson 波函数对原子核轉动慣量及集体运动 g_R 因子作了仔細的計算, 計算結果相当滿意, 無論在数值上, 或是随不同原子核的变化, 以及随不同激发帶的变化上都和实验結果相近. 其原因可能是由于選擇了一个較恰当的、含有强自旋轨道耦合的軸对称自洽場.

一. 引 言

原子核集体运动的存在已經为許多实验所确定^[1]. 但在以往的理論中, 集体运动的参量如轉动慣量 J 、集体运动 g_R 因子、原子核表面剛度 C 等等只能由实验定出, 或从一般粗略考虑作一些估計. 例如在非旋运动假設下轉动慣量計算值只有实验值的 $1/8$ — $1/6$, 而在剛体运动情形下, J 計算值则比实验值大 2—4 倍^[1]. 至于 g_R 因子以往一般都采用 $g_R \approx Z/A$, 但实验值(稀土元素)则比 Z/A 小^[6,12]. 近年来这些問題一直是大家最注意的問題之一. 一般認為集体运动的参量的数量涉及原子核内部运动的細节^[6], 通过这些参量的闡明可以对原子核内部运动有更深入的了解.

我們認為, 这些参量的数值是内部粒子运动平均贡献的总和. 它对内部粒子能級及耦合方式的依賴性較灵敏, 但对波函数的徑向行为不很敏感, 因此可以期望在 Inglis 的推轉模型(cranking model)^[4]基础上, 利用 Nilsson 波函数^[6]来进行的計算应当能近似正确地反映出实际的情况. 下面的計算表明, 無論从数值上, 或随不同原子核的变化以及随激发帶的变化上都和实验相当符合. 以下我們分別討論轉动慣量及 g_R 因子問題.

二. 轉 动 慣 量

2.1 一般討論

按 Inglis 模型, 原子核的轉动慣量 J 为^[4]

$$J = 2 \sum_n \frac{|\langle 0 | L_z | n \rangle|^2}{E_n - E_0} \quad (1)$$

其中 L_z 为原子核的总轨道运动角动量的 z 分量(原子核的对称軸取为本地坐标系的 z 軸), $|n\rangle$ 、 E_n 为核内部运动波函数及其相应能量, Inglis 等人曾根据 (1) 式并利用諧振

* 1959年7月18日收到.

† 这项工作是北京大学物理系原子核理論組向偉大的国庆十周年献礼之一.

子波函数进行过计算^[4,6], 得出结论: 在满壳层的情况下, (1)式给出非旋值, 在非满壳层的情况下则给出刚体值, 都与实验不符. A. Bohr 及 B. Mottelson^[6]也进行了研究, 认为剩余相互作用能使计算值从刚体值减小至实验值. 在他们所有的计算中, 都只用一个简单的没有自旋轨道耦合的谐振子波函数, 但强自旋轨道耦合项对能级的位移等所起的作用是非常重要的, 对于计算这些参量的影响很大. 因此他们的估计在数量上的可靠性就有问题.

转动惯量的出现是由于内部核子在追随自洽场转动时表现的惯性, 这种贡献不仅来自核子的轨道运动, 而且与它的自旋运动也有关系. 因此应当首先将(1)式推广到粒子有自旋的情况, 推广的结果只是简单地将(1)式中 L_z 换为 J_z , 这在 Bohr 及 Mottelson 文^[6]中已提到过, 我们在此仅作一个简单的证明.

在 Inglis 模型的精神下, 假定自洽场绕 z 轴以角速度 ω 旋转. 在本体坐标系中, 核子的哈密顿量, 除了有额外的柯里奥利力所引起的位能外, 与 Nilsson 所选取的哈密顿量相同^[6]. 设 $\psi(\underline{x}, t)$ 表核子在固定坐标系中的波函数, 在本体坐标系中这个波函数就变为 $S\varphi(\underline{x}', t)$:

$$\psi(\underline{x}, t) \equiv S\varphi(\underline{x}', t), \quad (2)$$

其中 $S = e^{-i\omega t \frac{\sigma_z}{2}}$, $\underline{x}'$ 为本体坐标系中粒子的坐标, 它可以从固定坐标系经过绕 z 轴转角 ωt 得到, 因此

$$\psi(\underline{x}, t) = e^{-i\omega t(L_z + S_z)/\hbar} \varphi(\underline{x}, t). \quad (3)$$

$\varphi(\underline{x}', t)$ 所满足的方程可从 $\psi(\underline{x}, t)$ 所满足的薛定谔方程得到:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\underline{x}, t) = \hat{H} \psi(\underline{x}, t) = \omega \hat{J}_z S \varphi(\underline{x}', t) + i\hbar S \dot{\varphi}(\underline{x}', t).$$

因此

$$i\hbar \dot{\varphi}(\underline{x}', t) = (S^{-1} \hat{H} S - \omega \hat{J}_z) \varphi(\underline{x}', t). \quad (4)$$

其中在本体坐标系中的哈密顿量 $S^{-1} \hat{H} S$ 为 Nilsson 所选取的哈密顿量. $\hat{J}_z = \hat{L}_z + \hat{S}_z$ 从(4)式求得准到一级微扰近似的定态波函数为

$$\varphi_a = \varphi_a^0 + \omega \sum_b \frac{\langle b | \hat{J}_z | a \rangle}{E_a^0 - E_b^0} \varphi_b^0, \quad (5)$$

这里 φ_a^0 , E_a^0 可以取为 Nilsson 波函数及相应的能量, 由此可以找到 $\hbar$ 的本征能量, 其中 $\frac{\omega^2}{2}$ 的系数即为处于 φ_a 态下的粒子所贡献的转动惯量 J_a .

$$J_a = 2\hbar \sum_b \frac{|\langle a | \hat{J}_z | b \rangle|^2}{E_b^0 - E_a^0} \quad (6)$$

原子核总转动惯量 J 即等于所有核子所贡献的总和:

$$J = \sum_a J_a. \quad (7)$$

按 Nilsson 的计算^[6], $|a\rangle$ 可以展开如下:

$$|a\rangle = \chi_{aQ} = \sum_{l\Lambda} a_{l\Lambda} |Nl\Lambda\Sigma\rangle \quad (\Lambda + \Sigma = \Omega) \quad (8)$$

展开系数 $a_{l\Lambda}$ 可以从 Nilsson 原文^[6]中查到； Ω 是核子总角动量在对称轴上的投影； $|Nl\Lambda\Sigma\rangle$ 是 Nilsson 所用之基矢； N 是谐振子总量子数； l, Λ 是核子的轨道角动量及其在 z' 轴的投影的量子数， $\Sigma = \pm \frac{1}{2}$ 是自旋量子数。

经过计算表明，在(6)式中不为零的矩阵元是

$$\begin{aligned} \langle b_{a\pm 1} | j_x | a_a \rangle &= \frac{1}{2} \sum_l \left\{ \sum_{\Lambda} a_{l\Lambda} b_{l\Lambda\pm 1} \sqrt{(l\mp\Lambda)(l\pm\Lambda+1)} + a_{lQ\pm 1/2} b_{lQ\pm 1/2} \right\} = \\ &= -\langle b_{-(Q\pm 1)} | j_y | a_{-Q} \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

注意在(6)式的求和中需要考虑泡利原理。

2.2 輕核轉動区

在輕核轉動区中的原子核轉動慣量計算結果如下：

表 1. 輕核轉動区原子核轉動慣量

I					
原 子 核	K	δ	η	$\hbar^2/2J_{\text{計算}}(\text{keV})$	$\hbar^2/2J_{\text{實驗}}(\text{keV})^{1)}$
$^{12}\text{Mg}^{24}$	$0+$	0.40	6	201	229
$^{12}\text{Mg}^{25}$	$\frac{5}{2}+$	~ 0.40	6	247	272
$^{13}\text{Al}^{25}$	$\frac{5}{2}+$	~ 0.40	6	247	272
	$\frac{1}{2}+$	~ 0.40	6	180	176
	$\frac{1}{2}+$	~ 0.40	6	192	160
	$\frac{1}{2}-$	~ 0.40	6	123	117
$^{12}\text{Mg}^{26}$	$0+$	(~ 0.40)	6	288	(305)
II					
原 子 核	K	δ	η	$\hbar^2/2J_{\text{計算}}(\text{keV})$	$\hbar^2/2J_{\text{實驗}}(\text{keV})$
$^9\text{F}^{19}$	$\frac{1}{2}+$	~ 0.3	6	255	$\sim 300^{2)}$
	$\frac{1}{2}-$	~ 0.3	6	181	~ 200
$^{10}\text{Ne}^{20}$	$0+$	(~ 0.36)	6	230	(270)
$^{10}\text{Ne}^{21}$	$\frac{3}{2}+$	0.36	6	216	
$^{10}\text{Ne}^{22}$	$0+$	(~ 0.36)	6	202	(213)
$^{11}\text{Na}^{23}$	$\frac{3}{2}+$	0.36	6	191	

1) D. A. Bromley, "Proceedings of the Rehovoth Conference on Nuclear Structure" (1957), P.III.

2) G. Rakavy, *Nuclear Phys.* 4 (1957), 375.

III

原 子 核	K	δ	η	$\hbar^2/2J_{\text{基}}(\text{keV})$	$\hbar^2/2J$ (keV)
$_{13}\text{Al}^{26}$	5+	(~0.25)	4	196	208
$_{13}\text{Al}^{27}$	$\frac{5}{2}+$	0.25	4	274	?
	$\frac{1}{2}+$	~0.25	4	186	200
	$\frac{1}{2}+$	~0.25	4	177	185
$_{13}\text{Al}^{28}$	3+	(~0.20)	4	200	204

在表 I 中, K 表示原子核总角动量在对称轴上的投影^[27]; $\delta = \Delta R/R$ 表示原子核的形变; η 为 Nilsson 所选取的和形变有关的参数^[27].

图 1 给出了 $\hbar^2/2J$ 的实验曲线、计算曲线及非旋和刚体的结果, 由图 1 可以看出, 不仅在数值上计算值与实验值有较好的符合, 而且在随 A 的变化的趋势上也很令人满意. J 的计算值仍比实验值稍大一点 (约 10%). 图 1 的转动惯量都是基带的转动惯量, 但 Al^{27} 因为基带的转动激发态尚未观察到, 故只画出第一激发带的计算值及实验值

$$\left(K = \frac{1}{2} +\right)^{[27]}.$$

值得注意的是, 转动惯量实验值对不同的激发带可以有很大差别, 在这个计算中也得到相当好的符合, 以下举 Al^{26} 为例说明计算的要点. 图 2 给出 Al^{26} 的低激发态能谱, 转动带的分析是根据 D. A. Bromley^[28]的工作. 在 Al^{26} 的低激发态中, 相当肯定存在着四个转动带, 相应于

$$K\pi = \frac{5}{2}+, \frac{1}{2}+, \frac{1}{2}+, \frac{1}{2}-.$$

按 Nilsson 图, 取 $\eta = 6$, Al^{26} 各转动带的 Nilsson 组态如图 3 所示, 图中并以箭头表示有贡献的激发方式. 在有贡献的跃迁中, 宇称应守恒, Ω 改变 ± 1 . 在实际计算中只须考虑到同一谐振子壳层内的各能级间的跃迁就够了, 因为相邻壳层的宇称相反, 而越过一壳层的跃迁的贡献可以忽略不计.

由于在 Nilsson 图中 $\frac{1}{2}+(9)$ 和 $\frac{5}{2}+(5)$ 能级次序与实验不符, 我们在处理组态的填充及能级间距离时, 根据 Al^{26} , Mg^{26} , Al^{27} 的基态自旋及激发带的自旋的分析做了相应的修改. 能级 $\frac{1}{2}+(9)$ 被提升到能级 $\frac{5}{2}+(5)$ 的上面 0.5 Mev, 但其展开系数 a_{1A} 未作修改, 因为后者的改变是不大的^[25].

由以上的计算中可以看出, 原子核的转动惯量主要由内部粒子态所决定, 而实际上有贡献的只是满壳层以外的粒子, 由于各个不同激发带或不同原子核的内部粒子态不同, 有贡献的跃迁也可能很不同, 所以它们的转动惯量也可以很不同, 例如 Al^{26} 的基带与它的激发带的转动惯量相差就很大, 这些变化特性不可能以非旋或刚体观点来理解. 从这里也可以看出: 为什么采用了有强自旋轨道耦合能的 Nilsson 波函数后所计算的结果会与

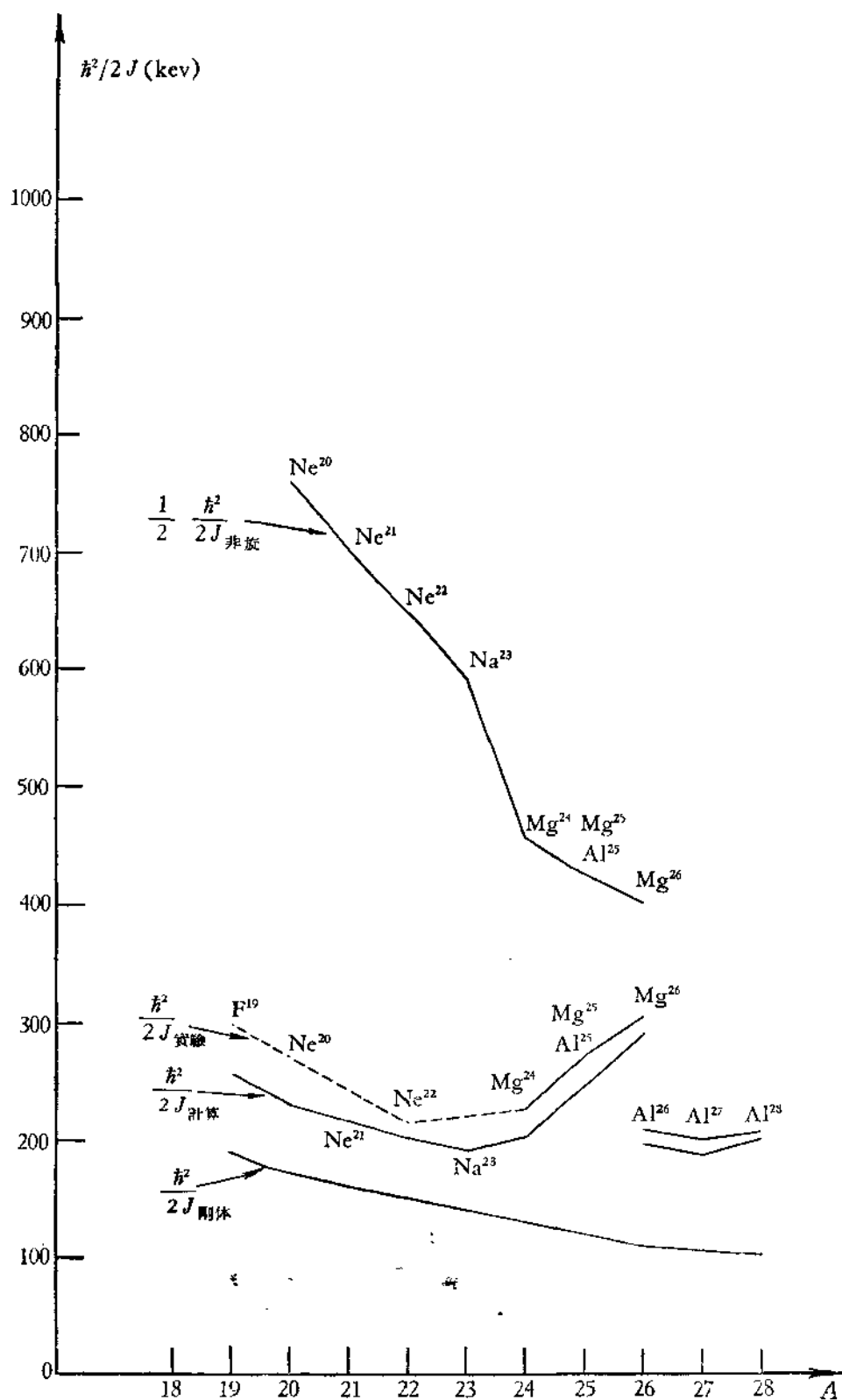


图1. 轻核转动区原子核转动惯量

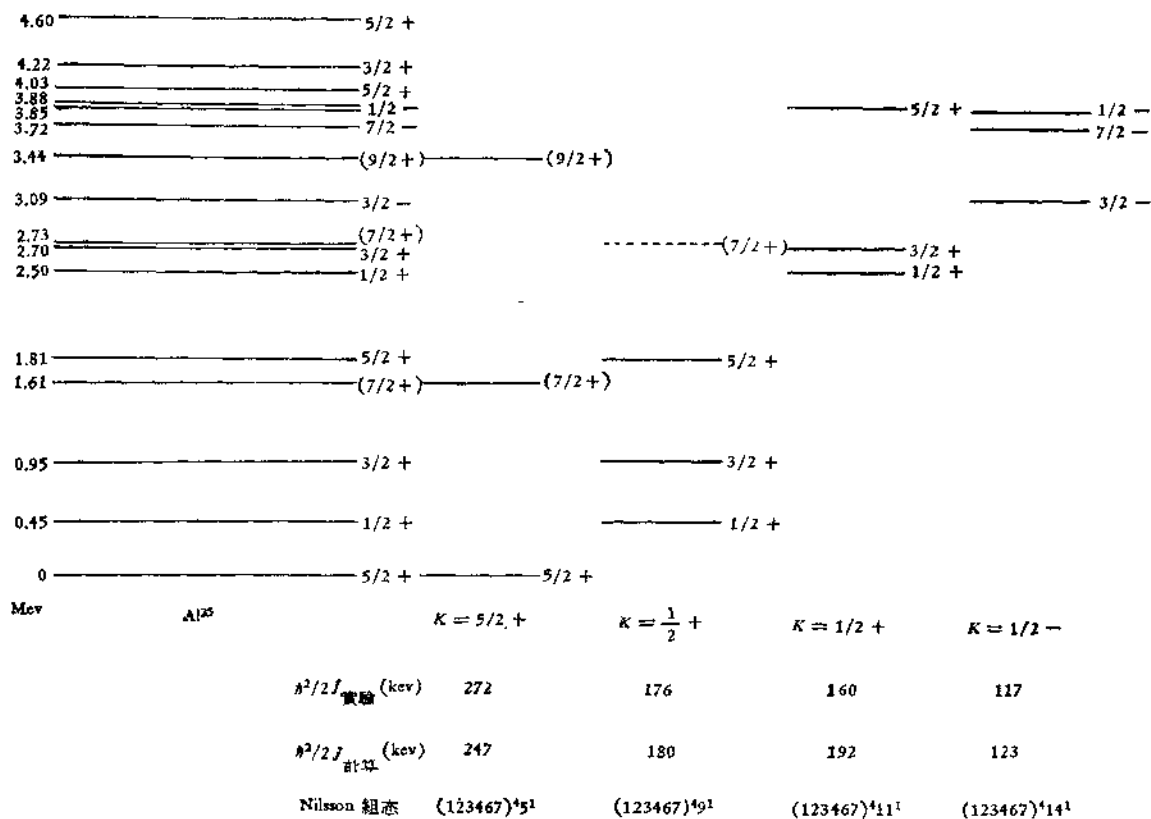


图 2. Al^{25} 低激发带转动惯量(实验分析取自 D. A. Bromley 工作^[28])

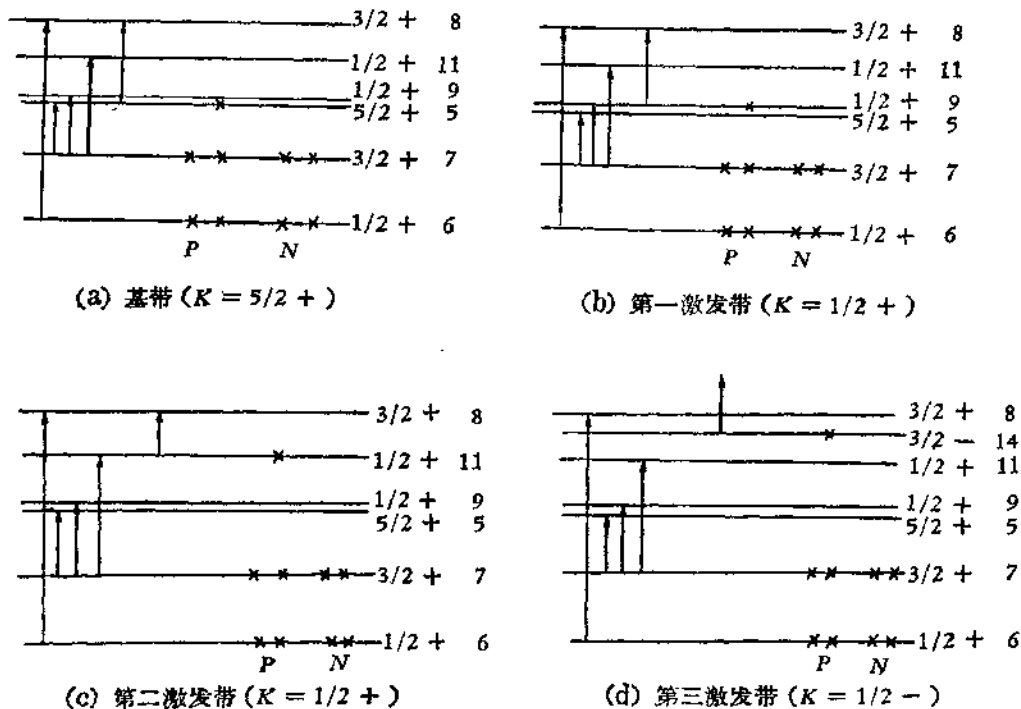


图 3. Al^{25} 各激发带组态及有贡献的跃迁

Inglis 等人的計算結果有如此大的差異。

2.3 重核

在重核中我們計算了 Lu^{175} 的轉動慣量，圖 4 給出 Lu^{175} 的能級圖^[9]，它的激發態可

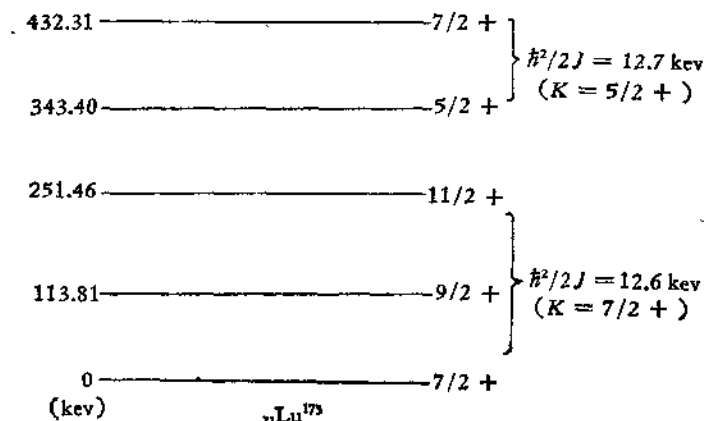


圖 4. Lu^{175} 能級圖^[9]

分出兩個轉動帶，相對於 $K\pi = \frac{7}{2} +$ ， $\frac{5}{2} +$ ，圖 5 給出 Lu^{175} 的質子和中子的能級填充圖以及有貢獻的主要躍遷方式。組態填充圖是根據附近原子核的自旋定出的，並與 Nilsson 的改進了能級圖相符合^[6]，在重核中，由於滿壳層外核子數較多，以及諧振子各

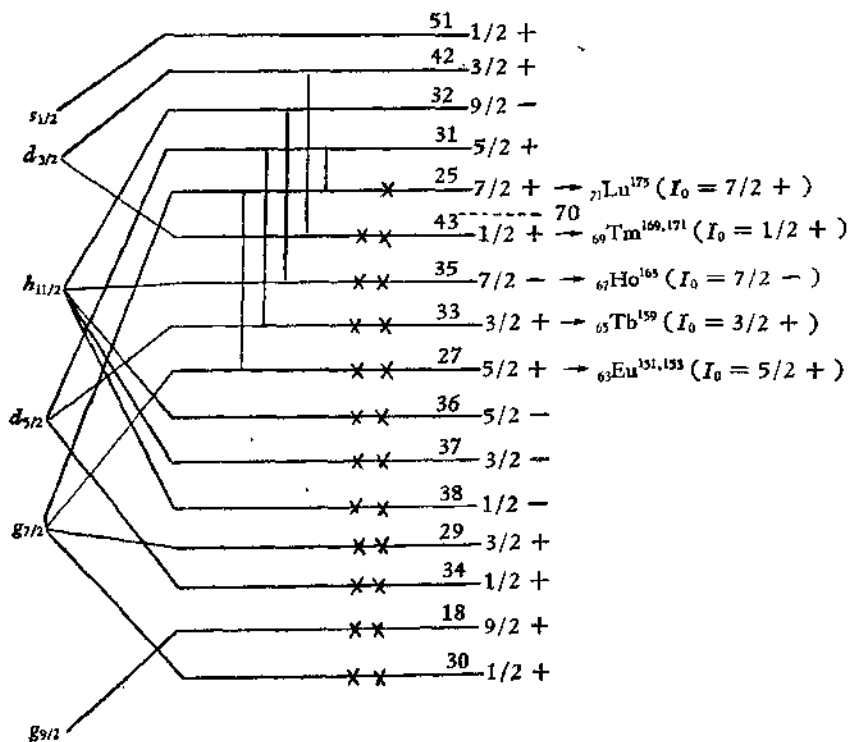
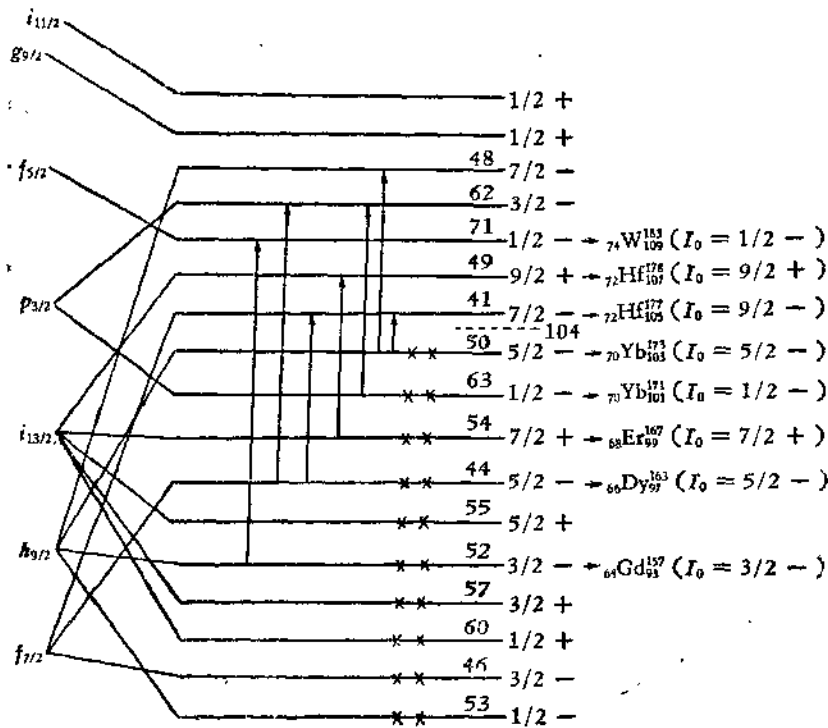


圖 5(a) 71Lu_{104}^{175} 質子組態

图 5(b) ^{175}Lu 中子组态

壳层能级间的交错,使得可能有贡献的跃迁很多,但实际计算发现许多跃迁的贡献很小,可以忽略不计。图 5 中只给出了主要跃迁方式。

计算结果($\delta=0.32, \eta=4$)与实验的比较如下:

$$\hbar^2/2J_{\text{实验}} = 12.6 \text{ keV};$$

$$\hbar^2/2J_{\text{计算}} = 10.6 \text{ keV};$$

$$\hbar^2/2J_{\text{刚体}} = 4.7 \text{ keV};$$

$$\hbar^2/2J_{\text{非旋}} = 54 \text{ keV}.$$

计算值与实验的符合也很不坏,但 $J_{\text{计算}}$ 仍比 $J_{\text{实验}}$ 约大 20%。对 $K=\frac{5}{2}+$ 激发带的计算也给出与上面几乎相同的数值,而实验上 $K=\frac{7}{2}+$ 和 $K=\frac{5}{2}+$ 的转动惯量也的确几乎一样。

我们认为,在重核中,由于满壳层外粒子数较多,能级密度较大,可以有贡献的跃迁也较多。因此,一般说来,转动惯量随 A 的变化以及不同激发带的变化可能并不大。

三. g_R 因子

关于在 Inglis 模型基础上计算 g_R 因子的问题 Bohr 及 Mottelson 曾提到过,并给出^[6]

$$g_R = \frac{2}{J} \sum_b \frac{\langle a | j_x | b \rangle \langle b | \mu_x | a \rangle}{E_b^0 - E_a^0}, \quad (10)$$

但未予仔细证明及讨论。

虽然波函数(3)并非总角动量本征函数,但仍可利用来计算 g_R 因子,我们只须计算绕

集体轉动軸—— x 軸的总磁矩。处于 b 态的核子对这一磁矩的貢獻为

$$\langle \psi_b(x, t), \mu_x, \psi_b(x, t) \rangle, \quad (11)$$

其中

$$\mu_x = g_l l_x + g_s S_x.$$

从表面上看, (11) 似乎是依賴時間的, 但由于

$$[\mu_x, j_x] = 0,$$

并利用(3)式, (11)式变为

$$\langle \varphi_b^*(x), \mu_x \varphi_b(x) \rangle.$$

总磁矩 μ_R 为

$$\mu_R = \sum_b \langle \varphi_b^*(x), \mu_x \varphi_b(x) \rangle, \quad (12)$$

其中 b 对所有核子态求和, 由此得 g_R 因子为

$$g_R = \mu_R / J \omega. \quad (13)$$

利用(5), (12), (13)便立刻得到(10)。

我們利用(10)式計算了 Lu^{175} 的 g_R 因子, 計算結果 $g_R = -0.30$, 實驗值^[12] 也为 0.3, 但 $Z/A \approx 0.41$. 在重核中可望 g_R 的計算值一般說來变化不大, 實驗上其他重核的 g_R 因子^[13] 也大多数在 0.3 附近。

輕核的 g_R 因子計算結果列在表 2。

表 2. 輕核 g_R 因子

原 子 核	b	η	g_R	Z/A
F^{19}	~ 0.3	6	0.21	0.473
Ne^{20}	(0.36)	6	0.53	0.500
Ne^{21}	0.36	6	0.41	0.476
Ne^{22}	(0.36)	6	0.30	0.454
Na^{23}	0.36	6	0.44	0.478
Mg^{24}	0.40	6	0.56	0.500
Mg^{25}	(0.40)	6	0.63	0.480
Al^{25}	(0.40)	6	0.55	0.520

但在輕核中尚无實驗結果可比。 g_R 的計算值随內部粒子組态的变化相当大, g_R 可以大于或小于 Z/A 。

四. 討論及总結

如果我們对粒子内部运动給予較恰當的描述, 則原子核轉动运动的参量的确可以在 Inglis 模型基础上得到解釋。稍加修正的 Nilsson 波函数看来可以作为一个好的一級近似。如果再把核子間剩余相互作用考虑进去, 則計算出的 J 仍然比實驗值約大 10—20% 的情况可能得到解决。尽管如此, 剩余相互作用的影响并无 Bohr 和 Mottelson 所強調的那樣重要, 至少对于奇 A 核和輕核是如此。对于重的偶偶核, 由于超导效应^[10], 粒子激发时有一个能量鴻溝 (energy gap), 这就有可能使計算的轉動慣量变小。例如成对效应

(pairing-effect) 就会使跃迁的能量分母变大, 因为此时拆散了一对粒子, 此时转动惯量将变小。对于轻核, 超导效应可能并不重要, 轻核中并无系统的奇 A 核 J 比偶偶核 J 大的现象, 例如 $J(\text{Mg}^{24}) > J(\text{Mg}^{26})$ 。

至于相应于振动集体运动的参量也可以和上相仿地进行估计。但在振动这类集体运动中, 绝热近似可能不成立, 这就使估计结果不是那样可靠。

参 考 文 献

- [1] Alder, Bohr, Huus, Mottelson and Winther, *Rev. Mod. Phys.* **28**, (1956), 432.
- [2] Bohr, A. and Mottelson, B., *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* **27**, (1953) No. 16.
- [3] Mottelson, B., "Proceedings of the Rehovoth Conference on Nuclear Structure" (1957), p. 83.
- [4] Inglis, D. R., *Phys. Rev.* **96** (1954), 1059; **97** (1955), 701; **103** (1956), 1786. *Nuclear Phys.* **8** (1958), 125.
- [5] Nilsson, S. G., *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* **29** (1955), No. 16, 或见俄译本 "Деформация Атомных ядер" (1958).
- [6] Bohr, A. and Mottelson, B., *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* **30** (1956), No. 1.
- [7] 北京大学物理系, 原子核理论组, 待发表.
- [8] Bromley, D. A., "Proceedings of the Rehovoth Conference on Nuclear Structure" (1957), pp. 108—117.
- [9] Джепенюк, Б. С. и Пекер, Л. К., "Схемы Распада Радиоактивных Ядер" (1958).
- [10] Bohr, A., Mottelson, B. and Pines, D., *Phys. Rev.* **110** (1958), 936.

ESTIMATION OF THE NUCLEAR MOMENT OF INERTIA AND THE g_R FACTOR

TSENG CHIN-YUEN CHANG-CHING-YING YANG LI-MING

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

A detailed estimation of the nuclear moment of inertia and the collective g_R factor based on the cranking model of Inglis and Nilsson's wave function is made. The agreement with experimental value is satisfying not only in regard to magnitude but also in the tendency of variation with A and with the excited internal configurations. The reason of success is probably the proper choice of a axial-symmetric self-consistent field including a strong spin-orbit coupling.